



Алексей Николаевич
КРЫЛОВ
(1863-2013)

Крылов Алексей Николаевич

Алексей Николаевич Крылов родился 3 (15) августа 1863 года в деревне Висяга Алатырского уезда Симбирской губернии (сейчас – д. Крылово Порецкого района Чувашской Республики).

А.Н. Крылов - кораблестроитель, механик и математик, академик АН СССР, Герой Социалистического Труда. После окончания в 1884 г. Морского училища был зачислен в компасную часть Главного гидрографического управления, где выполнил свои первые научные работы по девиации компасов. В 1890 г. окончил кораблестроительное отделение Морской академии и дальнейшую деятельность посвятил главным образом разработке вопросов теории корабля. С 1890 г., почти 50 лет, преподавал в Морской академии, а также в Петербургском (Ленинградском) политехническом институте и др. вузах. Создал ряд учебных курсов, явившихся одновременно оригинальными научными трудами большого практического значения. С 1900 г. руководил Опытным бассейном для испытаний моделей судов, в 1908-10 гг. был главным инспектором кораблестроения и председателем Морского технического комитета. В 1910-17 гг. консультировал по вопросам судостроения на Металлическом, Путиловском и др. заводах. Активно участвовал в проектировании и постройке первых русских линкоров типа «Севастополь», ввёл в конструкцию кораблей ряд технических новшеств, нашедших затем применение в практике военного кораблестроения. С 1916 г. директор Главной физической обсерватории и начальник Главного военно-метеорологического управления, с 1917 г. директор физической лаборатории (позже института) Академии наук. В 1919 г. назначен начальником Морской академии, участвовал в её преобразовании и выработке устава. В 1921-27 гг. находился за границей в составе комиссии для возобновления научных контактов и для решения практических народно-хозяйственных задач, связанных с укреплением морского и ж.-д. транспорта. С 1927 г. продолжал преподавать в Морской академии и руководил Физико-математическим институтом АН СССР. Активно участвовал в решении основных технических вопросов военного и гражданского судостроения в СССР.

Труды А.Н. Крылова посвящены теории корабля, теории магнитных и гироскопических компасов, артиллерии, математике. Для вычисления основных характеристик корабля (стойкости и плавучести) разработал рациональные приёмы и схемы, ставшие классическими. Создал теорию килевой качки, дал методы определения поведения судна в общем случае движения под углом к направлению бега волн. Важное практическое значение имели работы Крылова по непотопляемости судна, особенно составленные им таблицы непотопляемости. Крылову принадлежат выдающиеся работы по строительной механике корабля. Им начата разработка динамических проблем в кораблестроении, создана теория вибрации судов, предложен оригинальный метод расчёта балок, лежащих на упругом основании, имеющий большое значение не только для расчёта судовых корпусов, но и для развития строительной механики в целом. В 1938-40 гг. опубликовал комплекс работ, в которых дал полное изложение теории девиации магнитного компаса, исследовал вопросы теории гироскопических компасов, разработал теорию влияния качки корабля на показания компаса (Государственная премия СССР, 1941).

Работы Крылова по теории кораблестроения принесли ему мировую известность. Большую ценность имеют также работы Алексея Николаевича по математике и механике. Он разработал ряд вопросов рациональной организации численных расчётов, обосновал способ улучшения сходимости тригонометрических рядов, предложил метод решения т.н. векового уравнения. Им построена первая в России машина для интегрирования дифференциальных уравнений, создан ряд важных корабельных и артиллерийских приборов, выполнены крупные исследования в области колебаний артиллерийских стволов и внешней баллистики. Непреходящую ценность имеют труды Крылова, посвященные разработке наследия классиков науки: И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Гаусса и др. Им созданы яркие очерки о жизни и деятельности П.Л. Чебышева, Ж. Лагранжа, И. Ньютона и др. Награжден тремя орденами Ленина.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Московский государственный открытый университет имени В.С. Черномырдина

Чебоксарский политехнический институт (филиал)

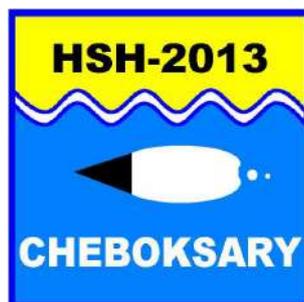


In memory of A.N. Krylov and the 150th anniversary of his birth

HSH-2013

International Summer Scientific School

**HIGH SPEED HYDRODYNAMICS
& SHIPBUILDING**



ГБС-2013

Международная научная конференция

**ГИДРОДИНАМИКА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ
И КОРАБЛЕСТРОЕНИЕ**

посвященная 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова

Сборник научных трудов

Редакционно-издательский отдел ЧПИ МГОУ
Чебоксары
2013

УДК 532.51
ББК 22.253.3
Г 46

Составители:

Терентьев А.Г.

доктор физико-математических наук, профессор кафедры
«Высшая и прикладная математика» ЧПИ МГОУ

Чегулов В.В.

кандидат технических наук, доцент, заместитель директора
по научной работе ЧПИ МГОУ

Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение:

Г 46 сборник трудов Международной научной конференции «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение», посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова. - Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. - 304 с.
ISBN 978-5-4246-0212-2

В сборник включены труды ведущих ученых в области гидродинамики, аэродинамики, строительной механики, энергетики, экологии, кораблестроения. Приведены результаты исследований российских и зарубежных ученых, ставшие развитием идей известного кораблестроителя, математика, академика Алексея Николаевича Крылова, 150-летний юбилей которого отмечается 3 августа 2013 г.

УДК 532.51
ББК 22.253.3

Труды печатаются в авторской редакции

ОРГАНИЗАТОРЫ



**Российское НТО судостроителей им. академика А.Н. Крылова
Санкт-Петербург**

**Международный и Российский Союз научных и инженерных
общественных организаций
Москва**

**Чебоксарский политехнический институт
(филиал) МГОУ им. В.С. Черномырдина
Чебоксары**

**Министерство образования и молодежной политики
Чувашской Республики
Чебоксары**

**Крыловский государственный научный центр
Санкт-Петербург**

**Чебоксарское производственное объединение им. В.И. Чапаева
Чебоксары**

СПОНСОРЫ



**Агрохолдинг «ЮРМА»
Генеральный директор Владимир Федорович Ермолаев**

**ЗАО «Чебоксарское предприятие «Сеспель»
Директор Бакшаев Владимир Александрович**

**Чебоксарское производственное объединение им. В.И. Чапаева
Генеральный директор Резников Михаил Сергеевич**

Организационный комитет

Александров Владимир Леонидович – Председатель – президент Российского НТО судостроителей им. акад. А.Н. Крылова, профессор, Герой России

Акимов Александр Петрович – Сопредседатель – директор ЧПИ МГОУ, профессор

Промыслов Леонид Александрович – первый вице-президент НТО судостроителей им. акад. А.Н. Крылова

Ситцев Владимир Михайлович – первый вице-президент Российского Союза НИО

Половинкин Валерий Николаевич – референт директора Крыловского государственного научного центра, профессор

Мартынов Николай Павлович – генеральный директор Фонда содействия НТП

Муру Георгий Николаевич – генеральный директор Центрального института судоремонта

Юрчак Александр Андреевич – исполнительный директор Ассоциации судостроителей Санкт-Петербурга

Конов Эдуард Александрович – директор издательства "Морвест", главный редактор журнала "Морской вестник"

Попов Вячеслав Михайлович – руководитель Архангельского и Северодвинского отделения Российского НТО судостроителей им. акад. А.Н. Крылова

Лебедев Евгений Владимирович – глава администрации Порецкого района Чувашской Республики

Резников Михаил Сергеевич – Генеральный директор Чебоксарского производственного объединения им. В.И. Чапаева

International Advisory Board

Alexey G. Terentiev, chairman, Professor of ChPI MSOU, Russia

Robert I. Nigmatullin, chairman, Institute of oceanology of the RAS, Russia

Konstantin E. Afanasiev, Kemerovsky State University, Russia

Luca d'Agostino, University of Pisa, Italy

Roger Arndt, University of Minnesota, USA

Steven Ceccio, University of Michigan, USA

Jean-Pierre Franc, Lab. des Ecoulements Geophysiques et Industriels, France

Vladimir P. Karlikov, Moscow State University, Russia

Valery K. Kedrinskii, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Russia

Spyros Kinnas, University of Texas, USA

Ivan Kirschner, Applied Physical Sciences Corporation, USA

Dmitry V. Maklakov, Kazan (Volga) federal university, Russia

Yoichiro Matsumoto, University of Tokyo, Japan

Knud Aage Moerch, Technical University, Denmark

Peter Pelz, Darmstadt University of Technology, Germany

Kirill V. Rozhdestvensky, Saint Petersburg State Marine Technical University, Russia

Alexander A. Rusetsky, Krylov state research center, Russia

Yury N. Savchenko, Hydrodynamics institute of National Academy of Science, Ukraine

Vladimir Serebryakov, Hydrodynamics institute of National Academy of Science, Ukraine

Bernd Stoffel, Darmstadt University of Technology, Germany

Tom van Terwisga, Maritime Research Institute, Netherlands

Yoshinobu Tsujimoto, Osaka University, Japan

Vladimir P. Zhitnikov, Ufa state aviation technical university, Russia

Этот научный форум является одиннадцатой летней научной школой «Гидродинамика больших скоростей» (ГБС), проводимой с 1980 года в г. Чебоксары. Школа была организована при поддержке и непосредственном участии талантливого ученого академика Седова Леонида Ивановича. Целью школы является создание рабочей обстановки и условий для одновременного отдыха участников школы. Именно возможность сочетать работу с отдыхом привлекают ученых с разных городов России. Здесь собираются и маститые ученые, и начинающие молодые студенты и аспиранты, чтобы в непринужденной обстановке встретиться с знаменитостями, послушать их выступления и доложить свои результаты, обсудить новые проблемы и получить новый заряд для дальнейшей работы. Несомненно, такие встречи являются стимулом для научных исследований, что благотворно влияет на развитие гидродинамики в целом.

Начиная с 2002 года, научная школа приобретает статус международной и, как правило, посвящается юбилейным датам крупных ученых.

Настоящая школа «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение» посвящается 150-летию со дня рождения великого ученого - корабельщика академика Алексея Николаевича Крылова, уроженца земли Чувашской. Он родился в деревне Висяга (ныне д. Крылово Порецкого района Чувашской Республики) и прославил себя как талантливый ученый во многих областях науки (математике, механике, сопротивлении материалов, гидродинамике, теории корабля), как новатор-изобретатель, как волевой организатор, как государственный деятель, как отличный оратор и педагог. Не случайно, изъявили желание участвовать в работе школы ГБСиК многие ученые С.-Петербурга, Москвы, Новосибирска, Уфы, Казани, Н. Новгорода, а также из некоторых зарубежных стран (США, Украина, Сербия, Н. Зеландия и др.). Оргкомитет и Программный комитет благодарны всем участникам научного форума и желают им творческих успехов в их интересной и необходимой для науки работе.

Мы благодарны также спонсорам, которые создали условия для организации плодотворной работы Летней научной школы «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение».

Председатель оргкомитета
Герой России В.Л. Александров

Председатель программного комитета
профессор А.Г. Терентьев

Сопредседатель оргкомитета
профессор А.П. Акимов

Главный редактор
доцент В.В. Чегулов

**ГЕНИЙ АКАДЕМИКА А.Н. КРЫЛОВА:
НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНОЕ НАСЛЕДИЕ И ВКЛАД В ИСТОРИЮ СТРАНЫ
К 150-летию со дня рождения**

Александров В.Л.

Герой России

Президент Российского НТО судостроителей им. акад. А.Н. Крылова
Президент Ассоциации судостроителей Петербурга и Ленинградской области
Директор Института морской техники и технологий СПбГМТУ

Алексей Николаевич Крылов, действительный член Академии наук царской России и Советского Союза, чей 150-летний юбилей со дня рождения мы начинаем отмечать сегодня здесь, на просторах Волги, без преувеличения может быть назван нашим национальным гением, уникальным учёным и инженером, личностью поистине исторической. И такую оценку, что бывает нечасто, Алексей Николаевич Крылов заслужил уже у своих современников. Глеб Максимилианович Кржижановский, академик АН СССР, чаще вспоминаемый как политический деятель, писал о Крылове: «...Мощный гений этого человека, глубина и многогранность его знаний поистине исключительны. Научно-техническая деятельность А.Н. Крылова колоссальна. Она служит ярким доказательством неразрывной связи науки и техники. Математика, механика, физика, астрономия и корабельные науки были его родной стихией. Не было в области техники такого вопроса, на который он не мог бы дать исчерпывающего ответа...». А посол Великобритании в СССР Арч Керр, в 1942 г., после избрания Крылова почётным членом Английского общества корабельных инженеров высказался о советском учёном так: «...Высказывая сегодня наше уважение академику Крылову, мы тем самым платим дань созидательному духу русских инженеров-кораблестроителей ... Академик Крылов, как многие его знаменитые соотечественники во главе с самим Петром и Ломоносовым, является живым примером многогранного гения.

И эти слова – не преувеличение. Многогранность и интенсивность его деятельности являлись поразительными. Многие идеи и работы А.Н. Крылова в естественно-технических науках, в области методологии и технологий инженерной деятельности сохраняют свою актуальность уже второй век подряд. Характеризуя именно его деятельность и творчество, можно было бы смело использовать столь часто употребляемые сегодня слова «инновации» и «модернизация». В наше во многом сугубо утилитарное время вообще становится сложно поверить, что такая личность могла жить и творить. Хотя своего рода мистика российской истории такова, что в её переломные эпохи время рождало в нашей стране великих людей, которые вносили свой решающий вклад в развитие именно тех областей знания, производства или управления, что и становились решающими для вывода страны и государства из кризисного состояния. Достижения и вклад академика А.Н. Крылова в этом смысле действительно сложно переоценить.

Целый ряд научных изысканий А.Н. Крылова имеет базовый характер для любой области инженерного дела. Однако, прежде всего, Алексей Николаевич Крылов – это человек моря и флота: военно-морского флота России. Таким было его базовое образование: он окончил Морское училище и кораблестроительное отделение Морской академии (1890 г.). Об этом неоднократно и в разные годы своей жизни говорил и он сам.

А современники не зря называли Алексея Николаевича «адмиралом корабельной науки». Вклад Алексея Николаевича Крылова в дело практического строительства флота, в организацию судостроения у нас в стране как отрасли, в базовые разделы науки о корабле, в научно-технологическое обеспечение судостроения и военно-морских сил следует назвать равновеликим.

В 1908-1910 гг. А.Н. Крылов в должности председателя Морского технического комитета и Главного инспектора кораблестроения уже руководил постройкой крупнейших по тому времени линейных кораблей типа «Севастополь», где по его инициативе и настоянию были применены новейшие по тому времени материалы и технологии. Он принял самое непосредственное участие в создании и ходовых испытаниях первых подводных лодок российского военно-морского флота типа «Барс», спроектированных родоначальником отечественного подводного флота Иваном Григорьевичем Бубновым. И в 1904 г. первая подводная лодка этой серии «Дельфин» была зачислена в состав флота.

У российского флота есть драматичная традиция. Должно было произойти сокрушительное поражение в войне для того, чтобы государственная власть озаботилась состоянием флота и занялась его строительством и модернизацией. Так произошло в очередной раз после фактической гибели российского флота в Цусимском сражении в 1905 г. Возрождение русского военно-морского флота перед Первой мировой войной в результате

начатой реализации так называемых малой и большой судостроительных программ – первостепенная заслуга лично Алексея Николаевича Крылова. В должности генерала для особых поручений при морском министре И.К. Григоровиче Алексей Николаевич стал тогда автором доклада министра Государственной Думе об ассигновании 500 млн.рублей на строительство флота с учётом уроков русско-японской войны 1904-1905 гг. Текст этого доклада продемонстрировал уровень мышления уже не только выдающегося учёного и инженера, но и государственного деятеля, глубоко понимающего системообразующее значение судостроения и флота для национальной безопасности страны. Данное А.Н. Крыловым тогда определение, каким должен быть флот и, соответственно, как должно быть организовано его строительство и он сам, стало хрестоматийным и является более, чем актуальным по сей день. *«Флот есть органическое целое ..., - писал А.Н. Крылов, - ...возможна лишь планомерная, рассчитанная борьба флота против флота, причём... отсутствие в нём какого-либо типа судов или их относительная малочисленность не искупается преувеличенным развитием числа другого типа – их излишнее число не доставит преобладания над противником, а представит лишь напрасную трату средств...»*

Начав своё сотрудничество с Советской властью сразу же после 1917 г., Алексей Николаевич стал одним из главных организаторов и экспертов для возрождения флота в СССР. Под его руководством работала Государственная комиссия по строительству доков. В 1933 г. он был назначен членом Экспертно-технического совета Главсевморпути. Он принимал непосредственное участие и в строительстве ряда проектов. Так, во время длительной заграничной командировки, в 1925-1927 гг., он выступил главным представителем заказчика – Нефтесиндиката СССР – при постройке 2-х нефтеналивных судов для нашей страны в Марселе, Франция. В октябре 1935 г. в Ленинграде был заложен первый крейсер советской постройки «Киров», который позднее принял активное участие в обороне Ленинграда и в прорыве вражеской блокады. Последующее строительство этого новейшего по тому времени боевого корабля велось под наблюдением А.Н. Крылова. А в 1938 г., Алексей Николаевич возглавил комиссию по рассмотрению проекта первого в мире глубоководного аппарата проекта своего ученика и соратника, будущего академика Ю.А.Шиманского. И тогда только война помешала осуществить этот смелый проект в постройке. В годы самой войны, особенно в её начале академик А.Н. Крылов активно консультировал как судостроителей, так и военных моряков. В апреле 1942 г. он был включён в комиссию АН СССР по научно-техническим военно-морским вопросам для оказания постоянной консультативной помощи учреждениям ВМФ СССР.

Алексей Николаевич Крылов по праву считается основоположником современной теории ко-

рабля. К моменту начала его преподавательской деятельности в Морской академии в 90-х гг. XIX в. преподаваемые основы этой науки относились по существу к эпохе парового, а то и парусного флота. Написанный А.Н. Крыловым новый учебник по теории корабля, основанный на его авторском курсе, который он начал читать слушателям Морской академии в 1891 г. стал прототипом для последующих курсов других авторов. Составленные Алексеем Николаевичем и введённые в курс его лекций схемы вычисления элементов плавучести, непотопляемости и остойчивости кораблей остаются основой и для современной практики судостроения.

Новым словом в кораблестроительной науке и своего рода «расширением» теории корабля стала общая теория качки корабля на волнении, которая стала излагаться в зарубежных руководствах по кораблестроению под названием «теории Крылова». Именно благодаря этой работе Алексей Николаевич Крылов в 1896 г. стал одним из немногих русских иностранных членов Английского общества корабельных инженеров – самой авторитетной международной организации данного профессионального сообщества. А в 1898 г. за доклад о теории уже в завершённом виде перед этой же аудиторией он был удостоен высшей награды – Золотой медали организации первым из иностранных членов Общества.

К работам А.Н. Крылова по качке корабля непосредственно примыкают исследования учёным проблемы вибрации корабля. Алексей Николаевич и здесь стал первопроходцем. В 1901 г. им была разработана теория вибрации судна, объяснительным принципом которой стало физическое явление резонанса. Теория вибрации А.Н. Крылова была изложена в курсе лекций «Вибрация судов», опубликованных в 1907 г. Там же учёным были предложены конкретные способы уменьшения вибрации, которые сразу же были приняты на вооружение и в зарубежном судостроении.

Неоценим вклад А.Н. Крылова в решение проблемы непотопляемости корабля и мер борьбы за непотопляемость для мирового судостроения. В этой области он стал выдающимся продолжателем и соратником другого выдающегося деятеля российского Военно-морского флота – адмирала С.О. Макарова, заложившего основы учения о непотопляемости корабля. В 1903 г. учёный сформулировал принципы непотопляемости судна и разработал первые в мире таблицы непотопляемости, как практическое руководство для моряков по сохранению корабля в надводном положении и его остойчивости в случае получения пробоины в боевых условиях или при ином повреждении. И эта методика доказала свою безусловную полезность уже в 1905 г. в ходе трагического Цусимского сражения, когда из всех броненосцев русского флота, получивших повреждения, на плаву осталась только одна – «Орёл», благодаря использованию таблиц Крылова корабельным инженером В.П. Костенко. Отметим, что в английском флоте подобные таблицы стали использоваться только

спустя 25 лет после того, как их разработал А.Н. Крылов.

Алексей Николаевич Крылов является также основоположником теории судоподъёма в мировой корабельной науке. Первая его в мировой практике научная работа по этому вопросу датируется 1916 г. и была связана с подъёмом затонувшего по трагической случайности в севастьяпольской бухте линкора «Императрица Мария», когда потребовалось разработать особые методы по приведению корабля в прямое положение в процессе всплытия. А в законченном виде теория судоподъёма была изложена учёным уже в советское время в журнале «Судоподъём» Экспедиции подводных работ особого назначения (ЭПРОН), где он предложил метод судоподъёма продутыми понтонами, скреплёнными с затонувшим судном.

Алексей Николаевич Крылов являет собой, безусловно, феномен академика-практика, академика-инженера, если такое образное определение уместно. Глубокое знание высшей математики, физики и механики он рассматривал как обязательную составляющую профессиональной квалификации и для любого инженера – не только кораблестроителя, и для учёного, работающего в области техники. Анализ его научного творчества выявляет всестороннее и постоянное стремление учёного по внедрению математических методов в кораблестроение и другие области инженерного дела.

В числе основных математических трудов, созданных учёным на рубеже веков, в начале его большого творческого пути, надо вспомнить, прежде всего, фундаментальный труд А.Н. Крылова «О приближённых вычислениях». Эта работа положило начало новому методологическому и методическому подходу к кораблестроительным и иным инженерным расчётам, который стал необходимой составляющей основных разделов теории корабля.

Проблему должного соотношения научных исследований и их практического использования, единства теории и практики Алексей Николаевич обсуждал неоднократно в различных трудах и в разные годы, как применительно к научно-инженерной деятельности, так и к педагогической работе. *«...наука должна состоять в объединении теории и практики, и всё её развитие должно быть основано на таком единении»*, - писал Алексей Николаевич в 1934 г. в статье «Теория и практика». И в стенах Академии наук в 1920-1930-е гг., например, не было более ярого сторонника организации кафедры прикладных наук (аналог сегодняшнего отделения), чем академик Крылов.

Одним из наиболее существенных примеров, демонстрирующих отношение А.Н. Крылова к научному обеспечению практической деятельности является его руководство Опытным бассейном – специальным учреждением Морского министерства по испытанию моделей кораблей в 1900-1908 гг., которое было создано в 1890-е гг. В своём рапорте на имя Главного инспектора кораблестроения накануне своего назначения на долж-

ность Алексей Николаевич изложил тогда по существу образцовую и комплексную научно-экспериментальную программу по созданию корабля, базирующуюся на закономерностях фундаментальных наук. В годы руководства бассейном под руководством и при участии А.Н. Крылова здесь был произведён целый ряд экспериментов и испытаний по основным научным направлениям исследований самого учёного, обеспечено научно-экспериментальное сопровождение постройки, в т.ч. первых подводных лодок, и проч. Представляется закономерным, что на базе этого учреждения был организован впоследствии и развивался сегодняшний ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова – головной институт судостроительной отрасли страны, всегда обеспечивавший отечественных корабелов самыми передовыми научно-техническими разработками.

Значение теоретических работ А.Н. Крылова в области кораблестроения практически всегда выходило за его пределы. Так, например, результаты своих исследований в области математической физики по тематике вынужденных колебаний А.Н. Крылов использовал, в т.ч., выступая в роли технического эксперта при строительстве мостов. В 1911 г. он сделал ряд важных рекомендаций по наводке первого арочного пролёта строившегося тогда моста императора Петра Великого в Петербурге. А в 1933-1934 гг. академик А.Н. Крылов произвёл расчёты по постановке кессона моста им. Володарского уже в Ленинграде, а также непосредственно участвовал в ней самой.

Важнейшая область деятельности современного инженера – сфера изобретений – так же отмечена гением Алексея Николаевича Крылова. Сочетание научных исследований с инженерными разработками, изобретение на базе теорий собственного авторства новых конструкций, приборов и устройств – ещё одна характерная черта его выдающегося жизненного пути.

Большое значение в его научно-изобретательской деятельности приобрели работы, связанные с теорией компаса. Его первым изобретением стал дромоскоп – прибор для определения сил, действующих на магнитную стрелку компаса. Этому прибору оказалась посвящена и первая публикация мичмана А.Н. Крылова. А 13 марта 1941 г. труды академика А.Н. Крылова по теории компаса были удостоены Сталинской премии 1-ой степени.

А.Н. Крылову принадлежит целый ряд изобретений в области морской артиллерии, которые обеспечивали уникальные возможности для боеспособности русского флота по сравнению с остальными флотами мира, как, например, «отметать» – специальный прибор для обучения наводчиков орудий стрельбе на качке. При этом все приборы его авторства были приняты к производству и внедрению на флотах, ряд из них был удостоен специальных премий Михайловской артиллерийской академии (1909 и 1912 гг.). И впоследствии они долгие годы использовались на флоте.

Большое значение имели работы также А.Н. Крылова в области гироскопов в 1930-е гг., результаты которых активно использовались, в т.ч., в бурно развивавшейся в те годы советской авиации.

А «интегратор дифференциальных уравнений» изобретения А.Н. Крылова для приближённых вычислений обладал целым рядом улучшенных свойств по сравнению с аналогичными приборами, как бы мы сегодня сказали, предыдущего поколения и стал одной из первых счётно-решающих интегрирующих механических машин – своего рода предтечей компьютера.

Алексей Николаевич Крылов по праву считается также основоположником высшего кораблестроительного образования в России. Его вклад в становление высшей инженерно-морской школы, как в дореволюционной России, так и в Советском Союзе является первостепенным.

Алексей Николаевич Крылов стал одним из соорганизаторов Санкт-Петербургского политехнического института имени Петра Великого, открытого в 1902 г. Одним из его отделений стало кораблестроительное, где впервые в России стали готовить инженеров-кораблестроителей. Алексей Николаевич принял самое активное и непосредственное участие в разработке учебных программ отделения, которые сохранялись в неизменном виде долгое время и после 1917 г. А в 1930 г. кораблестроительное отделение Политехнического института, на тот момент называвшегося Индустриальным, было преобразовано в отдельный институт – нашу знаменитую ленинградскую «Корабелку» - уникальную кузницу кадров для кораблестроительной отрасли и не только для неё.

В 1919-1920 гг. Алексей Николаевич Крылов, будучи назначен уже новой государственной властью начальником Военно-Морской академии, явился инициатором и организатором принципиальной перестройки всего учебного процесса в этом главном высшем учебном заведении военно-морского инженерного образования в стране. По его инициативе в академии был открыт тогда новый отдел оружия, обновлены учебные программы и курсы уже существовавших до этого отделений, вскоре переименованных в факультеты.

Собственную богатейшую педагогическую практику А.Н. Крылов, по его собственным словам, считал необходимой и важнейшей составляющей научной работы. В разные периоды до 1917 г. А.Н. Крылов читал курсы лекций по основным разделам теории корабля, им разработанным, а также основным разделам математических методов для инженеров, математической физике и теоретической механике слушателям Морской академии, студентам кораблестроительного отделения Политехнического института, Петербургского института инженеров путей сообщения, Петроградского университета, некоторых частных вузов, существовавших на тот период. Он являлся заслуженным профессором Морской академии и экстраординарным профессором Петербургского института инженеров путей сообщения.

В 1930-е гг., по возвращении из длительной заграничной командировки 1921-1928 гг., А.Н. Крылов сосредоточил свои усилия преимущественно на научно-организационной деятельности, но и в эти годы он прочитал специальные курсы лекций по различным научным направлениям своего авторства для инженеров различных специальностей, провёл ряд публичных лекций общеметодологического характера. А в 1943 г. увидела свет книга академика А.Н. Крылова «Мысли и материалы о преподавании механики в высших технических учебных заведениях СССР», где учёный обобщил свой полувековой опыт преподавания, прежде всего, математики и механики, адаптированных для овладения инженерными специальностями. На этих же страницах он изложил основные принципы обучения инженера в высшей технической школе, к которым отнёс: сочетание ясности и простоты со строгой научностью преподаваемого предмета, адекватное соотношение объёма знаний по преподаваемому предмету с возможностью его будущего применения в практической деятельности, обязательное соблюдение принципа историзма в изложении преподаваемой дисциплины. Главной задачей высшей технической школы великий учёный назвал тогда формирование у будущего инженера способности учиться в последующей собственной практической деятельности – «научить учиться». Нет нужды говорить, что в условиях очередной череды экспериментов в нашей высшей школе сегодня и эти заветы А.Н. Крылова звучат остро актуально.

Мы назвали лишь главные вехи и выдающиеся достижения академика А.Н. Крылова в ведущих областях его деятельности, которые во многом определили развитие этих областей науки и инженерии, прежде всего, кораблестроительной вплоть до нашего времени.

Но ограниченное время доклада не позволяет подробно вспомнить целый ряд других направлений деятельности и сторон личности этой великой личности. А ведь Алексей Николаевич оставил по себе и выдающуюся память как публицист, историк науки и переводчик. Его книга «Мои воспоминания» или «Воспоминания и очерки» (одно из изданий (1949 г.) вышло и под таким названием) выдержала 10 изданий, из них – 4 прижизненных. И представляет собой великолепный образец мемуарной литературы. При этом кажется даже лишним вспоминать, что академик Крылов свободно и всесторонне владел несколькими современными европейскими языками, а также латинским языком. Его перевод фундаментального труда основоположника механики И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» в 1914 г. стал событием в мире не только русской, но и мировой науки. С древней латыни им был сделан также перевод труда выдающегося учёного XVIII в. Л. Эйлера «Новая теория Луны» Перу Алексея Николаевича принадлежат переводы ещё целого ряда классиков мировой науки, таких как Л. Лагранж, К. Гаусс и др.

Алексею Николаевичу Крылову принадлежит и особый вклад в отечественную художественную культуру. Именно благодаря его организаторским и уже дипломатическим способностям был возвращён на Родину в 1920-х гг. в распоряжение Института русской литературы уникальный музей-архив эмигранта А.Ф. Онегина, посвящённый творчеству А.С. Пушкина и имевший огромную культурную и научную ценность.

Научное и творческое наследие академика А.Н.Крылова – это более 500 различных работ в области теории и практики кораблестроения, математики, механики, баллистики, астрономии, физики, истории науки и техники, а также публицистики, собранное в XII-томное собрание сочинений учёного, вышедшее в свет в 1936-1956 гг. Оставленная им библиотека, которую он, страстный библиофил, собирал всю свою жизнь, насчитывает 10 тыс. экземпляров разных видов литературы на русском, ряде европейских и латинском языках. Его заслуги при жизни получили неоднократно высокое международное признание в виде почётного членства в ряде ведущих научно-технических обществ Европы. А на Родине его заслуги были отмечены 9 орденами высшего достоинства в дореволюционный период и 5 высокими советскими наградами, причём 2 раза – высшими: Звездой Героя Социалистического Труда и Орденом Ленина.

И снова и снова приходится задаваться вопросом: как могла сложиться такая личность? Что являлось движущей силой этих почти невозможных с современной точки зрения достижений? Можно ли назвать основополагающие черты гения Крылова, которые оказывали такое влияние на современников и остаются важными сегодня для российского инженерного сообщества и нашего общества в целом?

Несомненно, нельзя не говорить об интеллектуальных традициях семьи, из которой вышел Алексей Николаевич. Родство со знаменитым родом Ляпуновых – представителей передовой русской интеллигенции с материнской стороны и влияние отца – бывшего офицера и вольнодумца не могли не сказаться на формировании основ личности будущего «адмирала корабельной науки». Свою роль сыграло и полученное им военно-морское образование, которое в годы обучения и взросления А. Крылова, как и работа по флоту в целом претерпевало период обновления вследствие поражения России в Крымской войне, следуя тому закону развития российского флота со знаком «минус», о котором мы сказали выше. При этом оно сохраняло лучшие черты российской классической гимназии и университета, которые, в свою очередь, во многом благодаря самому А.Н. Крылову оказались привнесены впоследствии и в советское образование.

Но, говоря об Алексее Николаевиче Крылове, всё равно приходится говорить и о влиянии на его становление неких причин нематериального характера, а также о закономерностях истории России в целом.

Одна из таинственных причин явления людей подобных А.Н. Крылову кроется, возможно, и в неких особенностях русского характера. Его природное состояние, обусловленное и российскими бескрайними просторами, и иными обстоятельствами, всегда предполагало стремление к большим возможностям. Ещё раз вспомним о том, что

Алексей Николаевич родился и вырос здесь, на Волге. Его первые детские впечатления были связаны, как это принято говорить, с «большой водой». И, возможно, неслучайно целый ряд выдающихся деятелей кораблестроения прошлого и современности имеет свои корни также здесь, на волжских просторах или они просто выросли возле той или иной «большой воды» как, например, академик РАН В.М. Пашин или выдающийся конструктор не имеющих и сегодня аналогов подводных кораблей Ю.М.Коновалов, и некоторые другие.

Если же рассуждать об общеисторических закономерностях формирования и явления А.Н. Крылова, нельзя не отметить, что Алексею Николаевичу повезло жить и творить именно в то время, когда его гений оказался максимально востребован: в эпоху кризиса государства и нового государственного строительства, которая всегда неизбежно связана в России с усилением и ростом системообразующей роли кораблестроения.

Поэтому представляется закономерным, хотя сегодня такая позиция непопулярна, что Алексей Николаевич сразу и безоговорочно принял Советскую власть и преданно работал во благо нового государства до последней минуты своей жизни. А ведь такое решение оказалось сопряжено для него и с личной драмой: двое его сыновей погибли на фронтах Гражданской войны, воюя в составе Белой армии. Сам он определял свою позицию по этому вопросу в 1941 г. после получения Сталинской премии I степени так: *«Сейчас (т.е. в советское время при сравнении с дореволюционным) учёный работает на народ; он решает задачи гигантского строительства, он создаёт новую промышленность, новую технику. ...Впервые в нашей стране учёный стал подлинно государственным деятелем...»*. Возможно, кому-то это высказывание великого учёного покажется только проявлением политического подобоострастия, однако та историческая эпоха действительно потребовала активнейшего участия людей науки в обновлении страны, а почти в буквальном смысле слова, трепетное отношение руководителей страны, начиная с В.И. Ленина, к высококвалифицированным специалистам – хорошо известный исторический факт.

При этом свой **государственный патриотизм** при безусловном понимании роли судостроения и военного кораблестроения для национальной безопасности страны А.Н. Крылов проявлял не раз и до 1917 г. Характерна в этом смысле, например, его служебная записка «Об аренде иностранцами русских заводов», поданная товарищу морского министра в 1910 г. конфиденциально. Этот небольшой текст посвящён активно обсуж-

давшимися в то время вопросам, как бы мы сегодня сказали, о привлечении иностранных инвестиций и иностранных фирм к выполнению намеченных отечественных судостроительных программ, а также о предпочтении для их выполнения частных заводов перед государственными или «казёнными», как их принято было тогда называть. В «Записке» генерал-майора А.Н. Крылова в жёсткой ультимативной форме было сказано о неприемлемости таких решений, т.к. первое отдавало «власть и под контроль иностранцев существенную часть государственной обороны», а второе способствовало «возможности существующим синдикатам диктовать свои условия Морскому министерству...», что также связано с вопросами национальной безопасности. Всё сказанное звучит более чем современно сегодня, когда разговор об иностранных инвестициях не только в судостроение стал своего рода экономическим заклинанием, другим таким же заклинанием стали рассуждения различного рода экспертов о государстве как неэффективном собственнике, а заводы отрасли подверглись практически тотальному акционированию, что значит – являются частными.

Вся деятельность А.Н. Крылова свидетельствует о присутствии мышления и собственно личности этого великого учёного и инженера особым свойстве **системности**.

Особым свойством этой системности его личности являлось стратегическое мышление учёного. Целеполагание и планирование на основании накопленного опыта он считал необходимыми для развития любой отрасли науки и производства и, прежде всего, для кораблестроения. *«Использование накопленного опыта, - писал он в 1906 г., - есть главный залог успеха во всяком деле, а в особенности в таком, как военное судостроение. ...недостаток данных даёт себя чувствовать самым коренным образом, как только приступят к обсуждению любого проекта. Главная этому причина – отсутствие единого плана, единой системы и определённо и точно намеченной цели...»*. Сегодня и эти слова нашего великого соотечественника, к сожалению, звучат более чем актуально. Понятие «планирование» в силу социально-политических причин, особенно в 1990-е гг., оказалось вытеснено как из словаря государственного управления, так и из самой его практики не только в сфере кораблестроения. Эволюционный ход развития отрасли оказался во многом нарушен. И сегодня государство оказалось вынуждено и настроено, будем надеяться, всерьёз решать, накопившиеся проблемы, как в области военно-морской составляющей стратегической безопасности России, так и гражданского судостроения.

Говоря о системном характере творчества и всей деятельности А.Н. Крылова, нельзя не вспомнить и ряд других её особенностей, идей, которые Алексей Николаевич настойчиво и успешно проводил в жизнь и которые оказались современны сегодня, например, об экономической целесообразности как необходимой составляющей

организации судостроения. Идея о повышенном внимании к эксплуатационно-экономической стороне технического проекта судна была им озвучена особенно отчётливо во время первой конференции по мелкому судостроению, созданной правлением ВНИТОСС, которое возглавлял А.Н. Крылов, в 1938 г. При этом академик Крылов никогда не путал экономическую целесообразность, привнесённую в технический проект судна или корабля просто с его коммерческой выгодой. И, например, одной из главных причин известной катастрофы века – гибели «Титаника» учёный считал излишнее увлечение заказчика, как бы мы его сегодня назвали, именно последним экономическим обстоятельством. Об этом он популярно и увлекательно рассказано в известной книге «Некоторые случаи гибели и аварий судов».

Более чем современно звучат сегодня также мысли А.Н. Крылова высказанные им ещё в 1916 г. – уже о закономерностях, говоря современным языком, конкурентоспособности отечественного судостроения. На одном из собраний Союза морских инженеров во время дискуссии он своевременно подчеркнул, что вопрос развития отечественной судостроительной промышленности непосредственно связан с мореходством и торговлей, а значит – с общим развитием производительных сил в стране.

И, наконец, здесь же нельзя не сказать ещё об одной важнейшей черте мировоззрения Крылова – учёного, кораблестроителя, инженера, которую, наверное, не совсем точно можно было бы назвать гуманизмом или нравственностью. Посвятив всю свою жизнь созданию собственно флота, прежде всего, военно-морского, Алексей Николаевич никогда не забывал о том, что корабли ведут в поход люди. И для обеспечения боеспособности флота писал учёный в своём очерке «Командировка за границу» важнее всего *«люди и тот флаг, который вы поднимите и за который они должны сражаться. ...Каков флаг, таковы и люди»*.

Идея высокой осмысленности служения своему делу, способность жить, прежде всего, этим делом даже вопреки личным обстоятельствам была присуща самому Алексею Николаевичу Крылову. И эта черта его выдающейся личности служила, несомненно, одной из основ для ещё одной его основополагающей черты, о которой, после всего сказанного, вроде бы говорить уже излишне – **высочайшем профессионализме**, проявленном в любой области, которой он занимался.

Размышления о выдающейся деятельности А.Н. Крылова будут выглядеть незавершённо, если обойти вниманием ещё одну её важнейшую сторону – участие в управлении наукой, производством и образованием. Эта деятельность стала для него одной из ведущих в советский период. Именно в этой области все упомянутые выше «три кита» его многогранного таланта: государственный патриотизм, системность личности и мышления, а также высочайший профессионализм получили своё особое воплощение. Она осуществлялась как в конкретных административных должностях

(начальник Военно-Морской академии в 1919-1920-х гг.) и в виде отдельных временных поручений Советского правительства (уполномоченный в период упомянутой заграничной командировки 1921-1927 гг.), так и при занятии целого ряда руководящих постов в сфере научно-общественной деятельности: во главе комиссий АН СССР, координировавших важнейшие направления научно-промышленного развития страны и перестройки самой Академии, а также её институтов – Физико-математического и Института физики. Но наиболее концентрированно, если так можно сказать, А.Н. Крылов проявил себя в этом смысле на посту председателя президиума правления уже упомянутого нами ВНИТОСС – Всесоюзного научного инженерно-технического общества судоходства и судостроения, правление которого он возглавлял, начиная с 1932 г. и формально вплоть до своей кончины в 1945 г. При этом целом десятилетие А.Н. Крылов (до его болезни в 1942 г. и в связи с эвакуацией и войной) был реальным, как принято сегодня говорить, лидером этой научно-общественной организации, которая под его руководством играла одну из первостепенных и значимых ролей в деле развития кораблестроительных наук, производства и образования у нас в стране и не только их.

Приоритетным направлением деятельности Общества под руководством А.Н. Крылова стала по существу модернизация судостроительной промышленности. Вспомним, что именно на конец 1920-х и 1930-е гг. пришлась реализация новых судостроительных программ СССР. Это были годы создания отечественного гражданского флота и возрождения практически с «нуля» военноморского. И Ленинград, где работало ВНИТОСС, стал главным центром этого возрождения. Уже в первый год работы А.Н. Крылова во главе Общества на предприятиях отрасли было создано более 2-х десятков его ячеек численностью более 1200 человек. Повсеместное и многостороннее укрепление научно-производственных связей, научно-технологическое обеспечение развития судостроения, например, внедрение таких передовых на тот период методов как электросварка корпуса судна или методы скоростной постройки судов и др. на производство стали главным содержанием работы членов Общества на заводах, а также на его собственных мероприятиях в предвоенное десятилетие. В то же самое время получила развитие и идея экономического подхода к строительству судов, о чём уже говорилось. Вопросы оптимальной организации кораблестроительного образования также оставались в поле зрения членов Общества. Но ни на секунду не останавливалась и собственно научная работа.

Непредвзятым историкам – тем, которые не делят историю на «нашу» и «не нашу» - хорошо известна проблема кадрового голода, которые испытывала Советская власть в первые десятилетия своего существования. Тем ценнее и востребованнее являлся опыт специалистов старого и только нарождавшегося нового поколения инженеров, а

также квалифицированных рабочих, объединённых в научно-технические общества по отраслевому принципу. Эти научно-общественные организации играли роль своего рода соорганизаторов индустриализации, т.е. той самой радикальной модернизации народного хозяйства страны. Обозначив, говоря, они представляли собой своего рода общественное «правительство специалистов», о котором так патетично вещала наша пресса в годы «перестройки». И, разумеется, Общество судостроителей – представителей системообразующей отрасли для модернизации экономики, под руководством такого столпа отечественной науки и судостроительной практики, как Алексей Николаевич Крылов, играло среди этих организаций одну из ведущих ролей.

В этом видится особое и непреходящее значение деятельности А.Н. Крылова для истории нашей страны в целом, основой которой всегда являлась промышленная история. Алексея Николаевича Крылова следует назвать одним из основателей **системы** советского судостроения, а также – одним из наиболее выдающихся представителей и родоначальников социально-экономической советской парадигмы **«инженер как управленец»**. Этот подход к формированию всей системы государственного управления, в соответствии с логикой социально-экономического развития государства, руководители страны последовательно осуществляли в советский период и, особенно, в ходе нашей послевоенной истории вплоть до «перестройки».

Следует признать, что задача организации жизнеспособной **системы** взаимодействия учреждений и промышленных производств с фундаментальными и отраслевыми науками, а также государственной нормативной базой, которая **соответствовала национальным интересам страны**, была наиболее успешно решена именно на определённом этапе советской истории. К развитию судостроения и ряда других высокотехнологичных отраслей промышленности СССР особенно в 1960-1980-е гг. эта оценка относится в полной мере. И не вызывает сомнения, что научно-управленческая деятельность А.Н. Крылова, основанная на ряде базовых идей об организации судостроения, высказанных им ещё до 1917 г., составила основу формирования системного характера нашей отрасли, а также не могла не оказать своего влияния на формирование такой же системы в рамках народного хозяйства в целом.

Вспомним и о том, что профессия «инженер» в 1930-е гг., так же как и будущие послевоенные годы стала почти в буквальном смысле слова почётным званием для молодёжи Советского Союза, т.к. была поставлена руководством страны на первое место в числе общественно-политических условий сам А.Н. Крылов, целый ряд выдающихся учёных и специалистов прежней формации, работавших, в т.ч. и под его руководством, оказались в ситуации, если так можно сказать, трансляции системы своих знаний и лучших черт личности на массовую

аудиторию уже советского инженерного корпуса. Так оказались сохранены и творчески переработаны в новых условиях лучшие традиции русского инженерного дела и обеспечена преемственность в развитии ряда естественно-технических наук.

Сам Алексей Николаевич Крылов называл в числе своих учеников таких выдающихся деятелей кораблестроения, как академик Ю.А. Шиманский, профессоров И.Г. Бубнова и П.Ф. Папковича. К «школе» академика А.Н.Крылова специалисты также относят академика В.Л. Позднюнина, профессоров А.И. Балкашина, В.Г. Власова, Г.Е. Павленко, Н.Н.Матусевича и целый ряд других имён, прославивших отечественную науку. Но, исходя из сказанного, к «школе» А.Н. Крылова можно смело отнести и целый ряд представителей управления кораблестроительной отраслью нескольких поколений, как ведущих конструкторов, так и руководителей производств и самой отрасли.

Определяющие черты гения А.Н. Крылова, о которых мы рассуждали в нашем докладе, стали своего рода эталоном личности, следовать которому являлось негласным правилом для этой плеяды кораблестроителей, учёных и руководителей. А философия его подхода к тому, каким быть судостроению и инженерному труду в целом, как должна работать наука для отрасли, определила основные черты стиля их деятельности.

Особого рода государственная ответственность – вот, пожалуй, то действительно главное свойство личности, которое роднит эти поколения руководителей судостроения, да и многих других отраслей промышленности с нашим великим предшественником. Зная цену этой ответственности, эти руководители никогда не боялись брать её на себя. Системность мышления как отличительное свойство талантливого российского управленца и специалиста, которое до сих пор признаётся за рубежом отечественным «ноу-хау», не позволяло этим руководителям отделять судьбы той или иной отрасли от хода развития всей страны, как бы сложно не складывались порой их отношения с государством. И заставляло отстаивать стратегически верные решения порой в нелёгком противостоянии с его представителями, спасая и само государство. И, наконец, способность жить работой – та действительно уникально русская черта характера, которая не раз позволяла решать, казалось бы, нерешаемые задачи, была в полной мере присуща как самим этим руководителям, так и ведомым ими коллективам судостроителей или представителей других отраслей промышленности.

Можно смело утверждать: в составе тех руководителей, о которых здесь идёт речь, случайных людей практически не было. И, прежде всего, снова **система** советского кораблестроительного образования, в формировании которой Алексей Николаевич Крылов принял самое активное участие, уровень квалификации, ею задаваемый, задавали практически на век вперёд тот высокий эталон универсального профессионализма российских судостроителей, и, в первую очередь, руко-

водителей отрасли, который по праву остается нашей уникальной особенностью и сегодня.

В условиях активного развития военно-технического сотрудничества в последние годы и общения с зарубежными специалистами эта особенность наших, к примеру, директоров не раз обнаруживала себя. Знание широкого спектра научно-технических проблем судостроения, ключевых моментов технологии организации нашего производства, и в то же самое время самих технологий не раз удивляли многих зарубежных партнеров. Но ведь практически все наши директора прежде были главными инженерами производств. И такие инженеры, ряд из которых стали академиками, – это действительно сугубо российский феномен, который и сегодня обеспечивает общую организацию российского судостроения на уровне мировых требований.

Именно эта плеяда руководителей формировала уже государственное «правительство специалистов», лозунг о котором, как мы заметили выше, был столь популярен в годы «перестройки». Но, по крайней мере, в последние советские десятилетия оно и было таким. Ни в министерское кресло, ни в ЦК: отдел промышленности или любой другой не попадал человек, не прошедший до этого школу на одной из руководящих должностей на предприятии в отрасли. Так реализовывалась на практике парадигма «инженер как управленец», что позволило, и никто не сможет сегодня с этим поспорить, вывести в XX в. нашу страну в разряд мировых держав.

Этот же стандарт личности и управленческой деятельности руководителей нашего производства, которым мы во многом обязаны выдающейся деятельностью А.Н. Крылова, ещё раз доказал свою эффективность в 1990-е гг. – период очередного социально-экономического перелома в России. Многие из руководителей, кого в те годы публично и в прессе именовали «красными директорами» и обвиняли в зарегулированности правилами командной экономики, стойко и успешно прошли через кризисный период и сегодня ведут свои коллективы или, как принято говорить теперь, фирмы к новым рубежам достижений.

В этот же период доказал свою прогностическую ценность и ряд принципов управления научно-производственной деятельностью, провозглашённые А.Н. Крыловым ещё в 1930-е гг. Так, например, соединение в единое, системное целое техники, технологий, организации и экономики судостроительного производства вывело за короткий период времени целый ряд предприятий судостроительной отрасли на должный уровень конкурентоспособности в соответствии с мировыми требованиями.

Сегодня принято говорить об управлении как факторе первостепенной важности для любой успешно работающей экономической системы. Впрочем, сам Алексей Николаевич и поколения его последователей, о которых мы сегодня говорим, никогда не подходили к развитию своих отраслей знаний и производства, а также всей стра-

ны односторонне и утилитарно. Поэтому мировоззренческий вопрос о роли личности в истории, о том, кто возглавит ту или иную область знаний или производства, и сегодня не теряет своей актуальности, если мы говорим об истории высокотехнологичного развития России. И эта история продолжается сегодня.

Ученик должен превзойти учителя – таково правило жизнеспособности любого общества. Сегодня поколение учёных и управленцев, воспитанных в традиции «школы Крылова», постепенно оставляет свои посты. Имена Б.Е. Бутомы, И.С. Белоусова, Ю.Г. Дервянко, М.В. Егорова, В.Г. Карзова, А.М. Редькина, Л.А. Резунова, П.А. Черноверхского, В.А. Чмыря, В.Н. Дубровского, А.В. Иванова, Б.Е. Клоптова, В.С. Харитонова, В.Ф. Бабанина, М.К. Глозмана, В.М. Мудрова, Н.А. Федорова, В.В. Войтецкого, В.И. Неганова, П.П. Пустынцева, В.Н. Пялова, Н.П. Сытова, А.А. Шушера, Е.И. Юхнина, В.Е. Юхнина, Ю.Ф. Ярова, С.М. Бавилина, Ю.М. Коновалова, Ю.Н. Кормилицина, Е.С. Корсукова, Д.Г. Соколова, И.В. Горьнина, Н.Н. Исанина, В.М. Пашина, В.Г. Пешехонова, С.Н. Ковалева, И.Д. Спасского, и многих других наших выдающихся судостроителей, как ушедших, так и работающих сегодня, со-

ставляют «золотой фонд» истории судостроения и промышленности России второй половины XX в. и начала века XXI-го. Каждый из них, безусловно, может быть назван, в той или иной степени последователем Алексея Николаевича Крылова.

Но сегодня подход к формированию управления экономикой и страной изменён. При этом парадигма «экономист как управленец» не раз демонстрировала за последние годы свою спорность для реальной эффективности развития науки и производства. Станет ли новое поколение российских кораблестроителей и управленцев восприимчиво к системному наследию своего великого предшественника, покажет время. Хочется верить, что стремление к национальной гордости с необходимостью приведёт к такому решению. А время – к появлению новых имён в науке и инженерном деле подобных Крылову. И тогда российские судостроители, инженеры и учёные других высокотехнологичных отраслей индустрии новой России, опираясь на отечественный опыт великих достижений и передового развития, обеспечат научно-промышленный прогресс не только родных отраслей, но и всей страны, самостоятельность и независимость России, её могущество и процветание в числе ведущих мировых держав.

**А.Н. КРЫЛОВ, Н.Е. ЖУКОВСКИЙ, С.А. ЧАПЛЫГИН –
ТРИ ТИТТАНА, ЗАЛОЖИВШИЕ ФУНДАМЕНТ
ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ КОРАБЛЯ**

Кишкина Н.Ю.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

Москва, Мичуринский пр., д. 1
nemirovata@mail.ru

Алексей Николаевич Крылов - известный ученый, академик (1916 г.), Герой социалистического труда (1943 г.), кораблестроитель, механик и математик родился в деревне Висяги (ныне Крылово, Порецкого района Чувашской республики 3/15 августа 1863 года.

Многогранной была его научная деятельность – выдающейся математик, механик, физик, астроном, историк науки, переводчик с латинского языка знаменитых «Начал» Ньютона, автор превосходных воспоминаний. Мировую известность А.Н. Крылову принесли научные труды по военно-морским наукам, ставшие делом всей его жизни.

Сохранилась обширная переписка А.Н. Крылова с Н.Е. Жуковским и С.А. Чаплыгиным, хранящаяся в Архиве РАН.

Нам особенно ценны воспоминания А.Н. Крылова о многолетних плодотворных научных связях с Н.Е. Жуковским и С.А. Чаплыгиным.

С.А. Чаплыгин рассказывает о встречах с А.Н. Крыловым у Н.Е. Жуковского.

«Я лично давно знаю А.Н. Крылова. Более 30 лет тому назад я имел удовольствие встретиться с ним у незабвенного учителя моего, покойного Н.Е. Жуковского. А.Н. сразу обращал на себя внимание своей широкой эрудицией, своим живым умом и проницательностью в научных вопросах. Каким он был тогда, таким остался и поныне: переступив в свои 70 лет, он так же бодр, его научный кругозор стал, конечно, еще шире, все так же свеж его творческий талант и так же блестящи его остроумие и проницательность».

А.Н. Крылов вспоминает – «Я знаком с Н.Е. Жуковским с декабря 1889 года с открытия VIII съезда естествоиспытателей и врачей, где Н.Е. Жуковский сделал доклад «Видоизменение метода Кирхгофа». В 1894 или 1895 г. Н.Е. Жуковский познакомил меня - слушателя Технического общества военно-морского отдела с опытами Отто Лилиентала и в 1896 г. дал поручение при визите в Берлин привезти от О. Лилиентала фотографии его полетов, чертежи планеров и др. (О. Лилиенталь погиб в 1916 г.). С 1900 по 1908 г. Н.Е. Жуковский несколько раз посетил Опытный бассейн в С.-Петербурге и интересовался испытаниями моделей и особенно самих судов».

Н.Е. Жуковский писал А.Н. Крылову: «Я думаю на несколько дней приехать в Петербург и посмотреть на приспособления для качки моделей в Опытном бассейне».

А.Н. Крылов вспоминает, что он содействовал Н.Е. Жуковскому в пожертвовании купцом В.В. Захаровым 2500 рублей на оборудование большой аэродинамической трубы и собрание «кадров талантливой и ревностно преданной делу молодежи, которая составила затем ядро работников ЦАГИ».

А.Н. Крылов указывал, что многие работы Н.Е. Жуковского имели непосредственно практическое значение, но Н.Е. Жуковский не патентовал работы, представляя свои открытия в общее пользование, приумножая блага для человечества.

Из переписки А.Н. Крылова с Н.Е. Жуковским.

В письме от 1 августа 1908 г. Н.Е. Жуковский сообщает А.Н. Крылову, что давно получил интересную статью А.Н. Крылова о качке судов и заинтересовался этой задачей.

«На предполагаемом съезде естествоиспытателей и врачей в Москве, на который надеемся, и Вы приедете, я сообщу свои результаты».

5 мая 1911 г. Н.Е. Жуковский сообщает А.Н. Крылову «что 2500 рублей, присланные Вами получил, внес по 1250 рублей Московскому университету и Московскому техническому училищу на нужды аэродинамических лабораторий. Это позволит оборудовать интересные установки».

Сотрудничество в области аэродинамики продолжалось и в последующие годы, так в 1916 г. Н.Е. Жуковский благодарит А.Н. Крылова за содействие в приобретении мотора для аэродинамической трубы МТУ.

В ноябре 1915 г. Н.Е. Жуковский в письме к А.Н. Крылову благодарит его за присылку перевода «Начал Ньютона». «Вы дополнили этим пробел в русской математической литературе, который так необходимо было пополнить. На своих лекциях я теперь буду постоянно делать указания на Ваш перевод».

В 1917 г. Н.Е. Жуковский сообщает А.Н. Крылову «о вариационном винте как результате созданной Н.Е. Жуковским вихревой теории гребного винта. Вам он будет, вероятно, полезен для морских судов».

В докладе к 40-летию научной деятельности Н.Е. Жуковского А.Н. Крылов отмечает: «В продолжение 40-летия Вашей деятельности Вы обогатили все отделы теоретической механики Вашими исследованиями, особенно важны ваши труды по гидродинамике, касаясь морских вопросов – выгодной форме обводов судов, теории судовых двигателей, качании кораблей. Вы делились не только с представителями чистой науки, но и с практическими деятелями. Ваши исследования применяются при расчетах летательных аппаратов и для военноморского дела, в частности, изложение теории жирокопов».

С 1921 г. По 1927 г. А.Н. Крылов был командирован АН СССР в западно-европейские страны представителем Советского правительства в разные международные комиссии, о чем свидетельствует документ – удостоверение на жительство, выданное «военному моряку Крылову».

Цель командировки – возобновление научных связей с зарубежными учеными и научными учреждениями. Академик А.Ф. Иоффе, командированный за границу одновременно с А.Н. Крыловым писал: «А.Н. Крылов был на голову выше всех остальных участников ... он знал каждый тип корабля и все его мореходные свойства, он предвидел все, что может дать каждый корабль. ... Такого глубокого знатока, таких способностей я в жизни еще не встречал и не поверил бы, что это возможно». Знание многих иностранных языков позволило А.Н. Крылову успешно решать разносторонние проблемы - общие математические основания для проектирования приборов управления огнем зенитной, противозенитной артиллерии, а также подготовить записку по руководству изучения опыта войны.

В 1933-1935 г. вышло Полное собрание трудов С.А. Чаплыгина в издании АН СССР, I-II-III тома под редакцией А.Н. Крылова.

А.Н. Крылов представляет детальный анализ каждого тома. В предисловии А.Н. Крылов отметил «труды С.А. Чаплыгина охватывают многие области механики и прикладной математики: по определенности и важности поставленных вопросов, изяществу и общности новых методов, примененных для их решения, отчетливой законченности результатов, труды являются классическими и составляют украшение русской математической литературы».

А.Н. Крылов также отмечает, что Общетеоретическая группа ЦАГИ, которую возглавляет С.А. Чаплыгин, является подлинным центром развития советской механики. Теоретическая деятельность ЦАГИ выражена почти в каждой из Ваших работ. Они составляют целую библиотеку по аэродинамике и авиации. С.А. Чаплыгин по своему таланту как математик своими работами давал решение труднейших, но самой жизнью поставленных задач авиации.

А.Н. Крылов при редактировании полного собрания сочинений С.А. Чаплыгина отмечал, что С.А. Чаплыгин в области аэродинамики и гидродинамики - прямой наследник Н.Е. Жуковского «работы Чаплыгина и Жуковского приобрели всемир-

ную известность, и хотя их связывают с именем Кутта, по почину самого Жуковского, о них не замалчивают, да и трудно замолчать, когда можно сказать, что все 191000 аэропланов, действовавших по свидетельству статс-секретаря американского воздушного флота в мировую войну, летали на крыльях, форма, профиль и расчет которых были даны Чаплыгиным». Здесь отвлеченная наука (да казалось бы) в отвлеченнейшей своей части – теории функций мнимого переменного – вплотную подошла к технике.

А.Н. Крылов отмечает, что построили гигантские пароходы с турбинами и везде подшипники Митчеля, но ни С.А. Чаплыгин и Н.Е. Жуковский в 1904 г. давая решение «любопытной гидродинамической задачи, и не помышляли о том какое громадное практическое значение может получить их чисто математическое исследование. Это есть один из бесчисленных примеров, показывающих, насколько необходимо должно единение отвлеченной науки и практической техники».

А.Н. Крылов о С.А. Чаплыгине.

«Все работы С.А. Чаплыгина можно считать классическими – по ним можно и нужно учиться ... Мировым авторитетом является С.А. Чаплыгин». Сохранилась записка А.Н. Крылова 1928 г. о выдвижении С.А. Чаплыгина в действительные члены Отделения технических наук АН СССР, впервые организованное (в 1928 г.), где читаем – 1 кандидатуру С.А. Чаплыгина, признавая его выдающиеся достоинства как математика, но вместе с тем и творца и руководителя в области техники, обсудить в комиссии наук технических. Далее следует анализ ученых трудов С.А. Чаплыгина (33 названия за 1894-1924), характеризуемые «краткостью и ясностью изложения, всегда вносящие что-либо существенное новое в науку».

21-22 мая 1936 г. В ЦАГИ на конференции по волновому сопротивлению встречаются в составе Оргкомитета А.Н. Крылов, С.А. Чаплыгин, А.И. Некрасов, М.В. Келдыш, Л.И. Седов.

Тематика конференции – теоретическая гидродинамика, гидроавиация и судостроение. А.Н. Крылов отметил, что доклады М.В. Келдыша и Л.И. Седова, молодых сотрудников ЦАГИ, по теории волнового сопротивления «значительно опережают уровень мировой науки того времени».

Позже, в 1953 г. М.В. Келдыш, представляя Л.И. Седова в действительные члены АН СССР, отметил «после кончины А.Н. Крылова, Л.И. Седов является бесспорно наиболее крупным ученым нашей страны в области гидродинамики тяжелой жидкости и теории судостроения».

А.Н. Крылов много внимания уделял преподавательской деятельности и организации учебного процесса.

Касаясь преподавательской деятельности С.А. Чаплыгина, А.Н. Крылов отметил стиль его преподавания, как идеал. Он писал Чаплыгину «Вы сами читали многие курсы механики, являя примеры того, каков должен быть курс механики или любого математического предмета в высшем учебном заведении или университете. Этот курс должен со-

единять краткость, вразумительность и полноту изложения предмета, без загромождения излишними деталями. Изложение должно быть строгое, но оно не должно утомлять своею чисто философской глубиной. Н.Е. Жуковский сумел дать непревзойденные образцы такого изложения. Вы сумели следовать по стопам своего незабвенного учителя».

С.А. Чаплыгин в юбилейной речи к 70-летию А.Н. Крылова отмечает, что «центральное место в исследованиях А.Н. Крылова занимают его работы по теории корабля, завоевавшие ему мировую известность, а так же А.Н. Крылов создал возможность строго математического учета необходимых условий прочности при проектировании корабля и проектирование было поставлено на твердую базу...».

«Лекции А.Н. Крылова о приближенных вычислениях показывают применимые практические приемы и способы вычисления. Изучившие эту книгу А.Н. Крылова, может вполне овладеть изложенными в ней приемами». Академик А.П. Капица о выступлениях С.А. Чаплыгина заметил, что «никому в последствии не удалось так емко и кратко охарактеризовать все области деятельности А.Н. Крылова».

Свою преподавательскую деятельность А.Н. Крылов начал 1900 г. в Морской академии с чтения курса дифференциального и интегрального исчисления. Эти лекции тогда же были литографированы и в последствии составили два фундаментальных тома. Как отмечает С.А. Чаплыгин «лекции на которых учились несколько поколений математиков, физиков и инженеров. Среди слушателей были будущие ученые – Н.М. Крылов – академик АН Украины и С.П. Тимошенко – ученый с мировой известностью».

С 1912 г. А.Н. Крылов читал курс по дифференциальным уравнениям математической физики (издание 1913 г., переиздание 1933 г.) По поводу той книги С.А. Чаплыгин писал: «Я не знаю руководства, лучше освещающего разнообразнейшие приемы интегрирования уравнений, иллюстрированных приемами, взятыми из работ других ученых и из статей самого Крылова».

В начале 900-х годов А.Н. Крылов в связи с развитием в России гражданского судостроения составил доклад о необходимости и порядке подготовки корабельных инженеров. Эта инициатива А.Н. Крылова способствовала открытию в Петербурге Политехнического Института с кораблестроительным отделением, преобразованным позже в Кораблестроительный Институт.

Накануне войны – 14 июня 1941 г. А.Н. Крылов выступил с докладом на заседании Президиума АН СССР о подготовке специалистов: «Прежде чем приступить к предмету моего сообщения, я сделаю небольшое введение, относящееся к применению математики для решения практических вопросов». Никакая школа не может дать готового инженера, руководителя цеха или самостоятельного конструктора, но она обязана дать основные познания, основные принципы, некоторые основные навыки и кроме знания, еще и умение прилагать знания к делу... и тогда он не впадет в рутину и ... станет инженером - руководителем производства или истинным конструктором – новатором в своем деле».

Этот вопрос АН СССР посчитала: «Имеющим общее значение и заслуживающим особого внимания».

5 сентября 1944 г. в период Великой Отечественной войны А.Н. Крылову – члену Британского общества инженеров кораблестроителей был поднесен диплом на звание почетного члена Английского общества корабельных архитекторов «За влияния его идей на развитие мировой техники».

В ответном слове А.Н. Крылов сказал: «48 лет тому назад, в возрасте 33 лет, я был избран членом этого знаменитого общества. 48 лет – малый промежуток времени в жизни государства, но это большой промежуток жизни человека и еще гораздо больше в развитии науки и техники. Британское общество инженеров кораблестроителей имело полезное влияние на проектирование Британского флота, послужившего образцами для других мировых флотов».

Мы с полной уверенностью чувствуем, что окончательная победа – уничтожение царства дикости и тирании Гитлера будет за нами».

PROSPECTS OF APPLYING OF NON-TRADITIONAL PROPELLERS ON THE SHIPS OF VARIOUS TYPES

Leonid I. Vishnevsky¹, Anatolij-Branko R. Togunjac²

¹Krylov State Scientific Centre

²Research and Design Institute for Fishing Fleet, GIPRORYBFLOT

¹Moskovskoe shosse 44, St. Petersburg, 196158 Russia

²M. Morskya str., 3, 18-20, St. Petersburg, 190000 Russia
togunjac@grf.spb.ru, vishli@yandex.ru

Abstract

It is noted constructional features of VPP. It is illustrated the principle of its operation. It is given information about advantages of VPP over fixed pitch propeller (FPP) and information about their design. On the base of research results obtained by authors it is demonstrated advantages of using of VPP on the tug and on the hydrofoil.

The special feature of VPP consists in movable blade connection in the hub and contrary to FPP the VPP's blades are in the working place on the hub at the expense of actions of hydrodynamics, inertia (in general case of elastic) moments relatively to any axes in the hub. Changing the balance of these moments in right direction causes the displacements of blades on the hub and as a result changing hydrodynamics characteristics of VPP in such way that it allows to use effectively the full main engine power in intermediate regimes ensuring its operation at these modes optimally, for instance, from point of view of minimization of specific fuel consumption.

The same results can be obtained by the using of much more expensive and complicated propeller construction – control pitch propeller (CPP) but for the moving of its blades it is necessary to have force hydraulic driven, which is also expensive and complicated device requiring special servicing during its operation. Besides that the replacing of FPP for CPP in ships is connected with considerable expenditure and with taking heavy work with shaft line. Moreover the availability of hydraulic driven blades is always connected with environmental threat due to the oil leakage in medium. Analysis obtained in a due time had shown that VPP is approximately in 1.5 times more expensive than FPP. This analysis was done more than thirty years ago and related to the level prices of that period.

Nowadays it has been offered several constructions of such propellers [1]. However the practical implementation for the full-scale marine objects was realized in the scheme with moving blades in propeller disc (see fig. 1). By that time it had already been created three full-scale propellers of such scheme for the different purpose ships and they had been successfully tested. Let's explain the principle of operation of propeller of this type.

As it has been above-mentioned the blade places of such propeller at the high speed of rotation are defined by action of hydrodynamics, centrifugal restored moments and in general cases by elastic ones relatively to point A in propeller disc. Research results have

shown that relative displacement of blade in direction to opposite its rotation together with propeller corresponds increasing the moments due to centrifugal force M1 and decreasing of moments due to hydrodynamic forces M2.

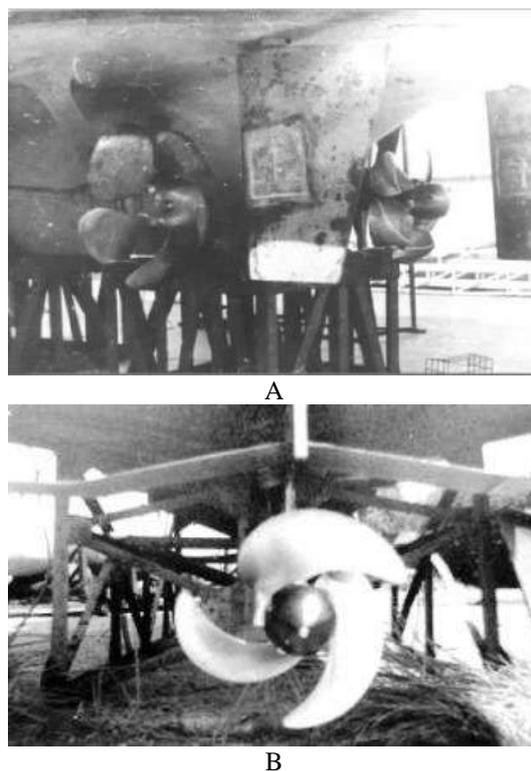


Figure 1 - Mine sweeper (A) and hydrofoil (B) are equipped with VPP

When deflection of blade is opposite the picture is reversed. So at the VPP operation in flow the position of blades is defined by equality of actions of opposite moments. The elastic moments are out of consideration in this case. At this case the hydrodynamics characteristics are changed (fig. 3) as far as mentioned displacements (relatively to point A not coincided with propeller axe) lead to changing of geometrical propeller characteristics. This very important VPP quality

allows in some cases to use them instead of CPP, automatically providing the most optimum load of the main engine in intermediate operation mode and correlation of the engine operation with propeller in services without force driven only at expense of the hydrodynamics, inertia and in general cases elastic forces.

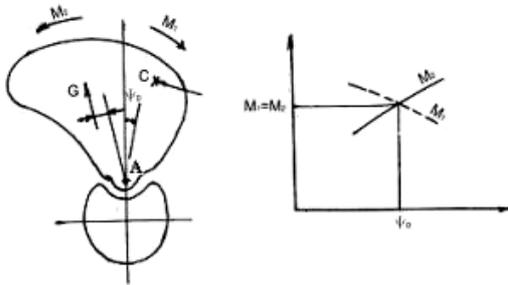


Figure 2 - Scheme, explaining VPP' operation

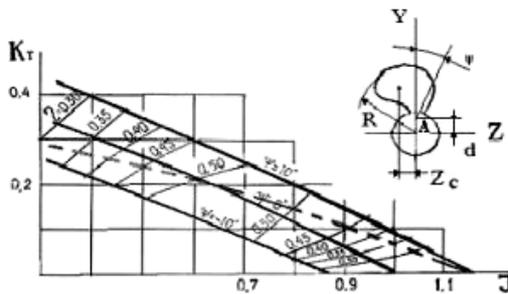


Figure 3 - Hydrodynamics characteristics of VPP at fixed blades on the hub ($\psi = 10^\circ, 0, -10^\circ$). Dashed line corresponds to "free" blades on the hub.

Specific constructional connection of blades resulting in moveable them on the hub makes us to take into consideration some additional requirements at their designing. The full containment of them is placed in [1] and is a result of analysis of equations describing the moving of VPP blades on the hub in relative displacements. We need to note, in particularity, that from this analysis it was obtained analytical expression, which had to be taken into account at the designing of VPP. For the case of propeller with blades moving in propeller disc it looks like:

$$\bar{Z}_C = \frac{8K_{AQ}\rho}{\pi^2 dV\rho_M} \quad (1)$$

$$\bar{Z}_C = Z_C/R; \bar{d} = d/R; \bar{V} = V/R^3$$

where \bar{Z}_C - relative coordinate center of gravity, distance between axe of blade rotation A on the hub and axe of propeller and relative volume of blade with butt end; R - VPP radius; ρ and ρ_M - water density and density of blade material; K_{AQ} - hydrodynamics moment coefficient relative to axe A (see. Fig. 3).

The correct choice, in particular, listed above-mentioned parameters allow to realize one of general advantages of VPP over FPP. It consist of the fact that its hydrodynamics characteristics may be optimum ones for some modes of ship moving. Actually FPP designed as optimally propeller for the full ahead speed in calm water at normal displacement of ship (curve 1

in fig. 4), does not allow to realize reserves in improving its propulsion in intermediate mode of running, in particular, at mode which corresponds to economical velocity.

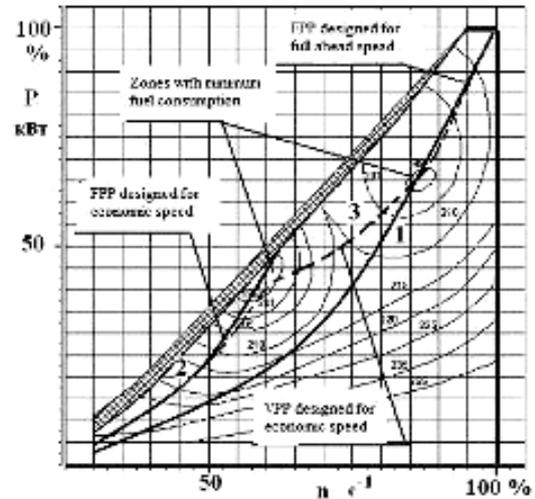


Figure 4 - Characteristics of diesel of ship

There are two reasons of that. First FPP designed above mentioned manner for intermediate economical velocity may change its mode of operation, for instant, at non quadratic dependence on velocity law of ship resistance or because of additional resistance arising, for example, with rolling and by so doing deflect from optimally mode which corresponds to full ahead speed, which is used for designing. At the same time the designed FPP for the intermediate (economical) velocity (curve 2 in fig. 4) may not provide effective consumption of full power because of this is no correlation of propeller to the main engine of ship and as result the maximum ship velocity will decrease. Second, the propeller characteristic corresponding to optimum propeller designed for full ahead velocity is close to cubic parable and in many cases it does not allow realize main engine minimum consumption of fuel. Along with this preliminary valuations and analyze show that deleting these reasons off in some cases allows to provide considerable saving of fuel (up to 5%) in intermediate modes including economical velocity of ship. Analyze is also showing the possibility of obtaining of this savings particularly by taking into account using of VPP (curve 3 in fig. 4). Its specific feature as it has been mentioned before is automatic control of moving blades in depending on mode of operation of propeller only due to action hydrodynamic, inertia and elastic forces (without force driven) on blades. It may open perspective of developing of propellers, which are in excess of efficiency of FPP in intermediate modes of operation. In its turn these modes in many cases are mostly used during in process of ship services. To above said it should be added that improvement in efficiency of developing power even in part of percent assists in increasing energy design index and may be the main factor for obtaining order of building the ship from the future ship-owner [3].

Along with this above-mentioned requirements made more complication of the process of VPP design.

This complication consists in the taking into account some another requirements besides (1). It is necessary to take under consideration as mass characteristics of blades themselves as mass characteristics of butt end of blades. As a rule these characteristics are unknown at the beginning of design and in its turn they considerably influence on blade geometric. This complication leads to situation when development of VPP is needed to be done in a par with constructional works using step by step method based on approximate stages. In fig. 5 there is approximate scheme of such methodology. To be said it should be added that design calculation is kept with lifting surface theory. As to hydrodynamics calculation it should be conducted with applying of modern programs based on RANS methods.

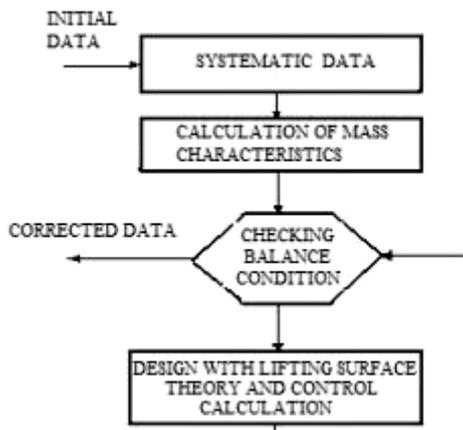


Figure 5 - Scheme of VPP designing

This methodology was used for developing all VPP for the ships and marine objects of different services. Some of full-scale results of them are partially contained in [1, 2]. Analysis of these results and experience of the VPP developing have shown that their applying is useful on all types of ships. It is explained by fact that during service ship its resistance is constantly changing by virtue of influence on her different factors: becoming overgrown hull, rough sea, wind and other reasons. In its turn it causes the deflection of mode of propeller operation from design value and as result of decreasing of it's efficiency as long as to provide optimum of VPP operation is possible only for the designing mode in tested conditions. In other cases its operation strictly to say can't be considered as most effective if to tell about engine loading and keeping it at design mode together.

Along with this the maximum efficiency with using of VPP may be gained in the case when there is considerable deflection of propeller operation mode from design one. The obtained valuations of different type of ship propulsion have supported to be said above.

Fig. 6 illustrates calculation results of power consumption P of main engine of ship and her pulling characteristics T_e at the mooring mode versus of the output rotation frequency of this engine.

This ship is a tug of cabotage sailing and equipped with FPP designed for full ahead speed with about 12 knots. From these results it is seen that at

small velocities the main engine of a ship is able to develop only approximately 1300 kWt without overloading and to develop pulling at the stopping regime about 150 kN.

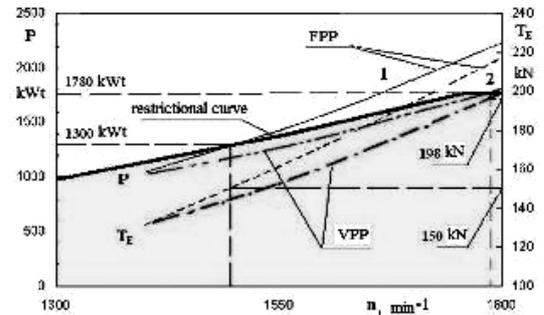
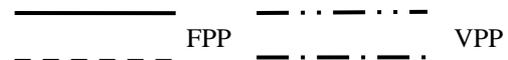


Figure 6 - Power and pulling characteristics of ship at mooring mode

Notes are related to:



This result is connected with fact that FPP is designed for full ahead speed (about 12 knots) at close stopping velocity ($V \sim 0$) is hydro dynamically heavy one (curves 1 in fig. 6). As matter of valuation the using VPP instead of FPP allows (due to automatic shifts of blades) hydro dynamically unload propeller, to increase its rotation and to use, in so doing, full power of main engine (curve 2 in fig. 6). In its turn the using of full power at small velocity of moving (about 2 knots) leads to the increasing of pulling characteristics (compare curves T_e corresponding to VPP and FPP in fig. 7) and to the improving its ice propulsion which is about 10 % higher.

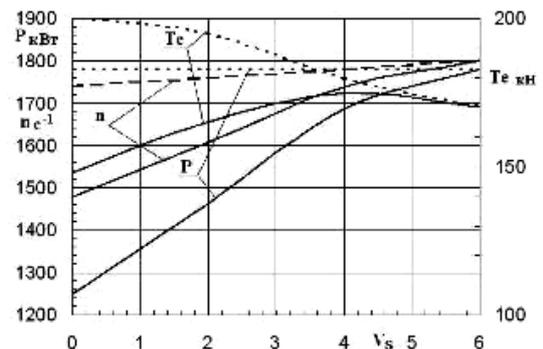


Figure 7 - Dependence of rotation output shaft line of engine n , power P and pulling of propeller T_e

Notes are related to:



Another example is shown in fig. 8 and is related to hydrofoil. As known process of coming hydrofoil up on wing is accompanied with increasing of the resistance of moving and as a result it leads to considerable deflection of mode propeller operation from design value corresponding to full ahead ship. This deflection in the case of FPP may does not provide necessity re-

serve of pulling in mentioned process (curve 1 in fig. 8). In the case of designing propeller for overcoming of “hump” resistance leads to decreasing of full velocity (curve 2 in fig. 8). At the same time VPP due to shifting of its blades on the hub allows to provide the maximum velocity of hydrofoil (the same one as with FPP) and successful overcome the “hump” resistance with necessity reserve of power as well (curve 3 in fig. 8).

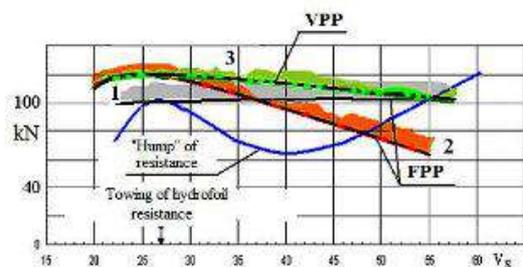


Figure 8 - Pulling characteristics of hydrofoil, equipped with different propellers

Notes are related to:

- FPP, designed to get maximum velocity
- - - - - FPP, designed to get required reserve overcoming “hump” of resistance
- . . . - . . . VPP

Nowadays evaluating of the developing of VPP for different service ships with results of full scale tests it is necessary to note that the accumulated experience of creation of such propeller should be extended in direction of developing and improving of methodology of their design and in the direction of developing them to applying for the ships sailing in different service conditions as well. Mentioned note is one of the directions in building of effective ships in the conditions of normalizing them with energy efficiency according to introducing modern IMO rules.

References

1. Вишнеvский Л.И., Тогунац А.Р. Корабельные лопастные движители: Новые технические решения, результаты исследований. Монография.- СПб.:Судостроение, 2011. (Тогунац Анатолий-Branko R., Vishnevsky Leonid I. Ship Blade Propulsors. New Technical Solutions, Results of Investigations. Monograph. SPb. :Sudostroenie, 2011).
2. Vishnevskiy L.I., Mavludov M.A., Sizov I.I. and others. Результаты натурных испытаний винтов с подвижным креплением лопастей на ступице. Transactions of KSRI №14(298), SPb, 2003.
Pustoshnyi A.V. Energy efficiency design index – новая реальность от ИМО. Journal Судостроение №1, 2012.

UNSTEADY THREE-DIMENSIONAL SOURCES IN DEEP WATER WITH AN ELASTIC COVER AND THEIR APPLICATIONS

Izolda V. Sturova

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

Pr. Lavrentyeva 15, 630090, Novosibirsk, Russia

ABSTRACT

The velocity potential of a transient source of arbitrary strength and in arbitrary three-dimensional motion is derived. The initially quiescent fluid of infinite depth is assumed to be inviscid, incompressible and homogeneous. Upper surface is covered by a thin layer of elastic material of uniform density with the lateral stress. The linearized initial boundary-value problem is formulated within the framework of potential flow and the Laplace transform technique is employed to obtain the solution. As a sample application, the potential of a time-harmonic source with forward speed is obtained from the transient source. The principal physical features of the wave motion for large time in far field are determined by using the method of stationary phase. The problems of radiation (surge, sway and heave) of the flexural-gravity waves by a submerged sphere advancing at constant forward speed are investigated. Method of multipole expansions is used. Numerical results are obtained for the hydrodynamic load: wave-making resistance and lift, added mass and damping coefficients.

Introduction

It is well known that knowledge of the velocity potential due to fundamental singularities submerged in water with free surface permits the investigation of water wave generation by the body which is either partially immersed or completely submerged in water assuming linear theory [1]. In the same way it is possible to determine the wave motion in more complicated case when the upper boundary of the fluid presents an elastic cover. Wave motion due to fundamental line and point singularities with time-dependent strength submerged in water with an elastic cover and an inertial surface was investigated previously [2-5]. Basically, two kinds of unsteadiness were considered: instantaneous or time-harmonic singularities.

In this paper, the velocity potential of a transient source of arbitrary strength and in arbitrary three-dimensional motion is derived, wherein a thin elastic plate of infinite extent is assumed to cover the surface of water. This potential is fundamental to the analysis of various types of body motion under the influence of waves.

Mathematical Formulation

Consider a fixed, rectangular coordinate system $O-xyz$ where (xy) -plane coincides with the undisturbed upper surface of water, and the positive z -axis points upwards. The initially quiescent fluid of infinite depth is assumed to be inviscid, incompressible and homogeneous. Upper surface is covered by a thin layer of elastic material of uniform density with the lateral stress. The motion in the fluid is generated due to a point mass-source of time-dependent strength which starts operating at time $t=0$. The linearized initial-boundary-value problem is formulated within the framework of potential flow.

Position of a source and its strength at time $t \geq 0$ are given by $\vec{\xi}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ and $\mu(t)$, where $\zeta(t) < 0$ and $\mu(t) = 0$ at $t < 0$.

The motion in the fluid can be described by a velocity potential $\Phi(\vec{x}, t)$ ($t > 0$). In the linear theory, Φ satisfies in the fluid domain

$$\Delta\Phi = \mu(t)\delta(\vec{x} - \vec{\xi}(t)), \quad (1)$$

where Δ denotes the three-dimensional Laplace operator, δ is the Dirac delta-function.

If $w(x, y, t)$ denotes the small vertical displacement of the upper surface below its equilibrium position, then the linearized kinematic and dynamic conditions at the upper surface ($z=0$) are given by

$$\begin{aligned} \partial w / \partial t &= \partial\Phi / \partial z, \\ D\Delta_2^2 w + Q\Delta_2 w + M\partial^2 w / \partial t^2 + \\ &+ \rho\partial\Phi / \partial t + g\rho w = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$D = Eh_1^3 / [12(1-\nu^2)], \quad M = \rho_1 h_1,$$

$$\Delta_2 \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2; \quad \rho$$

is the density of the fluid; g is the acceleration of gravity; E, ν, ρ_1, h_1 are the Young's modulus, the Poisson's ratio, the density and the thickness of the plate, respectively. Moreover, since the disturbance must vanish at infinity, it is required that

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \nabla\Phi = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \nabla\Phi = 0 \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

where $R^2 = (x - \xi(t))^2 + (y - \eta(t))^2$. The initial conditions at $z=0$ are:

$$\Phi = w = \partial w / \partial t = 0 \quad (t = 0). \quad (4)$$

There are some particular cases of this problem. If the elastic parameter D is made zero, but

$Q = -T$ ($T > 0$), then the plate-covered surface reduces to the flexible membrane. If in addition also surface density of plate $M = 0$, then upper boundary of fluid becomes the free surface with surface tension and T is the coefficient of surface tension. As $D = Q = 0$, the plate-covered surface reduces to the inertial surface which represents the effect of a thin uniform distribution of non-interacting floating matter, for example, broken ice. If addition to this also $M = 0$, then upper boundary of fluid becomes the usual free surface.

The initial-value-problem (1)-(4) is solved by standard method. The solution of this problem can be written as

$$\Phi = \mu(t)(1/r_1 - 1/r_2) + \phi, \quad (5)$$

where

$$r_1^2 = R^2 + (z - \eta(t))^2, \quad r_2^2 = R^2 + (z + \eta(t))^2.$$

In order to obtain the formal solution for the harmonic function $\phi(\vec{x}, t)$, it is convenient to introduce a combination of the Laplace transform with respect to t and the Fourier transform with respect to spatial variables x and y . The formal integral expression for the function $\phi(\vec{x}, t)$ can be written as

$$\phi = 2\rho \int_0^t \mu(\tau) \int_0^\infty \frac{\omega(k)}{\rho + Mk} e^{k(z+\eta(\tau))} J_0(kR(\tau)) \times \sin(\omega(k)(t - \tau)) dk d\tau, \quad (6)$$

where

$$\omega(k) = \sqrt{k(Dk^4 - Qk^2 + g\rho) / (\rho + Mk)}, \quad (7)$$

J_0 is the zeroth-order Bessel function of the first kind. If $D = Q = M = 0$, the solution (6) is consistent with the velocity potential for clean free surface and coincides with the result [1, Eq. (13.49)].

Eq. (7) is known as the dispersion relation. It is known that there is a limitation on the compressive force Q . The condition $Q < Q_* \equiv 2\sqrt{g\rho D}$ provides steadiness of the floating elastic plate [6]. In the present analysis, it is assumed also that $Q < Q_0 < Q_*$, where Q_0 is defined by the condition of the positive group velocity $c_g(k) = d\omega/dk$ for all wave numbers $k \geq 0$. The method of determination Q_0 was given for a fluid of finite depth [7]. The value Q_0 and associated k_0 are found from the conditions $c_g(k_0) = dc_g(k_0)/dk = 0$. For deep water, the value k_0 is determined as the positive root of the polynomial $Dk_0^4(8Mk_0 + 15\rho) - 3g\rho^2 = 0$ and the value Q_0 is equal to

$$Q_0 = [Dk_0^4(4Mk_0 + 5\rho) + g\rho^2] / [k_0^2(2Mk_0 + 3\rho)].$$

At $M = 0$, the values k_0 and Q_0 are determined

$$\text{explicitly } k_0(D/g\rho)^{1/4} = 5^{-1/4} \approx 0.669,$$

$$Q_0 / \sqrt{g\rho D} = \sqrt{20}/3 \approx 1.491.$$

All considered cases of upper cover are divided into two groups. For elastic cover, flexible membrane and surface tension, both the phase $c_f(k) = \omega/k$ and group velocities $c_g(k)$ have minimal values, denoted by $U_f = c_f(k_f)$ and $U_g = c_g(k_g)$, respectively. Here k_f is correspond to the wave number at which

$$dc_f(k_f)/dk = 0, \text{ and analogously } k_g < k_f \text{ is}$$

defined by the expression $dc_g(k_g)/dk = 0$. For inertial surface and clean free surface, both the phase and group velocities are the monotone functions.

Velocity Potential Of Translating And Oscillating Source

The velocity potential (5) can be applied for different particular cases of source motion. One of the most interesting case presents a source of oscillating strength, starting to oscillate at $t = 0$ and moving with constant velocity u in the direction Ox . The potential of a time-harmonic source with forward speed is obtained from the transient source by specifying the appropriate source strength and its motion

$$\mu(t) = \mu_0 \cos \sigma t, \quad \xi(t) = \xi_0 + ut, \\ \eta(t) = \eta_0, \quad \zeta(t) = \zeta_0.$$

Furthermore, a coordinate system moving with velocity u in direction Ox ($\bar{x} = x - ut$) is used. The location of the translating source is fixed in this moving system and the velocity potential (5) can be written as

$$\Phi(\bar{x}, y, z, t) = \mu_0 \cos \sigma t \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \phi(\bar{x}, y, z, t),$$

where

$$\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^t \cos \sigma(t - \tau) \int_0^\infty F(k, \gamma) \times \cos(k \cos \gamma (X + u\tau)) \sin(\omega(k)\tau) dk d\tau d\gamma, \quad (8)$$

$$F(k, \gamma) = \frac{\mu_0 \rho \omega(k)}{\pi(\rho + kM)} e^{k(z+\zeta_0)} \cos(kY \sin \gamma),$$

$$X = \bar{x} - \xi_0, \quad Y = y - \eta_0,$$

and the range of the γ -integration is reduced in the quadrant $[0, \pi/2]$. Using the function-product relations for sine and cosine, Eq. (8) becomes

$$\phi = \int_0^{\pi/2} \int_0^t \int_0^\infty F(k, \gamma) \sum_{n=1}^4 \sin \Psi_n dk d\tau d\gamma, \quad (9)$$

where

$$\Psi_{1,2}(k, \tau, t) = [\omega(k) + \sigma]\tau \pm k(X + u\tau) \cos \gamma - \sigma t,$$

$$\Psi_{3,4}(k, \tau, t) = [\omega(k) - \sigma]\tau \pm k(X + u\tau) \cos \gamma + \sigma t.$$

The principal physical features of the wave motion in far field can be determined by the asymptotic analysis of double integral for k and τ in (9) using the method of stationary phase. An especially important role is played by the critical (stationary) points at which

$$\partial \Psi_n / \partial k = \partial \Psi_n / \partial \tau = 0 \quad (n=1, \dots, 4).$$

The fulfillment of these equations permits to determine the wave numbers and the direction of propagation for the waves in far field.

The function Ψ_1 has no critical (stationary) points in the integration range $[0, \pi/2]$. The function Ψ_2 has no more than 2 critical points. The equation

$$\omega(k) + \sigma - kU = 0 \quad (U = u \cos \gamma) \quad (10)$$

has two roots denoted by $k_2^{(1)}$ and $k_2^{(2)}$ with $k_2^{(1)} < k_2^{(2)}$ only if $u > U_1(\sigma) \equiv c_g(k_1^*)$ and $0 < \gamma < \gamma_1$ where the wave number k_1^* satisfies the equation $kc_g(k) - \omega(k) = \sigma$ and $\gamma_1 = \cos^{-1}(U_1/u)$.

It follows from the dispersion relation (7) that $k_1^* \rightarrow k_f$ and $U_1 \rightarrow U_f$ at $\sigma \rightarrow 0$. If the conditions mentioned above do not hold, the function Ψ_2 has no the critical points. The values $k_2^{(i)}$ ($i=1, 2$) are defined as the positive roots of the polynomial

$$Dk^5 - (Q + MU^2)k^3 - U(\rho U - 2\sigma M)k^2 + (\rho g + 2\rho\sigma U - \sigma^2 M)k - \rho\sigma^2 = 0 \quad (11)$$

satisfying Eq. (10). The wave motions corresponding $k_2^{(i)}$ propagate upstream ($X > 0$) or downstream ($X < 0$) depending on the sign of the difference $c_g(k_2^{(i)}) - U$. The function Ψ_3 has always only one critical point. The equation

$$\omega(k) + \sigma + kU = 0 \quad (12)$$

has one zero k_3 for any $\gamma \in [0, \pi/2]$. The value k_3 is defined as the positive root of the polynomial (11) satisfying Eq. (12). The wave motion corresponding the wave number k_3 propagate always downstream. The function Ψ_4 has no more than 3 critical points. The equation

$$\omega(k) - \sigma - kU = 0 \quad (13)$$

has always one root $k_4^{(1)}$ and two additional roots $k_4^{(2)}, k_4^{(3)}$ only at $\sigma < \sigma_* \equiv \omega(k_g) - k_g U_g$ and $U_3 < U < U_2$. The functions $U_2(\sigma)$ and $U_3(\sigma)$ are determined as follows: $U_2 = c_g(k_2^*), U_3 = c_g(k_3^*)$.

Here the values $k_2^* < k_g < k_3^*$ are the roots of the equation

$$\omega(k) - kc_g(k) = \sigma. \quad (14)$$

It follows from the dispersion relation (7) that $k_2^* \rightarrow 0, k_3^* \rightarrow k_f$ and $U_2 \rightarrow \infty, U_3 \rightarrow U_f$ at $\sigma \rightarrow 0$, but $k_2^*, k_3^* \rightarrow k_g$ and $U_2, U_3 \rightarrow U_g$ at $\sigma \rightarrow \sigma^*$. If for given $\sigma < \sigma^*$ the velocity $u > U_2(\sigma)$, three roots exist for $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$, however if $U_3(\sigma) < u < U_2(\sigma)$ then three roots exist only for $0 < \gamma < \gamma_3$, where $\gamma_{2,3} = \cos^{-1}(U_{2,3}/u)$. The values $k_4^{(j)}$ ($j=1, 2, 3$) are determined as the positive roots of the polynomial

$$Dk^5 - (Q + MU^2)k^3 - U(\rho U + 2\sigma M)k^2 + (\rho g - 2\rho\sigma U - \sigma^2 M)k - \rho\sigma^2 = 0$$

satisfying Eq. (13). The wave motions corresponding the wave numbers $k_4^{(j)}$ propagate upstream if $c_g(k_4^{(j)}) - U > 0$ and downstream otherwise.

The basic properties of the flexural-gravity waves generated by oscillating pressure moving over ice plate were investigated for 2D and 3D problems and the fluid of finite depth [7-9]. In this paper, these results are presented in more simple form for deep water.

For inertial surface ($D = Q = 0$), the function Ψ_2 has only one critical point, because Eq. (10) has one zero k_2 for any $\gamma \in [0, \pi/2]$. The value k_2 is always greater than k_3 . For Ψ_4 , there are two critical points for certain values of γ only at $\sigma < \sqrt{g\rho/M}$. Eq. (13) has two roots $k_4^{(1)}$ and $k_4^{(2)}$ with $k_4^{(1)} < k_4^{(2)}$ at $U < U^* \equiv c_g(k_4^*)$ where k_4^* is the root of Eq. (14). The value k_4^* is defined as the positive root of the polynomial

$$M^2(\rho g - \sigma^2 M)k^3 + \rho M(\rho g - 3\sigma^2 M)k^2 + 0.25\rho^2(\rho g - 12\sigma^2 M)k - \rho^3\sigma^2 = 0$$

satisfying Eq. (14). For $u < U^*$, both $k_4^{(1)}$ and $k_4^{(2)}$ exist for $\gamma \in [0, \pi/2]$. However, when $u > U^*$, $k_4^{(1)}$ and $k_4^{(2)}$ exist only for $\gamma > \cos^{-1}(U^*/u)$. For usual free surface ($D = Q = M = 0$), we have well known

$$\text{result: } k_4^* = 4\sigma^2/g, \quad U^* = 0.25g/\sigma.$$

The foregoing analysis is necessary, in particular, for the solution of wave radiation problem of a submerged body with forward speed.

Radiation By A Submerged Sphere At Forward Speed

Consider the problem of a submerged sphere of radius a advancing at constant forward speed u . The centre of the sphere is located at $\bar{x} = y = 0, z = -h$ ($h > 0$). We also define a spherical coordinate system (r, θ, β) with the origin fixed at the position of centre of the sphere:

$$\bar{x} = r \sin \theta \cos \beta, \quad y = r \sin \theta \sin \beta, \quad z = r \cos \theta - h.$$

The total potential Φ may be expanded as

$$\Phi(\bar{x}, y, z, t) = u[\bar{\phi}(\bar{x}, y, z) - \bar{x}] + \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^3 \eta_j \phi_j(\bar{x}, y, z) \exp(i\sigma t) \right],$$

where $\bar{\phi}$ is the steady potential due to unit forward speed; ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) are radiation potentials corresponding to three degree of freedom oscillations of the body (surge, sway and heave) with the angular frequency σ and η_j are corresponding motion amplitudes. Notice that the three-dimensional body in the general case can oscillate with six degree of freedom, but evidently, the rotation of a sphere about its centre does not disturb the fluid.

The boundary conditions at the upper surface of the fluid ($z = 0$) are determined from Eq. (2). The boundary conditions on the body surface S or $r = a$ are

$$\begin{aligned} \partial \bar{\phi} / \partial n &= n_1, \quad \partial \phi_j / \partial n = \\ &= i\sigma n_j + u m_j \quad (j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (15)$$

$$(n_1, n_2, n_3) = (n_x, n_y, n_z),$$

where

$$(m_1, m_2, m_3) = -(\bar{n} \cdot \nabla) \nabla(\bar{\phi} - x).$$

Here \bar{n} is the inward normal of the body surface. The radiation condition assumes that only those outgoing wave with group velocity larger than forward speed can be found in far front of the body.

Method Of Multipoles

We write the steady potential $\bar{\phi}(\bar{x}, y, z)$ in terms of the following multipole expansion method [10] based on the Legendre functions P_n^m

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{A}_n^m \left[\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \cos m\beta + \right. \\ &\left. \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{L_1} \frac{T_1}{Z_1} \Lambda \cos m\gamma dk d\gamma \right], \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\Lambda(k, \gamma) = k^n \exp[k(z - h + i(x \cos \gamma + y \sin \gamma))],$$

$$T_1(k, \gamma) = Z_1(k, \gamma) + 2\rho u^2 k \cos^2 \gamma,$$

$$Z_1(k, \gamma) = Dk^4 - Qk^2 - u^2 k \cos^2 \gamma (\rho + Mk) + \rho g.$$

The multipole expansion for the radiation potential $\phi_j(\bar{x}, y, z)$ has the form

$$\begin{aligned} \phi_j &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \left[\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \cos m\beta + \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n B_n^m \left[\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) \sin m\beta + \right. \\ &\left. \left. + \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{L_2} \frac{T_2}{Z_2} \Lambda \cos m\gamma dk d\gamma \right] + \right. \\ &\left. + \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{L_2} \frac{T_2}{Z_2} \Lambda \sin m\gamma dk d\gamma \right], \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$T_2(k, \gamma) = Z_2(k, \gamma) + 2\rho(\sigma - uk \cos \gamma)^2,$$

$$Z_2(k, \gamma) = k(Dk^4 - Qk^2 + \rho g) -$$

$$(\sigma - uk \cos \gamma)^2 (\rho + Mk).$$

The integration routes L_1 and L_2 in (16) and (17) are from zero to infinity. There are the singularities in the integrand of these equations. The paths at the singularities are determined by the radiation condition. The properties of wave motion in the far field are determined above.

By applying the conditions on the body surface (15) and using orthogonality relations for associated Legendre functions, we obtain the infinite systems of linear algebraic equations for unknown coefficients $\bar{A}_n^m, A_n^m, B_n^m$ [10]. These systems can be solved numerically by truncating theirs to $N \times N$ systems and increasing N until the solution converges to the required degree of accuracy. Once the solutions for $\bar{A}_n^m, A_n^m, B_n^m$ are found, the hydrodynamic load may be determined by integrating the pressure obtained from the Bernoulli equation over the body S . The steady load acting on the translating sphere is determined by the force $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, where

$$F_j = -\frac{1}{2} \rho u^2 \int_S \nabla(\bar{\phi} - x) \nabla(\bar{\phi} - x) n_j dS \quad (18)$$

$$(j = 1, 2, 3),$$

while the moment about the centre sphere is apparently zero. As consequence of the symmetry of the sphere, we have also $F_2 = 0$. The radiation load is equal to

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \sigma^2 \mu_{ij} - i\sigma \lambda_{ij} = \\ &- \rho \int_S [i\sigma \phi_j + u \nabla(\bar{\phi} - x) \nabla \phi_j] n_j dS, \end{aligned} \quad (19)$$

where μ_{ij} and λ_{ij} are the added mass and damping coefficients, respectively.

Numerical Results

Numerical calculations are performed for the following input data:

$$E = 5 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \rho = 1025 \text{ kg / m}^3, \rho_1 = 922.5 \text{ kg / m}^3, \\ \nu = 0.3, a = 10 \text{ m}.$$

Fig. 1(a) shows the minimal values of the phase velocity U_f and the group velocity U_g as a function of the lateral stress at the different ice thicknesses $h_1 = 0.5, 1, 2 \text{ m}$. The critical frequency σ^* is presented in Fig. 1(b).

Both U_f and U_g increase with the ice thickness and decrease with the lateral stress. The reverse is true for the critical frequency.

Notice that the real ice lateral stress is small (see, for example, [11]) and can be used $Q = 0$. However, the lateral stress may be important for the artificial floating platforms. It is known that the solutions of the hydroelastic problem for the sea ice and very large floating structures in many cases are similar [12].

Fig. 2 shows the variation of U_j ($j = 1, 2, 3$) with σ for the case of the ice cover.

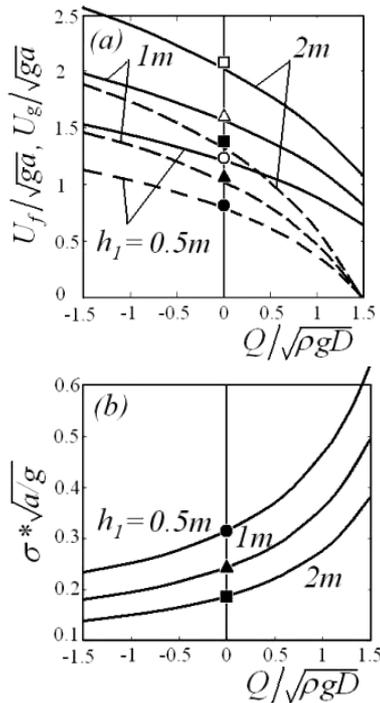


Figure 1 - The influence of the lateral stress at the different ice thicknesses. (a) The minimal values of the phase (solid lines) and group (dashed lines) velocities, (b) the critical frequency. The values at $M = Q = 0$ are shown by symbols.

The curves U_1, U_2, U_3 divide the (σU) - plane into four regions G_n ($n = 1, \dots, 4$). There are all six waves in far field for values σ and U from the region $G_1 : k_2^{(1)}, k_2^{(2)}, k_3, k_4^{(1)}, k_4^{(2)}, k_4^{(3)}$. There are four waves for the regions G_2 and $G_3 :$

$k_2^{(1)}, k_2^{(2)}, k_3, k_4^{(1)}$ and $k_3, k_4^{(1)}, k_4^{(2)}, k_4^{(3)}$, respectively. There are only two waves for the region $G_4 : k_3, k_4^{(1)}$.

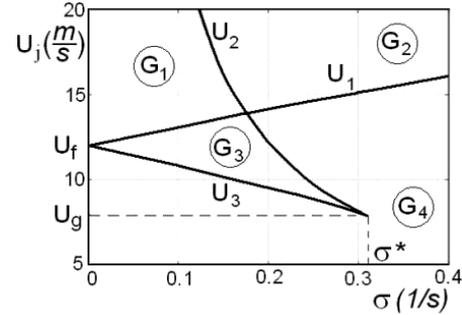


Figure 2 - Dependence of U_j ($j = 1, 2, 3$) on the frequency ($h_1 = 0.5 \text{ m}, Q = 0$).

Numerical results for broken ice are presented in Fig. 3. There are four waves for the region $G_1 : k_2, k_3, k_4^{(1)}, k_4^{(2)}$. Only two waves k_2, k_3 exist for the region G_2 .

The results for hydrodynamic load are obtained by taking $N = 5$. Further increasing N has been found not to affect the first four figures after the decimal point.

Fig. 4 gives the resistance coefficients and lift coefficients of a sphere submerged at $h = 2a$ under usual free surface and broken ice.

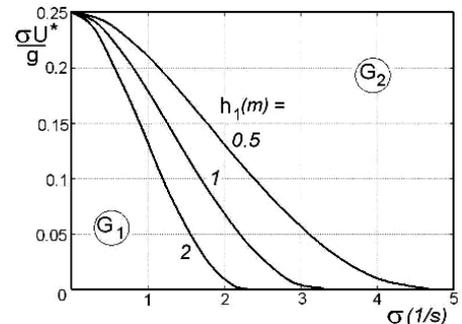


Figure 3 - The influence of the frequency on the non-dimensional parameter $\sigma U^* / g$ in the case of broken ice at the different ice thicknesses $h_1 = 0.5, 1, 2 \text{ m}$.

The coefficients are defined from (18) as $R = -F_1 / (\pi \rho g a^3)$ and $L = F_3 / (\pi \rho a^2 U^2)$. The results for the wave resistance in the case of usual free surface are compared with the tabular values [13], which are shown by open circles in Fig. 4(a). Good agreement is found. In Fig. 4(b), the horizontal arrows indicate the values of the lift for two limiting cases: $u \rightarrow 0$ ($L = 0.01198$) and $u \rightarrow \infty$ ($L = -0.01147$).

The first case corresponds to the rigid lid on the upper boundary of water, whereas the second case corresponds to weightless fluid. The solutions of the steady problem at these cases can be easily obtained by multipole expansion method.

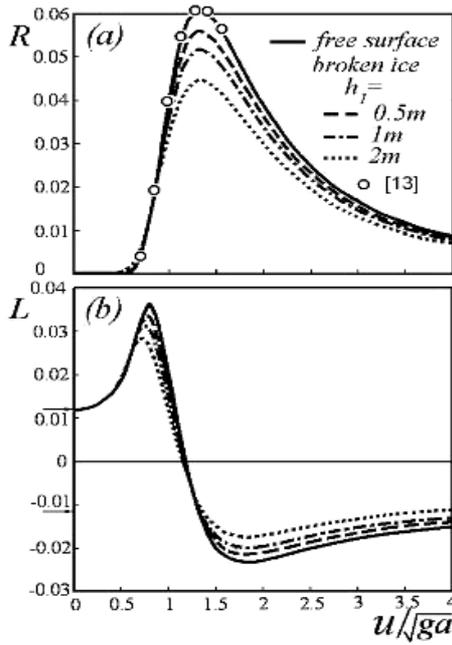


Figure 4 - The influence of forward speed on the steady hydrodynamic load for the free surface and broken ice at the different ice thicknesses.
(a) Wave resistance, (b) lift.

Fig. 4 shows that the maximal values of wave resistance and lift take place for the sphere moving under the free surface. For broken ice the extremal values of the hydrodynamic load decrease with increasing the ice thickness but the qualitative behavior of the hydrodynamic load does not change. It is seen that the lift tends to value for the rigid lid, when the velocity of the sphere tends to zero.

The hydrodynamic load for the sphere moving under the solid ice-cover with the thickness $h_1 = 0.5m$ is shown in Fig. 5. Both the wave resistance and the lift attain discontinuities at the critical velocity $u = U_f$.

At $u < U_f$, the wave resistance is equal to zero but the lift increases sharply with u . At $u > U_f$, the wave resistance increases at substantial stretching of the ice cover. At $u > U_f$, the wave resistance increases at substantial stretching of the ice cover. In Fig. 5(b) the horizontal arrows indicate the values of the lift for two limiting cases: $u \rightarrow 0$ and $u \rightarrow \infty$ as in Fig. 4. The lift coefficients tend to the value for rigid lid at $u \rightarrow 0$ and to value for weightless fluid at $u \rightarrow \infty$ regardless of the lateral stress.

Figs. 6, 7 give respectively the added mass and damping coefficients for a sphere submerged at $h = 2a$ under usual free surface and broken ice. The results are obtained with using (19) and have been non-dimensionalized as

They correspond to $u/\sqrt{ga} = 0.4$. The results for usual free surface are compared with tabular values which are given in [13] and shown by open circles in Figs. 6, 7. The results for τ_{31} are omitted here, because

at low forward speed we have $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ ($i \neq j$) (see for more details [13]).

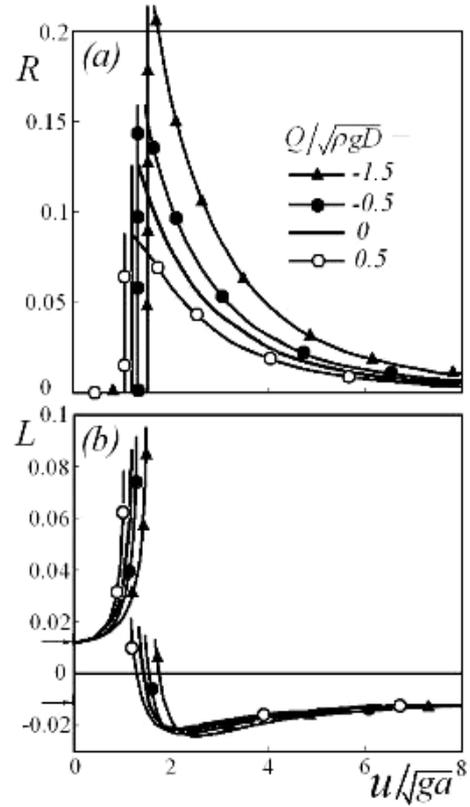


Figure 5 - The influence of forward speed on the steady hydrodynamic load for the solid ice-cover at the different lateral stresses: $h_1 = 0.5m$.
(a) Wave resistance, (b) lift.

$$\bar{\mu}_{ij} = \mu_{ij} / (\pi \rho a^3), \quad \bar{\lambda}_{ij} = \lambda_{ij} / (\pi \rho a^3 \sigma).$$

Some coefficients of the radiation load vary sharply in the vicinity of the critical frequency, which is at $\sigma^2 a / g \approx 0.3906$ for usual free surface. As shown in Fig. 3, the critical frequency decreases with increasing of the ice thickness for broken ice: $\sigma^2 a / g \approx 0.34603, 0.31456, 0.27118$ at $h_1 = 0.5, 1, 2m$, respectively.

The effect of the ice cover on the non-dimensional added mass and damping coefficients is shown in Figures 6 and 7, respectively. The radiation load is calculated at $u/\sqrt{ga} = 0.4$ for different lateral stresses and the ice thicknesses:

$$Q = 0, \quad h_1 = 0.5, 1, 2m \quad \text{and} \quad h_1 = 1m, \\ Q / \sqrt{\rho g D} = -0.5, 0.5.$$

For comparison, the values of the radiation load for a sphere submerged under the rigid lid are shown by the crosses in Figs. 8(a-c), 9(d). In this special case, non-zero values have only the diagonal coefficients μ_{jj} ($j = 1, 2, 3$) and $\lambda_{13} = -\lambda_{31}$. We can see from Figs. 8, 9 that the values $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ for the solid ice-cover and the approximation of rigid lid are

very closely. But for the value λ_{13} it is realized only at relatively thick ice-cover with $h_1 = 2m$.

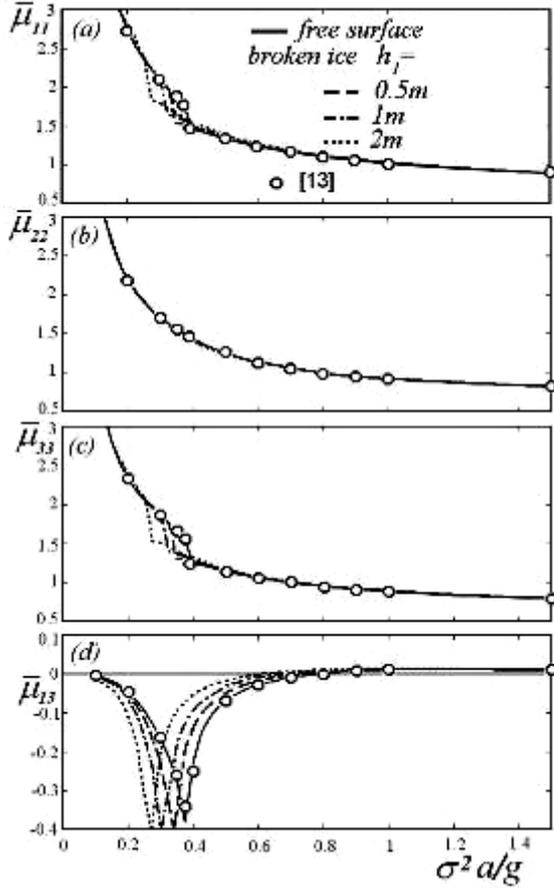


Figure 6 - The added mass coefficients of a submerged sphere for the free surface and broken ice ($u/\sqrt{ag} = 0.4$).
(a) Surge, (b) sway, (c) heave, (d) surge-heave.

It should be noted, that the radiation force in the case of an ice sheet is smaller than that in the case of broken ice at low forward speed. The value of forward speed $u/\sqrt{ag} = 0.4$ is less than the minimal group velocity of the flexural-gravity waves for all considered cases in Figs. 8, 9 (cf. Fig. 1(a)). Consequently, the waves in far field are correspond to only the region G_4 in Fig. 2. At large forward speed, however, these frequencies take place and correspond to the boundaries of the regions G_n ($n=1,2,3,4$) in Fig. 2.

At more high forward speed, $u/\sqrt{ag} = 1$, the added mass and damping coefficients are shown in Figs. 10, 11, respectively. The radiation force is calculated for different ice thicknesses and lateral stresses as well as in Figs. 8, 9.

As distinct from $u/\sqrt{ag} = 0.4$, now the value of forward speed is greater than the minimal group velocity for two cases: $h_1 = 0.5m, Q = 0$ and $h_1 = 1m, Q/\sqrt{\rho g D} = 0.5$. In these cases, some components of the radiation force change sharply at

those frequencies which are close to the boundaries of the regions G_3 and G_4 in Fig. 2. As well as in the case of low forward speed, the values of the diagonal added mass coefficients for an ice sheet and a rigid lid are very closely for all considered parameters. But for the value of the damping coefficient λ_{13} , similar agreement is realized only at relatively thick ice-cover with $h_1 = 2m$.

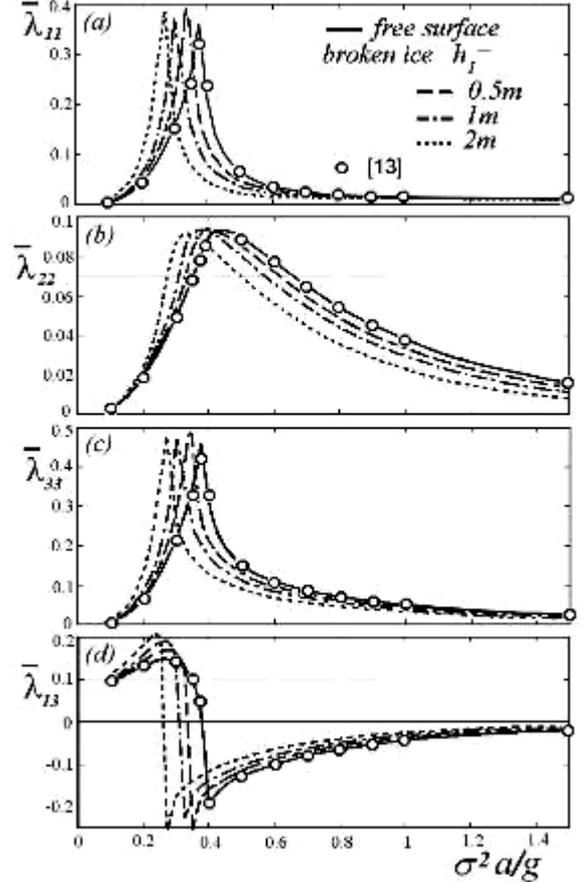


Figure 7 - The damping coefficients of a submerged sphere for the free surface and broken ($u/\sqrt{ag} = 0.4$).
(a) Surge, (b) sway, (c) heave, (d) surge-heave.

Conclusions

The velocity potential of unsteady mass source has been derived for inviscid, incompressible and homogeneous fluid. The upper surface of the fluid is covered by a thin layer of elastic material of uniform density with the lateral stress. The potential for a source of arbitrary strength, starting from the rest and moving in an arbitrary path in deep water is derived first by solving an initial, boundary-value problem using Laplace and Fourier transforms. The result is similar in form to the transient source in a fluid with clean free surface. It is possible to obtain other sources of interest by starting with the transient source. It is trivial to derive sources with unit-step or delta-function strength. These sources are commonly used in time-domain calculations of body motions. For frequency-domain calculations, oscillating sources with and without forward speed are used.

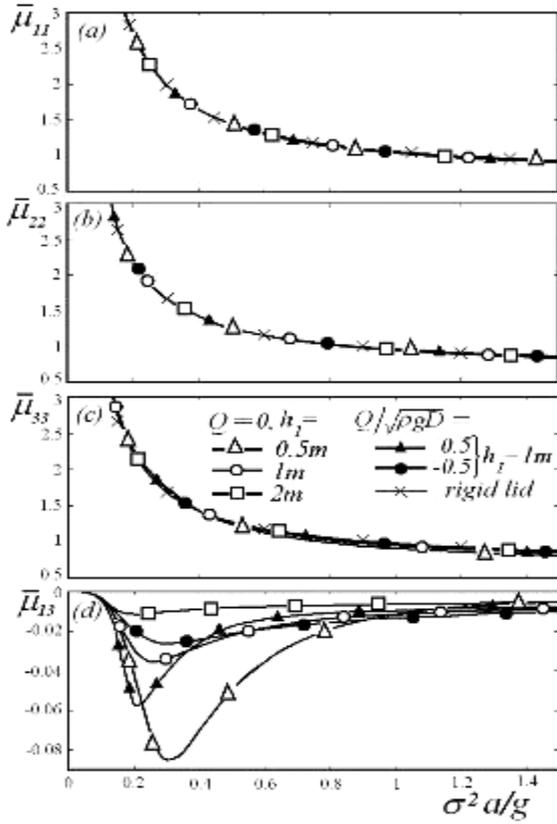


Figure 8 - The added mass coefficients of a submerged sphere for the solid ice-cover with $(u / \sqrt{ag} = 0.4)$.
 (a) Surge, (b) sway, (c) heave, (d) surge-heave.

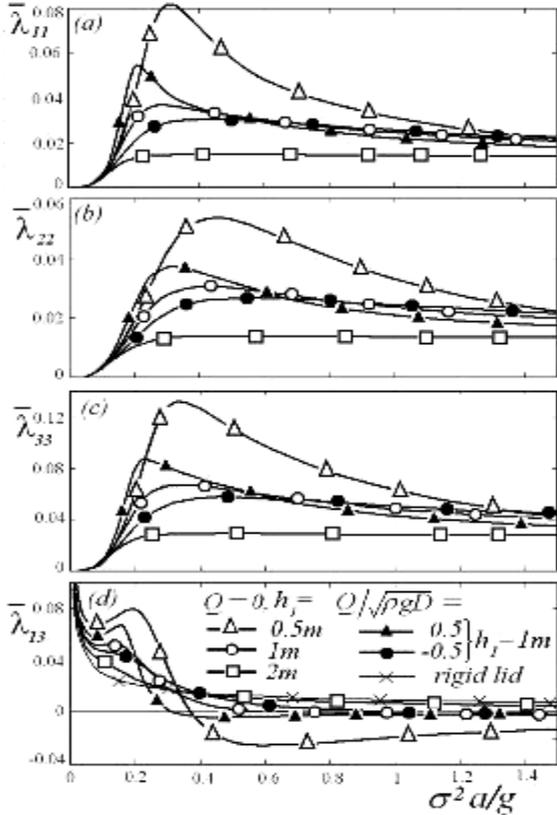


Figure 9 - The damping coefficients of a submerged sphere for the ice-cover $(u / \sqrt{ag} = 0.4)$. (a) Surge, (b) sway, (c) heave, (d) surge-heave.

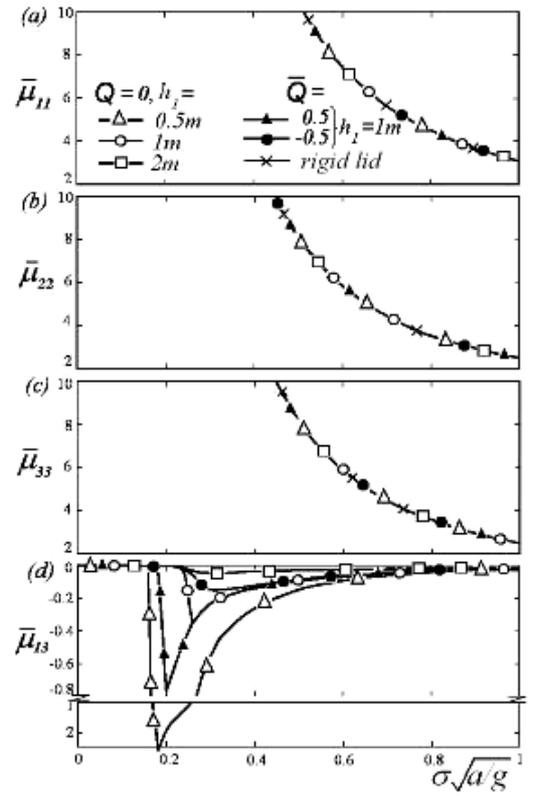


Figure 10 - As Fig. 8 at $u / \sqrt{ag} = 1$.

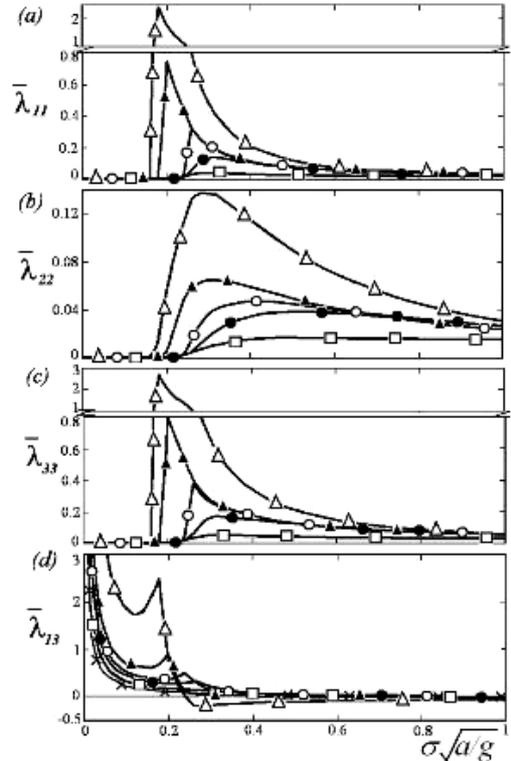


Figure 11 - As Fig. 9 at $u / \sqrt{ag} = 1$.

As an example, the potential of a time-harmonic source with forward speed is obtained from the transient source by specifying the appropriate source strength and its motion. In order to obtain the principal physical features of the wave motion in far field, the asymptotic analysis is adopted using the method of

stationary phase. The multipole expansion method is applied to the wave radiation problem of submerged sphere with forward speed. Numerical results are obtained for the wave resistance, lift, added-mass and damping coefficients. It is shown that the hydrodynamic load acting on the submerged sphere significantly depends on its translating speed and the angular frequency as well as the thickness ice and the lateral stress. This solution may be appropriate benchmark for the numerical methods which will be designed for a body of an arbitrary shape.

References

1. Wehausen, J.V., Laitone, E.V. Surface waves. In: *Handbuch der Physik*. 1960, 9, 446-778.
2. Chowdhury, R.G., Mandal, B.N. Motion due to fundamental singularities of finite depth water with an elastic solid cover. *Fluid Dyn. Res.*, 2006, 38(4), 224-240.
3. Lu, D.Q., Dai, S.Q. Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover. *Arch. Appl. Mech.*, 2006, 76(1-2), 49-63.
4. Lu, D.Q., Dai, S.Q. Flexural- and capillary-gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth. *Intern. J. Eng. Sci.*, 2008, 46(11), 1183-1193.
5. Lu, D.Q., Dai, S.Q. Generation of unsteady waves by concentrated disturbances in an inviscid fluid with an inertial surface. *Acta Mech. Sin.*, 2008, 24(3), 267-275.
6. Kheysin, D.E. Dynamics of floating ice covers (in Russian) M. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1967. 216 pp. Technical translation FSTC-HT-23-485-69, U.S. Army Foreign Science and Technology Center.
7. Bukatov, A.E. Influence of a longitudinally compressed elastic plate on the non-stationary wave motion of a homogeneous liquid. *Fluid Dyn.*, 1980, 15(5), 687-693.
8. Bukatov, A.E., Cherkosov, L.V. Unsteady oscillations of an elastic plate floating on the surface of the liquid stream. *Sov. Appl. Mech.*, 1977, 13(9), 103-107.
9. Bukatov, A.E., Yaroshenko A.A. Evolution of three-dimensional gravitationally warped waves during the movement of a pressure zone of variable intensity. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1986, 27(5), 676-682.
10. Wu, G.X. Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth. *Proc. R Soc. Lond. A*, 1995, 448(1932), 29-54.
11. Schulkes, R.M.S.M., Hosking, R.J., Sneyd, A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2, *J. Fluid Mech*, 1987, 180, 297-318.
12. Squire, V.A. Synergies between VLFS hydroelasticity and sea ice research. *Int. J. Offshore Polar Eng. ISOPE*, 2008, 18 (4), 241-253.
13. Wu, G.X., Eatock Taylor, R. Radiation and diffraction of water waves by a submerged sphere at forward speed. *Proc. R Soc. Lond. A*, 1988, 417, 1853, 433-461.
14. Yeung, R.W., Kim, J.W. Effects of a translating load on a floating plate – structural drag and plate deformation. *J. Fluids and Structures*, 2000, 14(7), 993-1011.

ИСКУССТВЕННАЯ КАВИТАЦИЯ И ОПЫТ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ОТЕЧЕСТВЕННОМ СУДОСТРОЕНИИ

Пустошный А.В., Русецкий А.А.

Крыловский государственный научный центр
196158, г. Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44
krylov@krylov.spb.ru

Реферат

Анализируется опыт применения искусственной кавитации для снижения сопротивления и повышения эффективности движителей на судах отечественного флота. Приводятся данные о судах, на которых используется положительный эффект искусственной кавитации.

Ключевые слова: кавитация, каверна, движители, сопротивление, давление, вибрация.

Впервые мысль о возможности возникновения кавитации была высказана Леонардом Эйлером, который в «Histoire de l'Academie royale des sciences et belle Retres T10 Berlin 1756» писал: «Если случится, что в каком-нибудь месте трубы эта величина (абсолютное давление) станет отрицательной, то вода должна будет отделиться от стенки, в результате чего образуется пустота; этого необходимо избегать всеми мерами, так как действительное явление будет совершенно отличаться от теоретического» [7]. Однако практически с этим явлением впервые столкнулись не в трубах, а на лопастях гребных винтов. В конце XIX века в процессе эксплуатации судов обнаружилось, что при скоростях хода, близких к полной, увеличение числа оборотов гребных винтов не только не приводит к росту скорости, но и вызывает в ряде случаев ее снижение.

По-видимому, первое сообщение, в котором это явление связывалось с падением давления на лопастях до полного вакуума, датировано 1873 г. и приписывается обычно Рейнольдсу [7]. В 1894 г. аномальное изменение характеристик винтов наблюдалось и тщательно обследовалось на английском миноносце «Дэринг» и опытном корабле «Турбиния», оснащенном паротурбинной установкой. Процессы, которые происходили на лопастях гребных винтов этих кораблей, по инициативе В. Фруда были названы «кавитацией». Дальнейшая эволюция судостроения привела к увеличению скоростей хода судов, в результате чего кавитация гребных винтов часто стала неизбежной.

Опыт эксплуатации натуральных кавитирующих винтов показал, что даже при работе на режимах, когда не происходит катастрофического падения эффективности винтов, кавитация является источником усиленной вибрации и шума, а также может приводить к разрушению лопастей, делающему эксплуатацию винтов на этих режимах недопустимой. Вскоре было установлено, что разрушение лопастей, названное кавитационной эрозией, связа-

но с замыканием каверн на их поверхности. В связи с этим возникла идея создать для скоростных судов конструкцию винтов, работающих в режиме развитой кавитации, когда каверны замыкаются за пределами лопастей и не могут быть источником их разрушения. При этом очевидно, что конструкция таких винтов должна обеспечивать им достаточно высокий коэффициент полезного действия (КПД). Впервые мысль о создании этих винтов была высказана в 1939 г. В.Л. Позднюниным, который назвал их «суперкавитирующими». Идея, принятая специалистами на первых порах неоднозначно, потребовала для ее реализации создания теории развитых кавитационных течений, а также методов расчета гидродинамических характеристик гребных винтов, лопасти которых работают в режиме развитой кавитации.

В связи с этим с начала 40-х гг. истекшего столетия публикуется большое число работ, посвященных теоретическим методам расчета суперкавитирующих профилей. Эти методы применительно к плоским кавитационным течениям базировались как на разработанных ранее решениях теории струй идеальной жидкости, авторами которых в России являлись Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, М.А. Лаврентьев и Л.И. Седов, так и на новых решениях. В частности, в 1944 г. Д.Л. Эфросом была предложена схема плоского кавитационного течения с обратной струйкой, лучше отражающая физическую картину явления [8, 10, 15, 26, 31].

Результаты работ позволили перейти к созданию теории и методов гидродинамического расчета суперкавитирующих гребных винтов. На первом этапе в этих методах [15] учитывалось только изменение гидродинамических характеристик профилей, образующих лопасть, и не принималась во внимание загрузка гидравлического сечения винта за счет телесности каверн, формирующихся на лопастях. Это не позволяло обеспечить удовлетворительного согласования результатов расчета с экспе-

риментом. Учет влияния телесности, в частности, показал необходимость при проектировании гребных винтов добиваться минимизации толщины каверн, прежде всего, за счет смещения максимальной толщины профи-лей, формирующих лопасть, к выходящей кромке [17].

На основе этих методов были разработаны серии суперкавитирующих гребных винтов с клиновыми профилями, обладающих высоким значением КПД на расчетном режиме. Однако при практическом проектировании возникла следующая проблема. Суперкавитирующие гребные винты чаще всего применяются на судах с динамическими принципами поддержания. Для этих судов характерно наличие так называемого горба сопротивления, который должен преодолеваться в процессе разгона судна. Однако при скоростях, соответствующих горбу сопротивления, суперкавитирующие гребные винты обычно обладают низкой эффективностью, что вынуждает проектантов судна устанавливать на нем ради преодоления горба двигатель повышенной мощности, которая не используется на основном расчетном режиме. Учитывая недостатки подобного решения, поиск путей выхода из этого положения остается актуальным и в настоящее время.

Развертывание работ в области развитой кавитации было связано не только с необходимостью создания эффективных движителей быстроходных судов, но и с выявившимся в процессе расчетов и экспериментов фактом: в некоторых условиях коэффициент сопротивления тел, обтекаемых с развитой кавитацией, может быть меньше аналогичного коэффициента для тел, обтекаемых безотрывно. Этот факт явился поводом для использования кавитации как средства снижения сопротивления. Идея сводилась к тому, что если в жидкость поместить некоторое тело – кавитатор, за которым формируется каверна большого объема, где может быть размещено интересующее нас тело, то сопротивление комплекса «кавитатор – тело» может быть меньше, чем сопротивление этого тела, обтекаемого безотрывно. Однако практическая возможность использования указанного свойства кавитации была ограничена тем обстоятельством, что каверна достаточных размеров может существовать только в узком диапазоне больших скоростей.

Радикальное расширение области применения развитых кавитационных течений для снижения сопротивления может быть достигнуто путем создания так называемой искусственной кавитации. Тогда при любой скорости путем подачи газа в каверну и повышения за счет этого давления в ней создается течение, близкое к режиму суперкавитации и соответствующему ей числу кавитации.

Первоначально это техническое решение было реализовано как средство снижения сопротивления подводных скоростных объектов. В нашей стране оно нашло применение на надводных судах. В этом случае каверна располагается на днище судна и позволяет изолировать от контакта с водой часть смоченной поверхности, уменьшая, таким образом, составляющую трения в сопротив-

лении судна. Очевидно, что в связи с этим применение искусственной кавитации наиболее выгодно на судах, у которых доля данной составляющей сопротивления велика. Работы в этом направлении начались в 1961 г. по инициативе А.Н. Иванова. В их основу были положены его исследования, а также комплекс работ, выполненных А.А. Бутузовым [1, 3, 4, 6, 11–13].

На первом этапе работы по снижению сопротивления велись применительно к речным тихоходным судам и баржам. При этом в их обособление были выполнены теоретические исследования с использованием двумерной линеаризованной теории кавитационных течений, а также проведены обширные модельные испытания, построены и испытаны три натуральных объекта [29].

Начиная с 1969 г., под руководством А.А. Бутузова был выполнен цикл работ [5] по применению каверн для снижения сопротивления глиссирующих судов, таких как патрульные и разъездные катера и скоростные суда для перевозки пассажиров. В последующие годы применительно к быстроходным водоизмещающим судам были разработаны расчетные методы, основанные на использовании трехмерной линеаризованной теории кавитационных течений [5]. Эти методы прошли экспериментальную проверку и в настоящее время успешно применяются.

С 1993 г. начались исследования по применению искусственных каверн для снижения сопротивления скоростных катамаранов, а также однокорпусных судов различного назначения, эксплуатируемых в переходном режиме. К настоящему времени в России разработано свыше 40 проектов судов, использующих искусственные каверны, причем по восьми из этих проектов было построено более 80 быстроходных судов и катеров водоизмещением 14–300 т со скоростями хода 30–52 уз.

Опыт эксплуатации этих судов показывает, что в зависимости от доли площади, охватываемой каверной, уровень снижения сопротивления судна достигает 15–30 %. Поскольку в процессе эксплуатации судна шероховатость обшивки и обусловленное ею сопротивление трения возрастают, этот эффект имеет тенденцию к дальнейшему увеличению.

В зависимости от режима движения судна для формирования каверн применяются различные конструктивные решения. В частности, на судах, эксплуатируемых в водоизмещающем режиме, каверна на днище имеет значительную протяженность и ограничена по бортам продольными киями. Для поддержания каверны на значительной длине применяются поперечные козырьки, устанавливаемые в несколько рядов на днище (рис. 1). Хотя эти устройства незначительно выступают под днищем судна, имеется опасность их повреждения при движении на мелководье.

Чтобы устранить указанный недостаток, каверну можно формировать в нише на днище судна (рис. 2). Существует также конструктивное решение, при котором выступающие под днищем элементы выполняются заваливающимися.

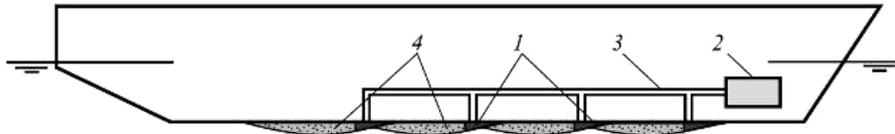


Рисунок 1 - Схема устройства для формирования каверн на днище

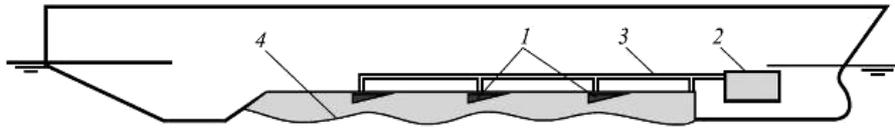


Рисунок 2 - Схема формирования каверны в нише
1 - козырьки; 2 - воздуходувка; 3 - трубопровод; 4 - каверна

На глиссирующих судах каверна также образуется в нише. Носовая часть ниши имеет вид редана стреловидной формы. Кормовая часть ниши профилируется таким образом, чтобы обеспечить на ней плавное замыкание каверны (рис. 3). Для иллюстрации эффективности каверны на рис. 4 сопоставлены зависимости гидродинамического качества R/D от числа Фруда Fr для двух вариантов глиссирующего патрульного катера с обычными обводами и каверной на днище.

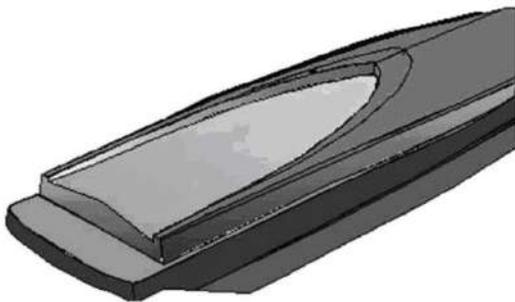


Рисунок 3 - Размещение каверны на глиссирующем судне:

1 - днище перед реданом; 2 - днище внутри ниши; 3 - редан; 4 - скеги

Давление в каверне глиссирующих судов не превышает 300–500 мм водяного столба, что позволяет использовать для ее образования не компрессоры, а вентиляторы. Иногда на малых катерах можно отказаться и от вентиляторов, используя для формирования каверны выхлопные газы двигателей: на глиссирующих судах затраты мощности на образование каверны не превышают 2–3 % от мощности главных двигателей, при этом обеспечивается снижение сопротивления на 20–35 %.

Наряду со снижением сопротивления, положительно отражающимся на экономичности судна или его скорости хода, применение каверны позволяет снизить амплитуды продольной качки, вертикальные перегрузки и удары днища, что дает возможность увеличить эксплуатационную скорость в условиях волнения. На рис. 5 сопоставлены вертикальные ускорения на встречном и попутном волнении, при наличии и отсутствии каверны на днище.

Серьезной проблемой при создании судов, для снижения сопротивления которых применена искусственная кавитация, является обеспечение надежной работы движительного комплекса.

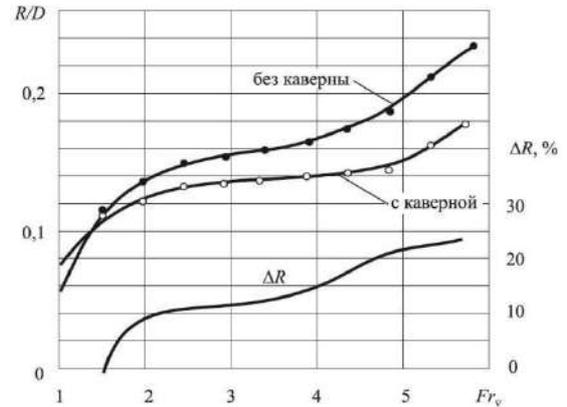


Рисунок 4 - Сопоставление сопротивления судна с каверной на днище и без нее

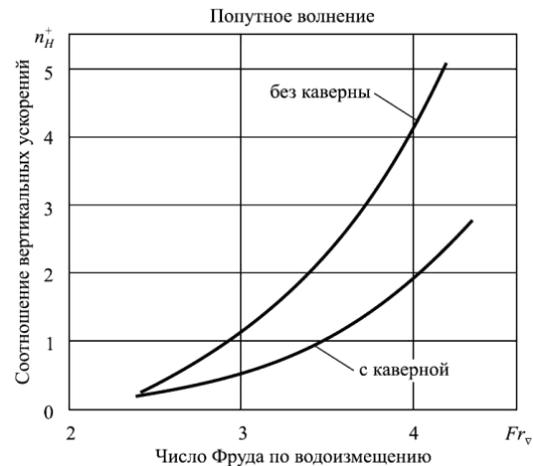
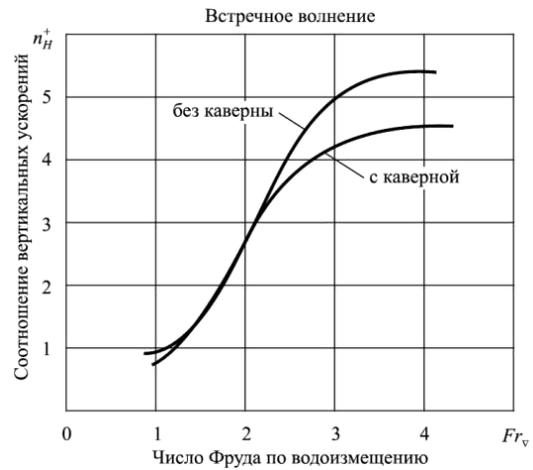


Рисунок 5 - Влияние каверны на вертикальные ускорения на волнении

Эта проблема может быть решена путем защиты движителя от попадания воздуха на его лопастную систему или применения движителей, также использующих искусственную кавитацию лопастей. Наиболее распространенным движителем, применяемым на судах с каверной на днище, является полупогруженный гребной винт. Эти гребные винты обычно располагаются за транцем судна, и подача воздуха на погруженные лопасти осуществляется в результате его захвата при входе лопастей в воду. В таком случае подвод мощности к гребным винтам не требует дополнительных выступающих частей, что способствует повышению эффективности комплекса. Поскольку подъемная сила лопастей создается главным образом за счет повышенного давления на их нагнетающей стороне лопасти, последние имеют клиновидную профилировку со значительной кривизной нагнетающей стороны, максимальная стрелка прогиба которой смещена к выходящей кромке. Иногда в районе выходящей кромки лопасти устанавливается интерцептор, обеспечивающий дополнительное увеличение упора. КПД таких винтов на расчетном режиме достигает 0,60–0,65.

В кавитационном бассейне Крыловского государственного научного центра были проведены испытания серии из 6 моделей полупогруженных винтов, причем одна из них испытывалась с интерцепторами на нагнетающей стороне лопасти. Испытания проходили при трех углах наклона гребного вала и различных заглублениях винта. Режимы испытаний обеспечивали автономность, что позволяет непосредственно использовать их результаты для расчетов ходкости судов со скоростями до 70 уз [21].

Основным недостатком полупогруженных винтов является их повышенная виброактивность, обусловленная изменением сил, действующих на каждую из лопастей в течение оборота винта, а также смещение в горизонтальной плоскости точки приложения упора по отношению к оси вала. Последний недостаток особенно существенен для одновалных судов. Недостатки этого типа движителей могут быть устранены за счет применения вентилируемых водометов. Отличительной особенностью таких движителей является установка насоса с лопастями клиновидного профиля на выбросе из водомета, оджатие струи осуществляется за счет каверн, образующихся на лопастях. Схема такого движителя приведена на рис. 6. КПД вентилируемого водомета близок к КПД полупогруженных винтов.

При применении вентилируемых водометных движителей на судах с выраженным горбом сопротивления возникают те же проблемы, что и при использовании обычных суперкавитирующих гребных винтов. Для обеспечения преодоления горба сопротивления применяются так называемые двухконтурные движители, схема которых для судна на подводных крыльях приведена на рис. 7.

В процессе преодоления горба сопротивления используются оба контура, один из которых явля-

ется вентилируемым водометом, а второй – водометом обычного типа.

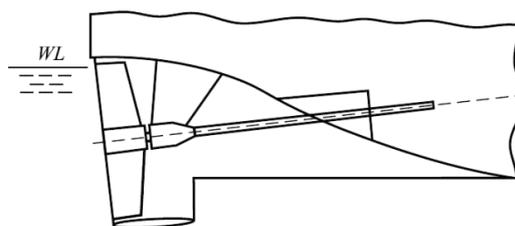


Рисунок 6 - Вентилируемый водомет

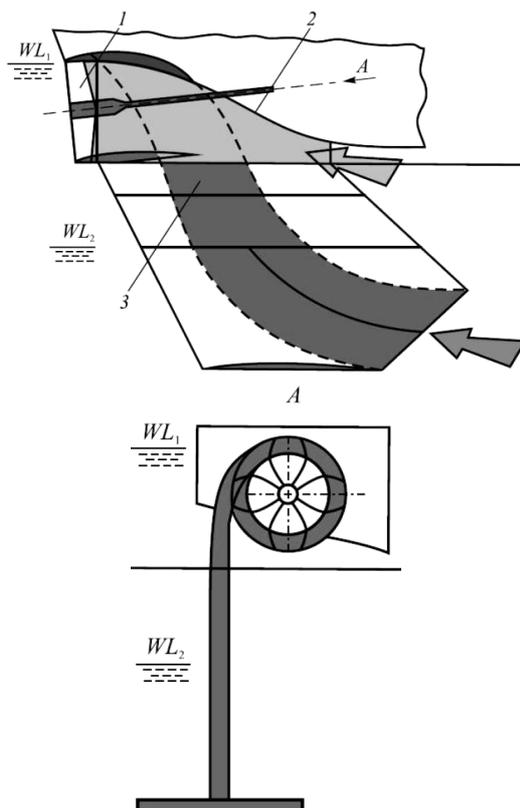


Рисунок 7 - Двухконтурный водомет:

1 – вентилируемое рабочее колесо; 2 - водозабор малых ходов; 3 - водозабор полного хода.

После выхода судна на режим движения на крыльях подача воды во второй контур прекращается, и дальнейшее движение судна обеспечивается вентилируемым водометом. Аналогичная проблема при использовании суперкавитирующих винтов на СПК решается путем применения на этих винтах сечений лопастей компромиссной профилировки со смещенной к выходящей кромке максимальной толщиной. Это позволяет повысить КПД на режиме «горба» на 10–15 % при минимальных потерях на расчетном режиме. Именно подобные гребные винты были использованы на судах на подводных крыльях со скоростью полного хода 60 уз.

Таким образом, за истекшие годы в России накоплен значительный опыт использования развитых кавитационных течений при создании судов, эксплуатируемых на различных скоростных режимах. Достижения в этой области подтверждаются приложением, в котором приведен внешний вид и

основные характеристики построенных в нашей стране быстроходных судов, использующих искусственную кавитацию для снижения сопротивления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Быстроходные суда на каверне, созданные в России	
Патрульный катер «Сайгак»	
Год сдачи головного судна	1981
Кол-во построенных катеров	Более 50
Водоизмещение, т	13,0
Длина максимальная, м	14,05
Ширина максимальная, м	3,5
Осадка максимальная, м	0,65
Мощность двигателя, кВт	735
Скорость максимальная, уз	40
Движитель	Водомер
Десантный катер «Серна»	
Год сдачи головного судна	1992
Кол-во построенных судов	10
Водоизмещение, т	105
Длина максимальная, м	25,65
Ширина максимальная, м	5,85
Осадка максимальная, м	1,52
Грузоподъемность, т	45
Мощность двигателя, кВт	2×2430
Скорость максимальная, уз	32
Движитель	ВВД

Речное пассажирское 70-местное судно «Линда»	
Год сдачи головного судна	1992
Кол-во построенных судов	13
Водоизмещение, т	24,6
Длина максимальная, м	24,1
Ширина максимальная, м	4,6
Осадка максимальная, м	0,95
Мощность двигателя, кВт	660
Скорость максимальная, уз	38
Движитель	ЧПГВ
Буксировщик моделей гидросамолетов «Муфлон»	
Год сдачи головного судна	1992
Кол-во построенных судов	1
Водоизмещение, т	13,2
Длина максимальная, м	15,5
Ширина максимальная, м	3,56
Осадка максимальная, м	0,7
Мощность двигателя, кВт	1100
Скорость максимальная, уз	50
Движитель	ЧПГВ

ЭНЕРГИЯ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ И СПОСОБЫ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Терентьев А.Г

Чебоксарский политехнический институт МГОУ

428022 Чебоксары, ул. П. Лумумбы, 8
agterent@rambler.ru

Abstract

Рассматривается проблема использования практически неограниченной энергии морских течений. Дается краткий анализ современных электростанций и предлагается перспективный, экологически чистый и безопасный способ получения электроэнергии из морских течений.

The problem of using virtually of unlimited energy of sea currents is discussed. A brief analysis of modern power plants is considered, and forward-looking environmentally friendly and safe way to generate electricity from sea currents is proposed.

Введение

Рассматривается глобальная проблема, связанная с энергообеспечением жизнедеятельности человечества. Дается краткий анализ современных электростанций, и предлагаются перспективные экологически чистые и безопасные способы получения электроэнергии. Частично результаты изложены в ранее опубликованных работах [1,2].

В настоящем докладе основное внимание обращено на способы использования энергии морских течений. Дан анализ теплых и холодных течений. Морские течения характеризуются, в основном, малыми скоростями при которых известные винтовые ветродвигатели малоэффективны. Предлагаются разные конструкции гидроустановок, основанные на движении крыльев. Некоторые гидроустановки реализованы в виде иллюстрационных моделей. Испытания этих моделей показали достаточно высокую эффективность.

1. Рост народонаселения и проблемы.

На рис. 1 показан кривая роста населения на нашей планете и прогноз до 2050 года (пунктирная линия) [1]. Предыдущее и начало настоящего столетия характеризуются демографическим взрывом, однако в настоящее время происходит некоторый спад роста народонаселения и, по мнению С.П. Капицы [2], население установится на уровне 12-13 млрд. человек.

Проблема недостатка пресной воды.

Рост потребления пресной воды населением на планете определяется в 0,5-2 % в год. В настоящее время общий водозабор осуществляется в объеме 12—24 тыс. км³.

Однако, потребление пресной воды непрерывно возрастает. Пресная вода используется для бытовых нужд, для сельскохозяйственного производства, для промышленности и др. Уже сейчас наблюдается нехватка воды в отдельных районах планеты, и, как следствие возникают конфликты. В будущем проблема пресной воды усилится.

Проблема питания населения.

Проблема обеспечения населения планеты продуктами питания существовала во все времена существования человечества. С ростом населения очень сильно растет важность этой проблемы. Решение этой проблемы сопряжено с освоением новых угодий и, как

следствие, с уменьшением условий существования для животного мира. Исчезновение видов животного мира – это преступление человечества.

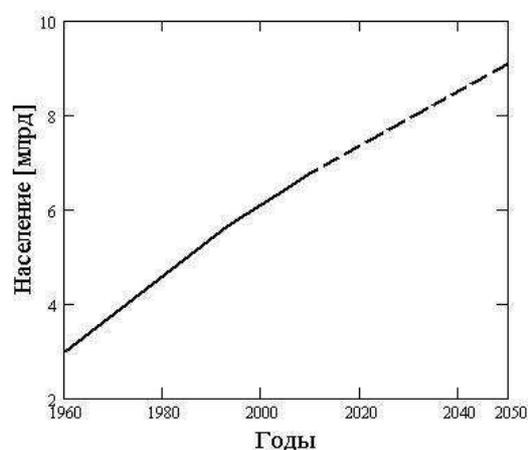


Рисунок 1- Рост народонаселения; пунктирная кривая – прогноз.

Эти проблемы могут быть решены научно-обоснованной агротехнологией, освоением земель, включая пустыни. Но для этого надо много пресной воды, а для ее получения, например, путем опреснения морской воды, требуется много электроэнергии.

Уже сейчас по подсчетам Б. Скиннера [1] человечество использует электроэнергии 3×10^{20} Дж в год, что эквивалентно 9.5×10^{12} Вт. Для существования человечества в будущем потребуется энергии мощностью не менее 3×10^{13} Вт.

На рис. 1а представлены кривые потребление энергоносителей [1].

Из рис. 1а видно, что основными энергоносителями являются нефть, природный газ и уголь. Однако, для выработку указанного количества электроэнергии не сможет обеспечить ни нефть, ни газ, ни уголь, да к тому же, они не безграничны и будут выработаны, за исключением может быть угля, к концу нашего столетия. Уже сейчас добыча нефти и газа на континенте сокращается, необходимо осваивать арктические шельфы, а это резко увеличивает себестоимость продукции. Если себестоимость добычи одной тонны нефти на Ближнем Востоке составляет \$5-10, то в Си-

бири Российской Федерации – \$30-60, а на арктическом прибрежном шельфе себестоимость достигает \$200-300.

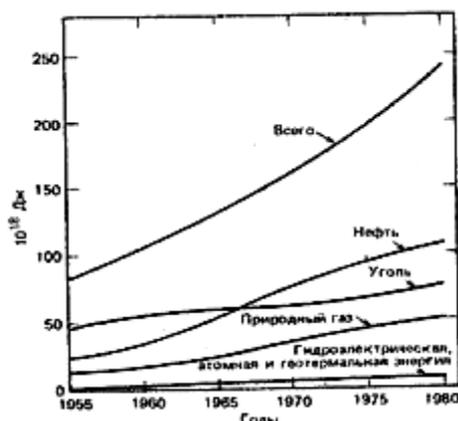


Рисунок 1а- Используемые в мире энергоносители.

2. Аварии в связи с энергоснабжением

Кроме дороговизны добыча нефти и газа на море представляет определенную опасность как для жизни персонала, так и для экологии. В последнее время с угрожающей периодичностью происходят крупные аварии. На рис. 2 и 3 показаны две из таких аварий, которые сравнимы с экологическими катастрофами.



Рисунок 2 - Взрыв на нефтяной платформе Piper alpha, принадлежащей компании Occidental Petroleum (1988г.), унесший 167 жизней.

В последнем случае загрязнение моря было катастрофическим. Несколько меньше, но тоже очень ощутимым явилась катастрофа на Ecosfisk в Северном море в 1977 году, когда вылилось в Северном море более 300 тыс. тонн нефти. Загрязнение морей продолжается. Но сжигание нефти, газа и угля в промышленном масштабе, включая транспортные средства, оказывает исключительно отрицательное влияние на атмосферу земли.

Нефть и газ являются весьма ценным сырьем в химической промышленности для производства различных материалов, обладающих уникальными свойствами. Поэтому сжигание углеводородных энергоносителей крайне нецелесообразно.

Человечество ищет альтернативные виды топлива, но и они часто оказываются также загрязняющими. Даже чистые, на первый взгляд, способы получения

энергии, как ветряные или традиционные плотинные ГЭС, весьма отрицательно оказывают воздействие на окружающую среду. Первые занимают довольно большую площадь и создают характерный шум, влияющий на общее состояние человека, вторые – заливают водоемы, затрудняют миграцию рыб, заливают обширные посевные луга и, как следствие, создают опасность эпидемии болезней.



Рисунок 3 - Взрыв на нефтяной платформе Deepwater Horizon of BP в 2010 г. Погибло 11 человек. Вылилось в воду Мексиканского залива более 2 млн. тонн нефти

Сами плотины таят в себе исключительно большую опасность; в случае разрушения (преднамеренно, в случае войны, или природными явлениями), поток накопленной воды снесет все на своем пути, поглотив в своей пучине неисчислимые человеческие жертвы.

2 декабря 1959 года, плотина Мальпассе во Франции рухнула (рис. 4), город Фрежюс подвергся практически полному затоплению. В результате наводнения погибло 423 человека.



Рисунок 4 - Разрушение плотины Мальпассе во Франции; погибло 423 человека.

9 октября 1963 года, из-за оползней берегов огромное количество воды перелилось через плотину Вайонт в Италии (рис. 5); большое количество воды в виде огромной волны обрушилось в долине реки Пьяве, в результате несколько селений было снесено; погибло 2000-3000 человек.

Авария 17 августа 2009 года на Саяно-Шушенской ГЭС, унесла жизни 75 человек. Ценой жизни было предотвращено еще более серьезные последствия. Но техногенная опасность все еще сохраняется. Саяно-Шушенская ГЭС образует уникальная бетонная арочно-гравитационная плотина высотой 245 м, длиной по гребню 1066 м, с шириной по основанию 105,7 м, а по гребню – 25 м. В плотину уложено 9 млн

кубометров бетона (хватило бы на то чтобы построить шоссе от СПб до Владивостока). Плотина такого типа, построенная в широком створе, является единственной в мире. Если такая плотина разрушится, то трудно даже представить последствия разрушительного потока такого большого количества воды.



а б
Рисунок 5 - Авария на плотине Вайонт в Италии;
а – плотина, б – водоем и оползень;
погибло 2000-3000 человек.

Далеко небезопасными являются также атомные электростанции.

28 марта 1979 года, авария на АЭС Три-Майл-Айленд (англ. Three Mile Island accident) — одна из крупнейших аварий в истории ядерной энергетики США.

25 апреля 1986 года, авария на Чернобыльской АЭС (СССР, ныне Украина); только на ликвидацию аварии было потрачено около 25 млрд. долларов.

11 марта 2011 года, в результате землетрясения и последующего цунами из строя вышли системы охлаждения на АЭС Японии. Наибольший ущерб был нанесен станции “Фукусима-1”, на четырех энергоблоках которой 12, 14 и 15 марта произошли четыре взрыва.

Этот список можно было бы продолжить, куда могли бы войти около 20 аварий ядерных реакторов АЭС. Не случайно, в Германии отказались от АЭС и перешли на другие источники. Ядерная энергетика не такая уж дешёвая, как кажется. На 1 кВт мощности для постройки тратится 4000-6000 долларов. На газовых станциях – 1000, на тепловых угольных – 2000, на гидростанциях – 1500-3000. Много денег уходит на обеспечение безопасности, плюс затраты на вывод реакторов из эксплуатации, затраты на хранение отходов и т.д.

Перспективным является энергия ядерного синтеза, однако, получение этой энергии для полезного использования сопряжено с очень сложными исследованиями, результаты которых пока трудно предвидеть. Да и эксплуатация такой высокоэнергетической станции хранит весьма большие опасности.

Стоимость электростанций [3], введенных в эксплуатацию в 1900-1994 годах и средняя себестоимость 1кВт ч. электроэнергии представлены на рис. 6.

Следует отметить, что и газ, и нефть и уголь являются основным сырьем в химической про-

мышленности для получения ценнейших материалов и поэтому их сжигание, сопровождающееся засорением атмосферы двуокисью углерода, а также вредными для здоровья химическими веществами, крайне расточительно. Поэтому человечество должно уже сейчас задумываться о своих потомках и искать альтернативные виды энергии.

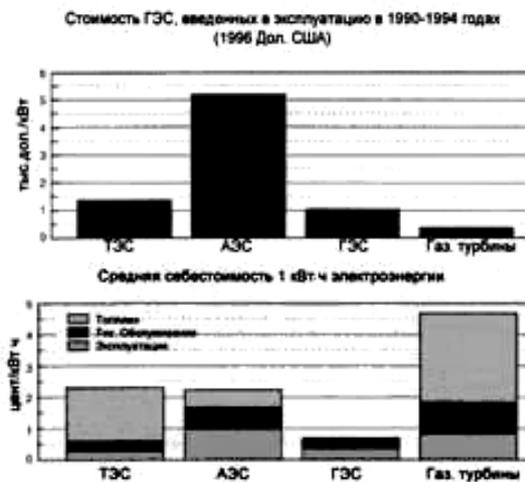


Рисунок 6 - Стоимость электростанций и себестоимость электроэнергии [3].

3. Перспективная энергетика

Наиболее перспективной является солнечная энергия, ежедневно поступающая на землю в количестве $1,5 \times 10^{22}$ Дж или $1,7 \times 10^{17}$ Вт, т.е. в 10000 раз больше, чем потребуется человечеству. Конечно, всю энергию солнца использовать невозможно, да и превращать непосредственно в электрическую энергию трудно, поскольку стоимость фотоэлементов высока, а сами установки требуют больших площадей. Как показал Б. Скиннер [3], для того чтобы получить 10^9 Вт (примерная мощность АЭС) понадобилось бы 8 км^2 поверхность. По-видимому, пока солнечные батареи в наших широтах могут быть использованы в единичных случаях, скорее, для бытовых нужд, нежели для промышленности.

Солнечная энергия аккумулируется в атмосфере и в воде, генерируя ветры и морские течения. Большая часть сосредоточена в морских течениях. Например, объем потока Гольфстрима составляет 50 кубических километров воды ежесекундно, что в 30 раз больше, чем все реки мира вместе взятые. Примерно, такие же энергетические характеристики имеет течение Куроисио. Однако, эти течения являются теплыми и играют большую климатическую роль для многих континентов, расположенных в северных широтах. Поэтому использовать их энергию следует с определенной осторожностью.

Кроме этих двух течений существуют еще свыше 30 течений, из них 20-теплых и 11-холодных.

Океанские течения характеризуются сравнительно небольшими скоростями, менее 1м/сек. Например, Антарктическое циркумполярное течение имеет скорость 0.4 – 0.9м/сек, но это течение является самым мощным океанским течением шириной 1 тыс. км и длиной 30 тыс. км; несет энер-

гию, достаточную человечеству на 1000 лет вперед. Но для математических расчетов требуется более полная и достаточно точная информация о распределении скорости и о рельефе дна. Есть также течения со скоростями более 1 м/сек. К ним относятся, кроме Гольфстрима и Куро-Сиво, Южное пассатное течение (скорость 1.024 м/сек), Гвианское течение (скорость 0.559 – 1.118 м/сек, летом до 1.676 м/сек), Сомалийское течение (0.5 – 1.490 м/сек), Южное пассатное течение (0.931 – 1.118 м/сек) и др.

Интерес к использованию морской энергии постоянно увеличивается. Например, в США создана компания «Hydro Energy», которая финансируется Министерством энергетики и управлением военно-морских исследований США; в Швеции уже более 50% потребности удовлетворяется за счет гидроэнергетики; наиболее существенные достижения получены в Австралии, где опытная фирма «Oceanlinx», основанная в 1997 г., получила инвестиции от правительства в 2002 г. A\$750'000, затем US\$3'750'000 от трех Европейских инвестиционных групп и US\$750'000 от RWE Dynamics (Германия); в 2004 г. получен грант Федерального правительства Австралии на сумму A\$1,210,000 и др. В настоящее время эта фирма твердо стоит на ногах и получает заказы разных стран. Следует, однако, отметить, что перечисленные гидроэнергетические установки используют в основном приливные волны и поэтому имеют ограниченные возможности.

4. Обоснование подводной крыловой гидроустановки

На наш взгляд наиболее перспективными являются гидроэнергетические установки на основе подводных крыльев. Пусть крыло имеет форму пластины и расположено под некоторым углом атаки к потоку, тогда на него будет действовать подъемная сила, примерно равная

$$Y = \rho V^2 S \pi \sin \alpha,$$

или для воды,

$$Y \approx 327 V^2 S \sin \alpha \text{ [кг]},$$

где V [м/сек] – скорость воды относительно крыла, S [м²] – площадь крыла, α – угол, под которым набегаем поток жидкости на крыло (чтобы срыв потока не был, угол не должен быть слишком большим). Для расчета примем угол $\alpha = 30^\circ$, тогда сила будет равна

$$Y = 163 V^2 S \text{ [кг]}.$$

Технические возможности позволяют изготовить крыло с размахом 50 м и шириной 5 м, т.е. площадью $S = 250$ кв.м. Если скорость потока равна $V = 1$ м/сек, то сила, действующая на крыло, будет равна $Y \approx 82000$ кг.

Нами предложена двукрылая установка, которая позволяет получить мощность для указанного крыла $N \approx 32$ МВт. Разрабатываются также квадрукрыловая, работающая в противофазе, и роторная многокрыловые установки. На рис. 7 показаны

положения крыльев двукрылой и роторной трехкрыловой установки для некоторых углов поворота, рассчитанные на компьютере. В упрощенной постановке найдены также формулы для расчета максимально возможной мощности.

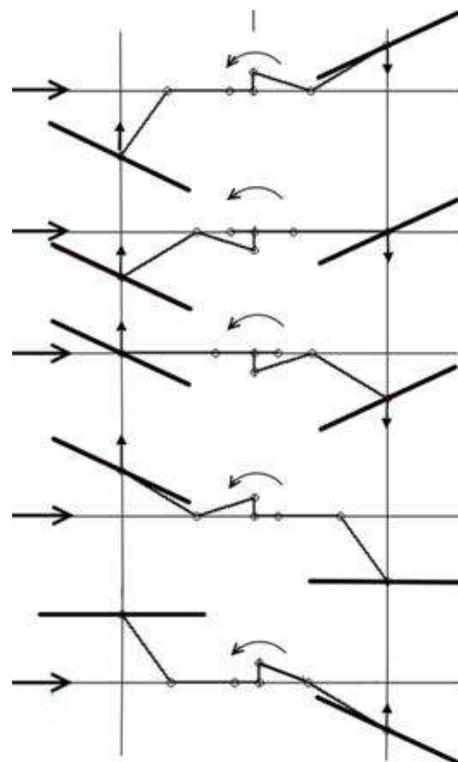


Рисунок 7 - Схематическое изображение двукрылой установки. Показано последовательное положение крыльев при повороте кривошипа на полный оборот, что соответствует движению крыла в одном направлении.

Для оценочных расчетов можно воспользоваться критерием Бетца, в соответствии с которым коэффициент максимального использования энергии ветра идеальным ветроколесом равен $k = 0.593$, который равен отношению полезной мощности ветроколеса к мощности потока через данное колесо. Для реального ветроколеса порядка $k = 0.3-0.4$. Если ометаемая площадь гидроустановки равна S [м²], то мощность течения через эту площадь равна $N_{ж} = \gamma U^3 S / 2$ [Вт], где $\gamma \approx 1000$ кг/м³ – весовая плотность воды. Мощность установки $N = k N_{ж}$. Рассчитаем полезную мощность, которую можно снять с Циркумполярного течения. Известно [5], что средний расход воды

$$Q = 125 S v (\text{Свердруп}) = 1.25 \times 10^8 \text{ м}^3 / \text{сек}.$$

Следовательно, при средней скорости течения $U = 0.7$ м/сек поперечная площадь течения равна $S = Q / U = 1.786 \times 10^8 \text{ м}^2$. Мощность воды, протекающей через данную площадь, равна

$$N_{ж} = \gamma S U^3 / 2 = 3.062 \times 10^{10} \text{ Вт}.$$

Пусть коэффициент $k = 0.3$, тогда гидроагрегаты, установленные в одном сечении, будут производить энергию мощности

$$N_s = kN_{ж} = 9.187 \times 10^9 \text{ Вт}.$$

Если гидроагрегаты установить через каждые 300 м по длине течения $L = 3 \times 10^7 \text{ м}$, то теоретически можно получить энергию, равную

$$N = N_s L / 300 \text{ м} = 9.188 \times 10^{14} \text{ Вт}.$$

Полученная энергия перекрывает потребности населения. Разумеется, это число является чисто теоретическим и его надо корректировать для конкретных агрегатов и течений. Но, тем не менее, оно свидетельствует о том, что энергия всех морских течений полностью перекроет потребности человечества на все времена его жизни.

5. Морские подводные электростанции.

Предлагается разместить энергетические установки на плавающем или погруженном подводном поплавке, закрепленном на якоре (Рис. 8). Для поверхностных морских течений гидроэнергетические агрегаты можно установить или снизу, или сверху или с обеих сторон поплавка. Сами поплавки могут быть на поверхности воды или погружены на глубину порядка 50 м. В первом случае можно установить также надводные ветряки для получения дополнительно энергии от ветра. Кстати, Циркум-полярное течение находится в широтах, называемых «ревущими сороковыми», где постоянно дуют ветры с большими скоростями.

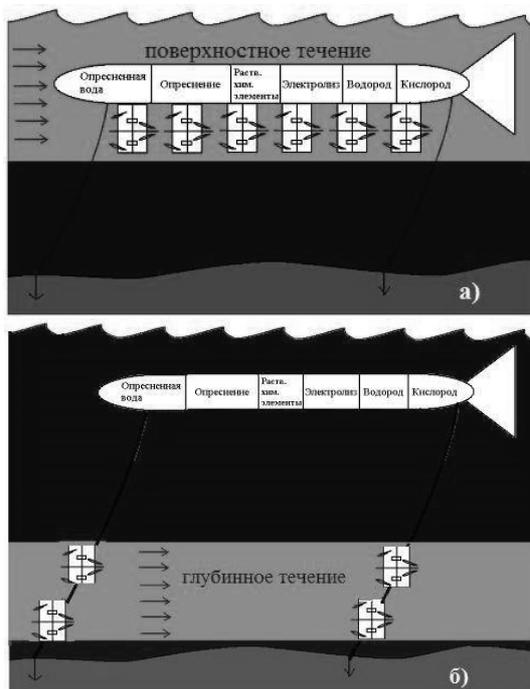


Рисунок 8 - Схематическое изображение подводной ГЭС:

- а) поверхностное течение;
б) глубинное течение.

Однако в этом случае нежелательное воздействие могут оказать ураганные ветры и сильное волнение. В случае погруженного поплавка волнение не будет оказывать сколько-нибудь ощутимое влияние (рис. 8а). Поплавок типа подводная лодка

может быть погружена на небольшое расстояние от свободной поверхности.

Поскольку внутри корпуса предполагается технологический процесс осуществлять в автоматическом режиме, то внутреннее давление может поддерживаться повышенным. В этом случае перепад давления между внешним и внутренним давлением будет сравнительно небольшим, что позволит корпус поплавка сделать из облегченного материала. В частности, можно использовать водонепроницаемый бетон, который значительно дешевле и долговечнее металла. Информация о бетоне будет доложена на данной конференции Красновским Р.О. Расчет толщины стенок поплавка дан в [2].

Вес энергоустановки будет определяться, в основном, весом генератора; крылья, сделанные герметически и заполненные воздухом или легкой жидкостью (пресной водой), будут иметь положительную плавучесть, поэтому общий вес погруженного электрогенератора будет значительно меньше веса генератора в непогруженном состоянии. Его можно опустить на глубину, где течение наибольшее.

Внутри поплавка в автоматическом режиме можно организовать производство водорода, кислорода, опресненной воды, а также растворенных в морской воде химических элементов. Известно, что в морской воде в растворенном виде имеются практически все элементы таблицы Менделеева. Водород и кислород автоматически сжижаются и заполняются в баллоны. Контейнеровоз периодически забирает заполненные баллоны и транспортирует на континент. Для заполнения и транспортировки опресненной воды можно использовать мягкие оболочки. Можно предложить ряд способов транспортировки продукции с морских ГЭС, в том числе по мягким полиэтиленовым трубам, погруженным и закрепленным якорями.

Эксплуатация подводных ГЭС безопасна, поскольку она будет работать в автоматическом режиме. На нее не оказывают никакого влияния различные земные катаклизмы: землетрясения, цунами, торнадо, наводнения и др. Но главное преимущество системы подводных ГЭС – это экологически чистое производство и снабжение человечества экологически чистым энергоносителем, каким является водород, а также весьма полезным кислородом. Там же будут производиться в достаточном количестве и другие полезные химические элементы, о чем упоминалось выше.

Не менее важной является получение опресненной воды. Ею можно заполнять мягкие огромные оболочки и транспортировать на континент, где есть проблема с питьевой водой. Можно будет часть воды использовать для орошения засушливых земель, тем самым решить проблему с питанием.

6. Модели энерго-гидроустановок

В настоящее время предложен ряд моделей гидроустановок, большинство которых основано на пропеллерах. В интернете можно найти множество таких предложений. Часть из них представлена на

рис. 9. Большинство моделей представляют простое копирование ветряков без теоретических обоснований и экспериментов.

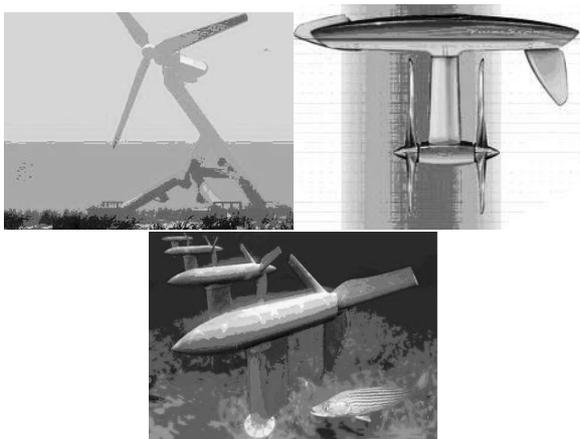


Рисунок 9 - Гидроустановки, основанные на вращении пропеллеров

В Чебоксарском политехническом институте МГОУ и в ООО «Энергоинновации» интенсивно ведутся исследования по ветро-гидродвигателям. Предложены и получены патенты на гидроустановки, основанные на возвратно поступательном движении крыла. Для того чтобы исключить колебания в двукрылой установке, предлагается установка с четырьмя крыльями (квадро), работающие в противофазе (рис. 10).

Перспективной является роторная установка, с вращающимися управляемыми крыльями с закрылками, предложенная Терентьевым А.А.

Заключение

Система подводных ГЭС в будущем может полностью обеспечить человечество экологически чистым топливом, каким является водород, и пресной водой, а также ценными элементами из морской воды. Водород можно будет использовать в качестве топлива для транспорта, а также для получения электроэнергии на электростанциях, работающих на водородном топливе.

Человечество освободится от опасных и экологически вредных средств получения электроэнергии, какими являются ТЭС, АЭС, ГЭС и др. Атмосфера земли будет очищаться от вредных примесей, которые поступают в настоящее время. Реки освободятся от плотин и войдут в прежнее русло. Плодородие земли улучшится. Земля будет способна накормить все человечество экологически чистыми продуктами.

Для того чтобы исследовать все возможные способы использования энергии морских течений, целесообразно организовать центр, может быть, международный, в котором бы велись исследования в данном направлении. Снабжение энергией будущего поколения – это проблема всего человечества, и поэтому им должен заниматься международный центр под эгидой ООН.

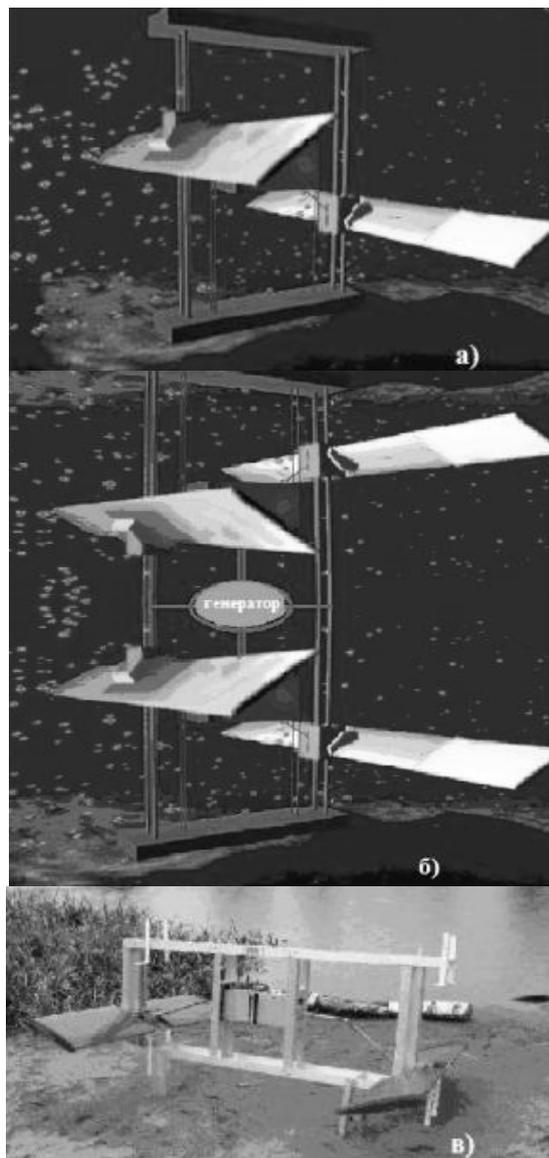


Рисунок 10 - Крыловые гидроустановки:
а) двукрылая установка;
б) квадрукрыловая установка;
в) модель двукрыловой установки.

Литература

1. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Глобальная проблема человечества и пути ее решения. В сб. Инновации в образовательном процессе, вып. 9. ЧПИ МГОУ, 2011, 3-9.
2. Terentiev A.G. Deep water technology: problems and solutions. Proc. of World Maritime Technology Conference, WMTC2012, May 29-June 1, 2012, Saint-Petersburg, Russia.
3. Скиннер Б. Хватит ли человечеству земных ресурсов? –М.: МИР, 1989.
4. Капица С.П. Математическая теория роста человечества// Тр. семинара "Время, хаос и математические проблемы ", Т1. М.: Ин-т математических исследований сложных систем МГУ, 1999.
5. Schmidt, M., 2010. White topping with Ultra-Thin Layers of High and Ultra High Performance Concrete. Proc. of 11th Int. Symp. on Concrete Roads (Betonstraßenkongress,) Sevilla.

STABILITY OF THE STABLE LINEAR MOTION OF HIGH-SPEED UNDERWATER VEHICLE WITH RING-TYPE TAIL WING

Grumondz V.T., Korzhov D.N., Makhrov V.P.

Moscow State Aviation University

125993, Moscow, A-80, ГСН-3, Volokolamskoye ch. 4
dnkmai@gmail.com

Abstract

The investigation subject is the stability of the linear motion of the high-speed underwater vehicle with a ring-type underwater wing and one hypothetical hydro dynamical scheme. Another subject is the mathematical model of longitudinal motion, including the conditions for the linear stability.

Introduction

According to the existing practice [1, 2, 5, 7, etc.], cavitation or super-cavitation is one of the most effective ways to reduce the resistance for High-speed Underwater Vehicles (HUV). It's principle is to break the water in front of the vehicle and shaping the cavern to fit the whole HUV. Currently the design of the cavitating HUVs suggests to place the disk or cone-shape cavitator at the nose of the vehicle and also to fuse gas into the cavern right behind the cavitator [1, 2, 5, 7].

Despite of obvious advantages this classic scheme has a number of weaknesses.

Some experts consider that the existing limitations can be bypassed by using the controlled cavitating currents. The idea is to create the super-caverns of desired shape by external hydro dynamical specifics. The first one to describe this approach in the middle of the 20th century was Lighthill [8]. A group of researchers lead by professor Shushpanov [Makhrov, Kerin, Pushkarev] managed to prove this possibility of creating such current (Fig. 1).

Numerous theoretical and practical researches resulted in creating a ring-type tail wing to form the controlled cavitating current as the preferred solution. [6]. This design is usually referred as «Lighthill-Shushpanov scheme» (Fig. 2).

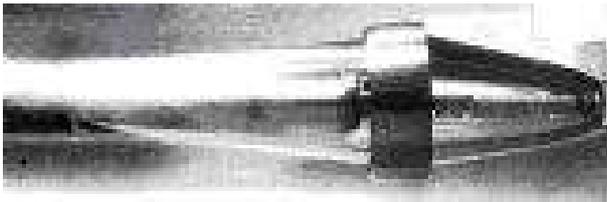


Figure 1 - Controlled cavitating current.
Experiment lead by professor Shushpanov.

A very logical idea comes next which is to combine the advantages of the classical cavitation design [6] and the Lighthill-Shushpanov scheme in one vehicle. Theoretically the resistance of the body which moves in two caverns – front one with $\sigma > 0$, and the tail one with $\sigma < 0$ will be quite tiny. But in this case there is an important task to secure the dynamical characteristics for the vehicle, most importantly – for stable horizontal motion with given speed. This is the objective of the below article. Step one is to create the mathematical model for the HUV and calculate the parameters of the stable motions.

Setting of the task

Let us consider the theoretical design of the HUV buind under Lighthill-Shushpanov scheme (Fig. 2).

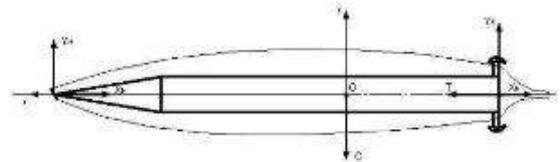


Figure 2 - Theoretical design of the HUV
with controlled cavitating current
by Lighthill-Shushpanov

The HUV is a rotating body moving in the cavern created by the ring-type disk placed in the nose part of the vehicle.

The angle between the disk and the axis of the vehicle is variable. We shall ignore the flotation and slant effects of the cavern. Let us assume that we place a ring-type wing in the tail part of the HUV which converts the cavern formed by the cavitator into cavitating current with negative cavitation number. We have to create a mathematical model for the HUV linear motion as well as for its stability calculation. Below I the system of equations for such type of HUV motion.

Equations for HUV motion.

We shall consider the right oriented rectangular coordinates system $Oxyz$ with O located at the centrum of masses of the HUV and axis Ox directed alongside the axis of symmetry of the HUV.

The HUV is influenced by the following forces and their momentums: hydro dynamical force generated by the cavitation disk; gravity; hydro dynamical force generated by the ring-type wing, force created by the HUV sliding by the cavern edge.

The differential equations of the HUV motion projected on the linked axes of coordinates are as follows:

$$\begin{cases} (m + \lambda_{11})\dot{V}_x - (m + \lambda_{22})V_y\omega_z - \lambda_{26}\omega_z^2 = \\ = T - X - (G - A)\sin \nu \\ (m + \lambda_{22})\dot{V}_y + \lambda_{26}\dot{\omega}_z + (m + \lambda_{11})V_x\omega_z = \\ = Y - (G - A)\cos \nu \\ (J_z + \lambda_{66})\dot{\omega}_z + \lambda_{26}\dot{V}_y + \lambda_{26}V_x\omega_z = \\ = M_z + A(x_T - x_A)\cos \nu \\ \dot{\nu} = \omega_z \end{cases}$$

where V_x, V_y are projections of the centre of masses velocity vector on the axes, ω_z - projection of the angle

velocity of body rotation vector on the axis Oz, $G = mg$ - gravity, A – Archimedean force, x_T, x_A - distance from the vehicle nose to the centre of masses and centre of displacement, T – propulsion, ϑ - trim angle, X, Y, M_z - projections of hydro dynamical forces and their momentums of the axes.

Kinematic equations are:

$$\dot{\vartheta} = \omega_z; \quad V_x = V \cos \alpha; \quad V_y = -V \sin \alpha$$

Here α is the angle of attack of the vehicle centre of masses.

There are different ways how to calculate the loads on the HUV, so we shall consider some scenarios of the cavitating current at the tail part of the vehicle.

Scenario 1.

This Scenario is typical for linear-type motion, without any manoeuvres (Fig. 3a). In this case the cavern does not touch the surface of the vehicle, and the current at the tail part of the vehicle is fully in line with the Lighthill-Shushpanov scheme with negative cavitation figure. The cavern closes on the engine jet of the vehicle. In this case the vehicle tail is influenced only by the hydro dynamical force applied at the tail ring-type wing. This is the preferred type of motion, but in case of manoeuvre the cavitating currents might change.

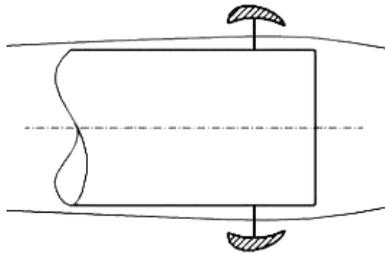


Figure 3a - Scenario №1 of HUV motion.

Scenario 2.

The HUV body may touch the cavern border (Fig. 3b). In this case the HUV is influenced by additional hydro dynamical force generated by gliding of the HUV tail over the cavern border.

In this case the Lighthill-Shushpanov cavitating current amends at the tail part of the vehicle (outside of the HUV body), which changes the parameters of the cavern closing. However, due to stability of the controlled cavitating currents the general structure of the tail current does not change.

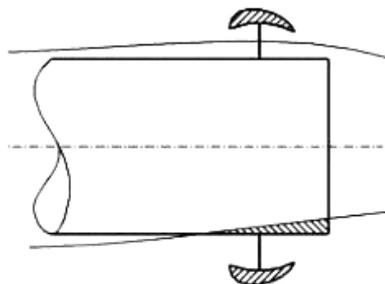


Figure 3b - Scenario №2 of HUV motion.

Scenario 3.

In case of HUV manoeuvres the tail wing may touch the cavern border (Fig. 3c). In this case the current at the tail side becomes different from the Lighthill-Shushpanov scheme, and the HUV hydro dynamical model becomes similar to the classical one with cavitating tail wing [8SuperFast 2008].

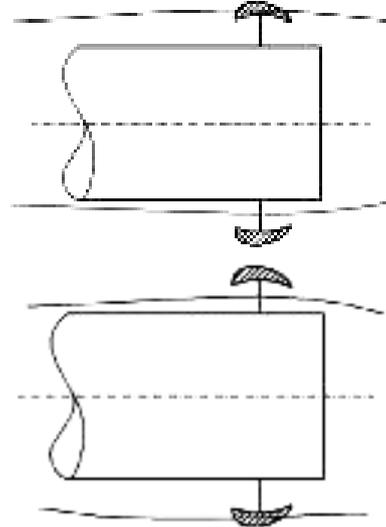


Figure 3c - Scenario №3 of HUV motion.

This scenario is the most undesirable as there is no controlled cavitating Lighthill-Shushpanov current.

In this case the hydro dynamical force at the tail wing will be different, as the tail wing is not fully submerged in the water. However, it might generate an additional hydro dynamical force, similar to the gliding force [9, 10].

Cavern geometry

Let's assume that the cavern from the cavern-forming disk to the tail ring-type wing is natural and ellipsoid (Fig.2.), [16-18], and its geometry can be formulated by the following equations.

$$R_K = R_H \sqrt{\frac{C_{x0}(1+\sigma)}{\sigma}} \text{ - radius of the maximum section}$$

$$\text{of the cavern; } L_K = \frac{R_K}{h_1 \sqrt{\sigma}} \text{ - medium length of the}$$

cavern, $h_1 = 0,47 \div 0,49$, here σ is the cavitation number, R_H – radius of the cavern-forming disk, C_{x0} – coefficient of the nose disk resistance,

$$R^2(x) = R_K^2 \left[1 - \frac{(x-L_K)^2}{a^2} \right] \text{ - current cavern radius,}$$

$$\text{where } a^2 = \frac{R_K^2 L_K^2}{R_K^2 - R_H^2}.$$

The cavitating current has a more complicated geometrical form after the tail wing. The method of its calculation is described in [11].

Forces acting at the vehicle

Let's investigate the forces acting at the HUV with different scenarios of the tail cavitating current.

1) Hydro dynamical force at the ring-type tail wing.

This force is created when the ring-type tail wing moves in a permanent flow. Such scenario can be applied for all previously mentioned scenarios of tail cavitation current. In scenarios 1 and 2 the ring-type wing is fully covered with water, and in scenario 3 the wing is partially submerged. The mathematical model for the calculation of the mentioned force in each scenario is based on the model for T-type tail wing (see below) [12 Vladimirov].

Let's consider the ring wing as a set of N flat wings placed in the radius equal to the ring-type wing R_{kk} . In this case the lift force at the ring wing Y_{kk} will be:

$$Y_{kk} = \sum_{i=1}^n Y_{k_i}$$

where Y_{k_i} is the lift force.

Further we shall define Y_{k_i} according to [12 Vladimirov]. According to [1] the lift force coefficient will be

$$C_{y_k} = \frac{2\pi k_0 \xi_2 (\alpha_{kp} + \alpha_1 + \mu \xi)}{1 + \frac{2k_0}{\lambda} \frac{\xi_2}{\xi_1} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)}$$

where $k_0 = 0,8$, $\xi\left(\frac{2h}{b}\right) = \xi_2^{-1}\left(\frac{2h}{b}\right) - 1$, μ - wedging angle of the wing, $\alpha_{kp} = \alpha \sin \tau + \alpha_{ycm.k}$ - wing angle of attack, where τ - rectangular angle between the horizontal axis and the vertical line on the wing middle.

To provide stability for the HUV it is logical to use a special wing tail - e.g., with different angles at the upper and lower parts.

In this case:

$$0^\circ \leq \tau \leq 180^\circ \quad \alpha_{ycm.k} = \alpha_{1ycm.k}$$

$$180^\circ \leq \tau \leq 360^\circ \quad \alpha_{ycm.k} = \alpha_{2ycm.k}$$

where $\alpha_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{df(t)}{dt} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$, $f(t)$ - profile equation;

α_{ycm} - adjusting angle; $\xi_1\left(\frac{h}{L}\right)$, $\xi_2\left(\frac{2h}{b}\right)$ are defined by experiments.

Let's assume $\xi_1\left(\frac{h}{L}\right) = \xi_2\left(\frac{2h}{b}\right) = 1$.

$$\text{As result } C_{y_k}^\alpha = \frac{C_{y_k}^\sigma}{\lambda_{kr}} = \frac{2\pi k_0 \xi_2}{1 + \frac{2k_0}{\lambda} \frac{\xi_2}{\xi_1} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right)}$$

Wing resistance coefficient will be [1]:

$$C_{x_k} = \frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{4}{\pi} \mu\right) \mu^2 + \frac{C_{y_k}^2}{\pi \lambda \kappa_1} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) + 2C_{ir} + 2\pi \left[\alpha + \mu x + \alpha_2 + \alpha_{ust} + \sigma + \frac{C_{y_k}}{\pi \lambda \kappa_1} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right) \right]^2$$

where $\alpha_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Forces on the wing:

$$Y_{kp} = C_{y_{kp}} \frac{\rho V^2}{2} S_{kp}, \quad X_{kp} = C_{x_{kp}} \frac{\rho V^2}{2} S_{kp}$$

where $S_{kp} = l_{kp} h_{kp}$ l_{kp} - wing span, h_{kp} - wing width,

$$l_{kp} = 2R_K \sin \frac{\pi}{n}, \quad R_K - \text{radius of the ring-type wing}$$

(R_{1K} and R_{2K} if the ring is not symmetrical), n - number of wing particles

$$Y_{k_i} = Y_{kp} \sin \tau$$

The momentum on the wing will be the combination of the lifting and resistance forces:

$$m_{z_k}^\alpha \equiv C_{y_k}^\alpha \frac{x_k}{L} + C_{y_k}^\alpha \frac{h_k}{L} \quad m_{z_k}^\sigma \equiv C_{y_k}^\sigma \frac{x_k}{L} + C_{y_k}^\sigma \frac{h_k}{L}$$

Here x_k is the distance from the centre of masses to the wing, h_k - wing elevation over the vehicle axis of symmetry.

Let's assume that the vehicle is oriented with the wedging angle towards the direction of motion [1, 2]. Тогда $C_{x_c} = 0,3$ for the wedging angle $\beta = 50^\circ$,

$M_{z_c} = X_c h_c$, where h_c is the centre of pressure.

For adjoint masses of the wing λ_{i_k} , which are parts of differential equations, let's assume that

$$\lambda_{11} = 0; \quad \lambda_{22} = \rho \pi l^2;$$

$$\lambda_{26} = \rho \pi l^2 x_k; \quad \lambda_{66} = \frac{\rho \pi l^2}{8}$$

where l - half-length of the plate, x_k - coordinates of the wing centre.

2) Force appearing at the HUV gliding over the cavern border.

The approach has been developed by E.V. Paryshev. He has investigated the task of submerging a cylinder into the liquid through a cylinder with variable radius. [3]. The resulting formula for the hydro dynamic force acting at the cylinder with variable radius is -

$$f = \frac{\rho \pi r^2}{\varepsilon + h} \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h} V_y + \tilde{V}_R \right)^2 + h \left(\frac{2\varepsilon + h}{\varepsilon + h} \frac{dV_y}{dt} + 2 \frac{d\tilde{V}_R}{dt} \right) \right]$$

where r is the cylinder radius, ε - distance between the cylinder and the free border, $\varepsilon = R - r$, R - cavern radius, h - submersion of the cylinder into the water, V_y - speed of submersion of the cylinder into the water, \tilde{V}_R - speed of cavern radius variation.

Therefore this formula enables to identify the force acting at the cylinder whit is being submerged into liquid with variable radius.

3) Force at the cavitator

$$Y_H = Cx_0 (1 + \sigma) S_{TB} \sin \delta \cos \delta q$$

where Cx_0 , $\sigma = \frac{P_H - P_K}{q}$, δ - cavitator angle,

$$S_{TB} = \pi R_{H_{of}}^2$$

4) Force from the wing gliding on the cavern edge

It's logical to use the method similar to the one proposed to calculate the gliding force on the cavern edge to estimate this force value.

Balance and stability

The equations for the stable motion taken than

$\omega_z = 0$ will be

$$\begin{cases} T = X + (G - A) \sin \nu \\ Y = (G - A) \cos \nu \\ M_z = -A(x_T - x_A) \cos \nu \end{cases}$$

Let's assume that α, ϑ are minor, so $\sin \alpha = \alpha$; $\sin \vartheta = \vartheta$; $\cos \alpha = 1$; $\cos \vartheta = 1$, and also that $V = const$ as well as during the motion $T = X + (G - A) \sin \vartheta$.

Then the equations for the longitudinal turbulent motion will be:

$$\begin{aligned} (a_{11}p^2 + a_{12}p + a_{13})\Delta\vartheta + (a_{14}p + a_{15})\Delta\alpha &= b_1\Delta\delta \\ (a_{21}p^2 + a_{22}p + a_{23})\Delta\vartheta + (a_{24}p + a_{25})\Delta\alpha &= b_2\Delta\delta \end{aligned}$$

where a_{ij} are dynamical coefficients.

The conditions of non-turbulent motion will be:

$$D_K > 0 \quad D_2D_1 - D_3D_0 > 0; \quad k = 0, 3$$

If we assume that during the whole time of motion $\Delta\theta = 0$, then the equations for the angle turbulence motion can be described by one differential equation:

$$(a_2p^2 + a_1p + a_0)\Delta\vartheta = b_2\Delta\delta,$$

where $a_2 = a_{21}$, $a_1 = a_{11} + a_{24}$, $a_0 = a_{23} + a_{25}$

The conditions of non-turbulent motion $\theta = 0$ will be

$$J_z + \lambda_{66} > 0, m_3 < 0, \lambda_{22}g(x_T - x_A) \sin \vartheta_B - m_1qSL > 0$$

The first one is obvious and does not have any impact on vehicle parameters. Clauses two and three are:

$$\begin{aligned} C_0(1 + \sigma) \frac{S_H}{S} \bar{x}_T \lambda_H - C_{y_K}^{\sigma} \frac{x_K}{L} - \\ - C_{x_K}^{\sigma} \frac{h_K}{L} + X_c h_c < 0 \\ \lambda_{22}g(x_T - x_A) \sin \vartheta_B - \\ - qSL \left[\begin{array}{l} -C_0(1 + \sigma) \frac{S_H}{S} x_T - \\ -C_{y_K}^{\alpha} \frac{x_K}{L} - C_{y_K}^{\alpha} \frac{h_K}{L} \end{array} \right] + X_c h_c > 0 \end{aligned}$$

List of Literature

1. Vasin A.D., Paryshev E.V.. Submersion of the cylinder into water through free cylindrical surface. Article. Magazine «Mechanics of liquids and gases» №2 2001. Moscow.
2. Vladimirov A.N.. Approximate hydro dynamical calculation of limited underwater wing. TsAGI N. 311, 1937.
3. Grumondz V.T., Korzhov D.N., Makhrov V.P. Some models for the dynamics of high-speed underwater vehicle with tail wing motion. International conference on high-speed marine vehicles «SuperFAST 2008» Saint-Petersburg, SPbMGU, 2008.
4. Grumondz V.T., Korzhov D.N., Makhrov V.P. Stability of high speed underwater vehicle with tail wing. Magazine «MAI News» volume 17 №2 Moscow, 2010.
5. Grumondz V.T., Polovinkin V.V., Yakovlev G.A. Theory of bi-medium vehicles motion. Mathematical models for investigation. M., Vuzovskaya Kniga, 2012. ,644 pages.
6. Makhrov V.P., Kerin N.V., Pushkarev A.A. Usage of supercavitation with negative numbers of cavity for high-speed underwater motion. Results of the Conference: The Problems of the Body Motion in Liquid with High Velocity. Moscow: TsAGI-REGION, 2002. pp. 140-150 (In Russian).
7. Logvinovich G.V. Hydro dynamics of the currents with free borders. Kiev, Naukova Dumka, 1970.
8. Makhrov V.P. Aspects of the hydro dynamic design of high-speed underwater vehicles. M., MAI Editorial, 1998, 149 pages.
9. Makhrov V.P. Hydro dynamics of cavitating currents formed by external hydro dynamical factors. M., MAI Editorial, 2011, 160 pages.
10. Moiseenko A.F. Investigation of mutual influence следование взаимного влияния of the ring-type wing and the body of the vehicle Report on NIR №559, VVIA after professor Zhukovsky, 1959. - 97 p.
11. Semenenko V.N.. Modelling of longitudinal motion of underwater supercavitating vehicles. Article. Magazine «Applied hydro mechanics». Volume12 №4 2010. pp. 81-88.
12. Uvarov G.V. Speed and high-speed underwater vehicles. Articles on the investigation of high-speed vehicles motion in liquids. Moscow, 2002. pp. 31 – 43
13. Uvarov G.V.. Some aspects of design of high-speed underwater vehicles. Articles on the investigation of high-speed vehicles motion in liquids. Moscow, 2002.. pp. 44 – 56
14. Lighthill M. A note on cusped cavities. – Aeronautic. Res. Con-Report and Memor., 1949, № 2328
15. Paryshev E.V. The plane problem of immersion of an expending cylinder through a cylindrical free surface of variable radius. The International Summer Scientific School “High Speed Hydrodynamics”, Cheboksary, 2002. International Conference SuperFAST2008 Saint-Petersburg, Russia 2008.
16. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows, Backbone Publishing, 598p. 2011.

CHARACTERISTICS OF HIGH SPEED GAS JET IN CONCURRENT WATER FLOW

Yury F. Zhuravlev, Valery M. Lapin, Anton N. Varyukhin

Central Aerohydrodynamic Institute

Radio str., 17, 105005 Moscow, Russia
a.varyukhin@yandex.ru

Introduction

Present work is devoted to the study of time averaged parameters of a gas jet in the concurrent water flow. Geometry of gas jet, flow velocities and water volume fraction distribution, and other flow parameters are under consideration. This work was initiated because all known experimental and theoretical works were devoted to the problem of high speed gas flow in motionless water, see [4, 5, 6, 7]. At the same time, our study shows that the presence of concurrent water flow, even at relatively low velocities in compare with the gas flow dynamic pressure, changes the nature of the water-gas interactions at its interface and the structure of gas jet in the water flow and its boundary dynamics are rather complex and differ from gas-gas and water-water systems.

The experiments were carried out in hydrotray of TsAGI. Gas pressures upstream of the nozzle, water velocity were varied. Static and dynamic pressure, water-gas mixture velocity, water volume fraction along nozzle axis were measured. Also the flow was photographed.

The attempt to model such a flow via CFD in scope of multiphase Reynolds equations was done and presented below.

1. Experimental Setup

The experiments were carried out in TsAGI's hydrotray with working part sizes 400x400mm. To eliminate the influence of gravitation and getting flow close to the axisymmetric the bottom of the hydrotray was curved with curvature radius of 3m. This allows to compensate gravity by the centrifugal force at water flow velocities around 5m/s.

Figure 1 shows the scheme of experimental setup. Gas was supplied through a nozzle mounted in the hollow body. The diameter of nozzle throat was $d_{cr} = 3.0mm$, the diameter of nozzle exit section was $d_{out} = 3.7mm$, nozzle aperture angle was 8° . Gas pressure inside the chamber upstream of the nozzle was $p_0 = 6 - 15 \cdot 10^5 Pa$, and its temperature $T_0 = 290K$. Water velocity was $v_0 = 3 - 7m/s$. Gas was supplied from receiver through pneumatic valve. Hydraulic losses were less than 10%.

The following parameters were measured during experiments:

-pressure inside the chamber upstream of the nozzle p_0 ;

- static p_s and total p_m pressure of gas-water mixture along nozzle axis;
- water volume fraction φ_l along nozzle axis;
- flow velocity u_m along nozzle axis.

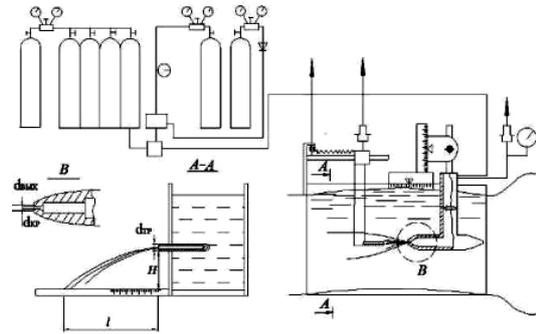


Figure 1 - Experimental setup

Static pressure was measured by a tube having inner diameter 1.5mm with a lateral intake opening at the distance of 12.5mm from the nose. Dynamic pressure was measured by the Pitot tube having inner diameter of 1.1mm. These tubes were established on the mobile carriage moving along the axis of the stream.

Water volume fraction and velocity of liquid phase were measured using the method developed by L.A. Epstain [3]. Intake opening of the calibrated tube (cross area was $S_t = 7mm^2$) was inside multiphase steam along nozzle axis (see Fig.1, section A-A). The other end of the tube through the tray wall was removed outside at height H . The horizontal length of steam flowing out from the tube is l . It allows to calculate the velocity of liquid phase:

$$u_l = l \sqrt{\frac{g}{2H}}.$$

At the same time the water flowrate Q_l was measured by collecting of water in the measuring cup during a fixed time. Having accepted a hypothesis of gas and liquid phase velocities equality the water volume fraction can be express as:

$$\varphi_l = \frac{Q_l}{S_t u_l}.$$

Tube movement along an axis of a stream allows to determine the distributions of averaged by time velocity and water volume fraction.

2. Results Of Experiments

Photos of jets at different water flow speeds are shown in Figure 2 (obtained at the expose time 0.001sec), and Figure 3 (obtained at the expose time 0.25sec).

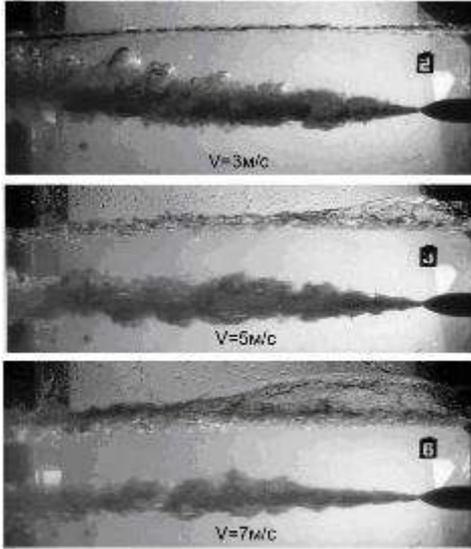


Figure 2 - Photos of jets at different water flow speeds (expose time 0.001sec, $p_0 = 1MPa$)

Visual observations and measurements of static and dynamic pressures distributions show that the structure of high pressure gas jets in concurrent water flow is similar to the compact gas jets submerged in motionless water, described in [1, 2, 4-6]. At the beginning of the jet there is a purely gas stream. Then liquid portions penetrate into the gas stream and form gas-droplet mixture. After that gas collects in bubbles and the flow becomes a mixture comprising liquid and gas bubbles.

When underexpanded gas jet flows into the atmosphere there are any “barrels” and corresponding static pressure oscillations at distance less than $\sim 10d_{out}$. But this was not detected in the experiments with gas jets in concurrent water flow. Moving liquid boundaries of gas jet form continuation of Laval nozzle, making the mode of underexpanded gas jet propagation close to the flow of fully expanded jet.

Figure 4 shows measured distribution of total pressure excess $\Delta p_m = p_m - p_h$ along nozzle axis at different water velocities, where p_h is hydrostatic pressure.

These results show that presence of water accelerates the mixing process, whereby the axial velocity (or total pressure) becomes substantially smaller than in the case of jet flow in the atmosphere. The water velocity variation slightly changes Δp_m distribution.

3. Discussion

A distinctive feature of the gas jet geometry in concurrent water flow is the fact that, from a certain distance from the nozzle the transverse size of jet ceases to increase and reaches some limiting value of radii. I.e. jet becomes practically cylindrical, and the longitudinal velocity component of liquid and gas are close to

the concurrent water flow velocity v_0 . Let's introduce the character transverse dimension of jet $D_m = 2R_m$ at rather remote distance $\bar{x} = \frac{x}{d_{out}} > 40$ from the nozzle outlet:

$$R_m = \sqrt{\frac{Q_g}{\pi v_0}}, \quad (1)$$

here Q_g is gas volume flow rate at pressure and temperature of water flow. This dimension is shown in Figure 3. It is comparable with jet middle.

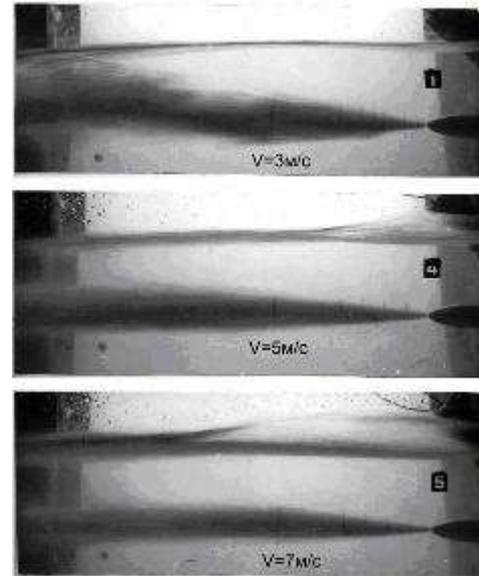


Figure 3 - Photos of jets at different water flow speeds (expose time 0.25sec, $p_0 = 1MPa$)

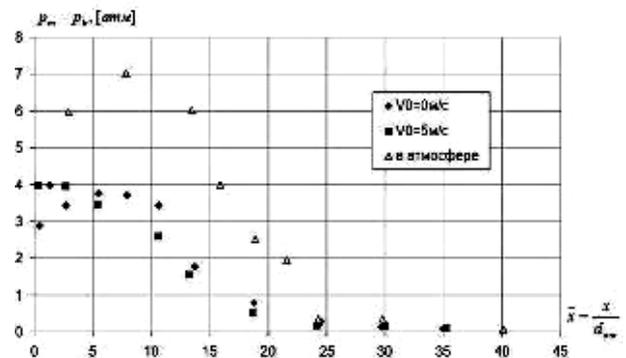


Figure 4 - Distribution of total pressure excess $\Delta p_m = p_m - p_h$ along nozzle axis

Below the attempt to describe water-gas stream theoretically is presented. The approach is similar [1, 2].

Let's introduce gas mass fraction κ_g and water mass fraction κ_l of water-gas mixture stream:

$$\kappa_g = \frac{G_g}{G_g + G_l} \quad (2)$$

Here G_g and G_l are gas and water mass flowrates correspondently.

The density of mixture is

$$\rho = \frac{G_g + G_l}{\frac{G_g}{\rho_g} + \frac{G_l}{\rho_l}} = \frac{\rho_g}{\kappa_g + (1 - \kappa_g) \frac{\rho_g}{\rho_l}} \quad (3)$$

The gas mass fraction κ_g is related to the gas volume fraction φ_g by expression:

$$\kappa_g = \frac{\varphi_g}{\varphi_g + (1 - \varphi_g) \frac{\rho_l}{\rho_g}} \quad (4)$$

Let's transform (3) and introduce gas mass fraction along jet axis:

$$\rho = \frac{\rho_g}{\left(\kappa_g + (1 - \kappa_g) \frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \kappa_{gm} \frac{1}{\rho_g}} \approx \frac{\rho_g}{\left(\frac{\kappa_g}{\kappa_{gm}} + a \right) \kappa_{gm}} \quad (5)$$

here $a = \frac{\rho_g}{\rho_l} \frac{1}{\lambda_{gm}} \ll 1$.

Using the experimentally established fact that main part of considered jet is isobaric the momentum equation can be written as:

$$\Delta I = \rho_g (u_{g0} - v_0) u_{g0} F_0 = \int_0^F (u - v_0) u \rho dF, \quad (6)$$

here u_{g0} , F_0 are gas velocity and cross-section area of the jet in the initial section (the water volume fraction in this section is zero) and u , F are the same parameters in some cross-section, v_0 is concurrent water flow velocity.

Gas mass flow rate equation is:

$$\frac{G}{g} = \rho_g u_{g0} F_0 = \int_0^F \kappa_g \rho u dF \quad (7)$$

The turbulent growth of stream thickness R in concurrent flow is:

$$\frac{G}{g} = \rho_g u_{g0} F_0 = \int_0^F \kappa_g \rho u dF \quad (8)$$

here $c = 0.27$, u_m is mixture velocity along jet axis, u_{av} is character velocity in give cross-section, that can be defined as:

$$u_{av} = \frac{\int_0^F \rho u dF}{\int_0^F \rho dF} \quad (9)$$

The distribution of parameters in the cross-section is considered like [1] in correspondence with theory of free turbulence:

$$\frac{u - v_0}{u_m - v_0} = (1 - \xi^2)^2 = f(\xi)^2 \quad (10)$$

here $\xi = \frac{y}{R}$.

$$\frac{\kappa_g}{\kappa_{gm}} = 1 - \xi^2 = f(\xi)$$

Integration of (6), (7) with (5), where $dF = 2\pi \xi d\xi$ gives:

$$\begin{aligned} J(1) &= \int_0^1 \frac{f(\xi) \xi d\xi}{f(\xi) + a} \approx 0,5 \\ J(2) &= \int_0^1 \frac{f(\xi)^2 \xi d\xi}{f(\xi) + a} \approx 0,214 \\ J(3) &= \int_0^1 \frac{f(\xi)^3 \xi d\xi}{f(\xi) + a} \approx 0,13 \\ J(4) &= \int_0^1 \frac{f(\xi)^4 \xi d\xi}{f(\xi) + a} \approx 0,09 \end{aligned} \quad (12)$$

here the numbers are approximate results of integration.

After some transformation and considering that

$$1 - \frac{v_0}{u_{g0}} = 1 - \bar{v}_0 \ll 1 \text{ we can find equation for velocity } \bar{u}_m = \frac{u_m}{u_{g0}} \text{ alone jet axis definition:}$$

$$\begin{aligned} 0,09(\bar{u}_m - \bar{v}_0)^2 + (0,13\kappa_{gm} - 0,214\bar{v}_0)(\bar{u}_m - \bar{v}_0) - \\ - 0,5\kappa_{gm}\bar{v}_0 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

The solution of (13) is:

$$\begin{aligned} \bar{u}_m = \bar{v}_0 + \\ + \frac{\left[0,214\bar{v}_0 - 0,13\kappa_{gm} - \sqrt{(0,214\bar{v}_0 - 0,13\kappa_{gm})^2 + 0,18\kappa_{gm}\bar{v}_0} \right]}{-0,18} \end{aligned} \quad (14)$$

In case of motionless liquid $\bar{v}_0 = 0$ the solution of (14) corresponds to [1]:

$$\bar{u}_m = 1,45\kappa_{gm}$$

Expression (7) allows to obtain the expression

that combines gas volume flow rate $Q_g = \frac{G_g}{g\rho_g}$, local jet radii R and velocity u_m :

$$Q_g = \pi R^2 [v_0 + 0,26(u_m - v_0)] \quad (15)$$

Using (1) and (15) we can find:

$$\frac{R}{R_m} = \left[1 + 0,26 \left(\frac{u_m}{v_0} - 1 \right) \right]^{-0,5} \quad (16)$$

Substituting (16) into (8) allows to find the equation of jet radii referred to the limiting jet radii R_m :

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{x}} = \frac{c(1-\tilde{R}^2)}{0,52} \quad (17)$$

here $\tilde{R} = \frac{R}{R_m}$ and $\tilde{x} = \frac{x}{R_m}$.

The solution of (17) at the boundary conditions $\tilde{R} \rightarrow 1$ at $\tilde{x} \rightarrow \infty$ is:

$$\tilde{R} = th\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right) \quad (18)$$

Figure 5 shows jet profiles $\tilde{D} = \frac{D}{2R_m}$ obtained

in the experiment and calculated by (18):

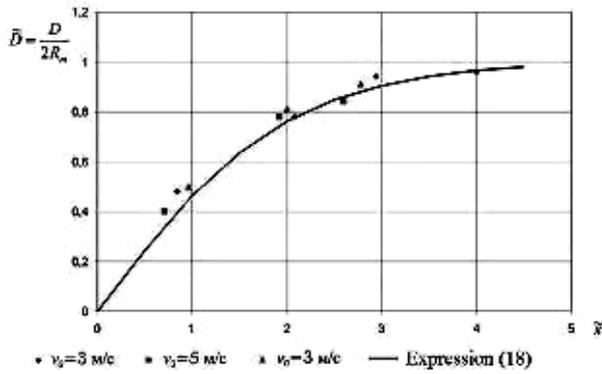


Figure 5 - Jet profile

On the other hand via (13) the gas mass fraction along jet axis can be defined as:

$$\kappa_{gm} = 2\left(\frac{R}{r_{cr}}\right)^2 (\bar{u}_m - \bar{v}_0) \times (0,09(\bar{u}_m - \bar{v}_0) + 0,214\bar{v}_0) \quad (19)$$

The liquid volume fraction is defined through gas mass fraction as:

$$\varphi_l = \frac{1 - \kappa_g}{1 + \kappa_g \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1\right)} \quad (20)$$

The calculations of water volume fraction distribution along jet axis are shown in Figure 6.

With aid of above results and [1, 2] the expression to determine the distribution of total pressure can be expressed as:

$$\bar{p}_m = \frac{\rho_m u_m^2}{\rho_l v_0^2} = \frac{2,1}{1 + \frac{\rho_m}{\rho_l} \frac{\varphi_{lm}}{\varphi_{gm}}} \quad (21)$$

The calculations of $\bar{p}_m = \frac{\rho_m u_m^2}{\rho_l v_0^2}$ with aid of

this expression and the experimental data are shown in Figure 7.

So the developed theory allows qualitative predict the water volume fraction and total pressure distribution along gas jet in the concurrent water flow.

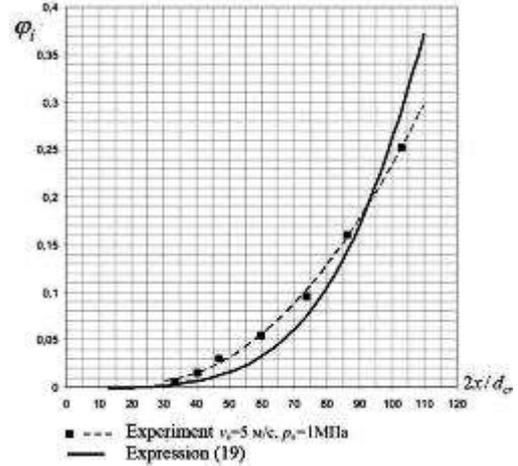


Figure 6 - Water volume fraction distribution along jet axis

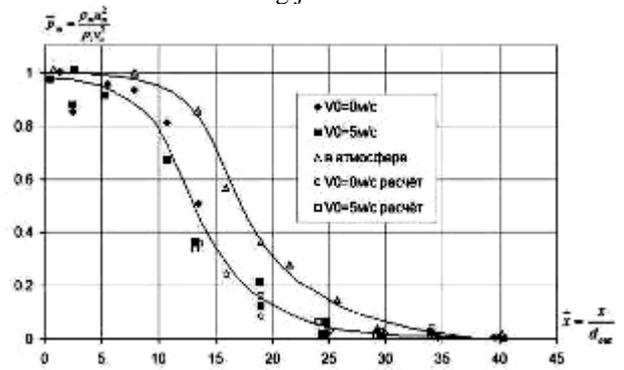


Figure 7 - Distribution of calculated and measured

relative total pressure $\bar{p}_m = \frac{\rho_m u_m^2}{\rho_l v_0^2}$ along jet axis

4. CFD Modeling

In author's previous work [10] the numerical method of multiphase flow modeling was developed. This method is based on numerical solution of time averaged multiphase Reynolds system of equations and can be used for modeling the flow of the gas jets in the concurrent water flow.

The problem is considered as axisymmetric. Computational mesh consists of 110000 elements.

At the nozzle inlet the mass flow rate is $G_{gas} = 0.0198 kg/s$, air volume fraction equals 1 and total gas temperature is $T_{0g} = 290K$. This flowrate provides total pressure upstream of the nozzle $p_0 = 10atm$.

At the initial stage the numerical calculation was performed using homogeneous approach with decreased by 10 times mass flow rate. Further calculations were carried out using inhomogeneous approach. The implicit time step was $\Delta t = 0.000001 sec$. A greater time step leads to instability.

The flow under consideration is unsteady and measured parameters were averaged during rather long time period. So to correctly compare of experimental

and numerical data the large number of time steps should be calculated. This number depends on the water velocity and time step. For present problem the required number of time steps is 120000. The calculation was progressed during 5 weeks.

Figure 8 shows the distribution of gas Mach number near nozzle. It should note considerable heterogeneous velocity field that is character for such a problem. There is small region near nozzle outlet where the flow velocity is greater by 1000 times than averaged velocity through the computational domain. It forces to set rather small time step.

Figure 9 shows the distribution of water volume fraction at different time steps.

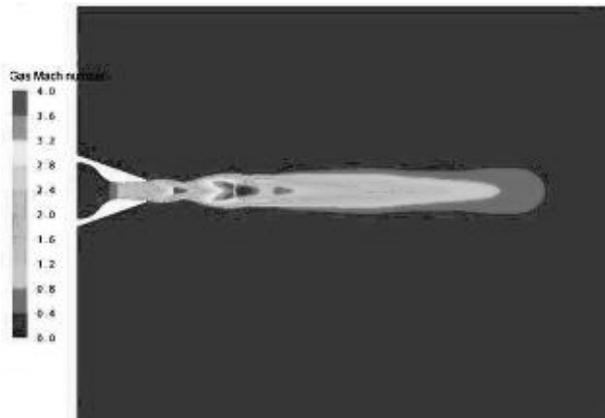


Figure 8 - Gas Mach number distribution

Figure 10 shows experimental and numerically obtained gas jet shape as the function of jet diameter $\bar{d} = d/d_{out}$ and distance $\bar{x} = x/d_{out}$ along jet axis.

Figure 11 shows the comparison of water volume fraction distribution measured in the experiments and obtained in numerical calculations.

There is a good correlation between numerical and experimental data.

The most important shortage of the method is the need of long time for calculations.

Conclusions

The experimental, theoretical and CFD studies of high speed gas jets in the concurrent parallel water flow are presented. It was shown that gas-dynamic part of underexpanded jet is rather short and at rather close distance to the nozzle gas flow becomes isobaric. Moving liquid boundaries of gas jet form continuation of Laval nozzle, making the mode of underexpanded gas jet propagation close to the flow of fully expanded jet.

The important feature of jet geometry is that at some rather remote from the nozzle outlet distance the cross-section of jet ceases increasing and the longitudinal component of flow velocity is close to the concurrent water flow velocity. The jet geometry near the nozzle is not depended on concurrent water flow velocity.

Theoretical expressions that allows defining axial jet velocity, water volume fraction distribution, total pressure distribution and jet geometry and developed.

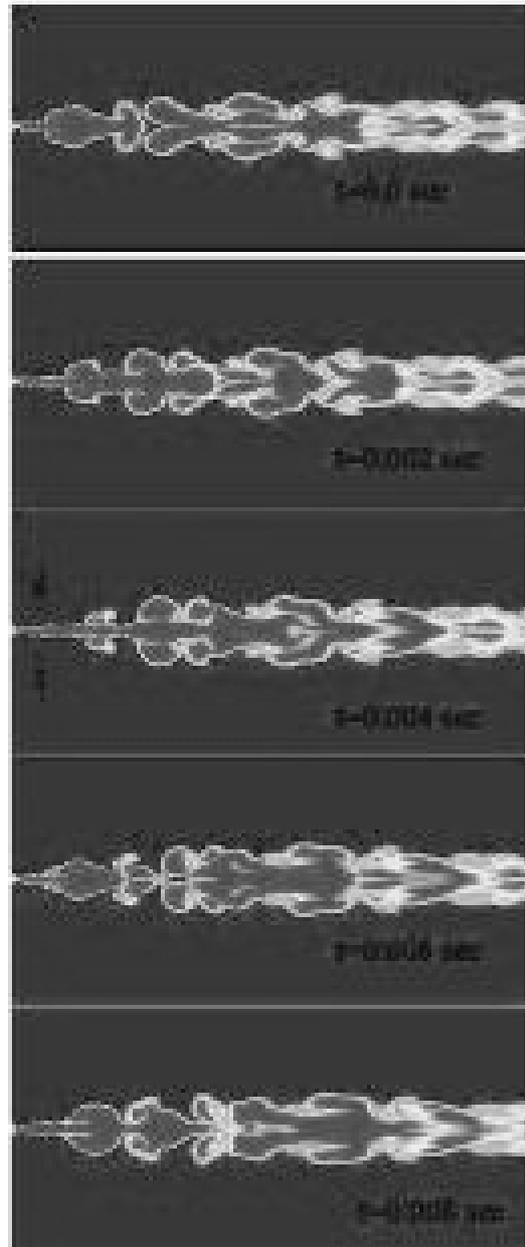


Figure 9 - Water volume fraction distributions at different time steps

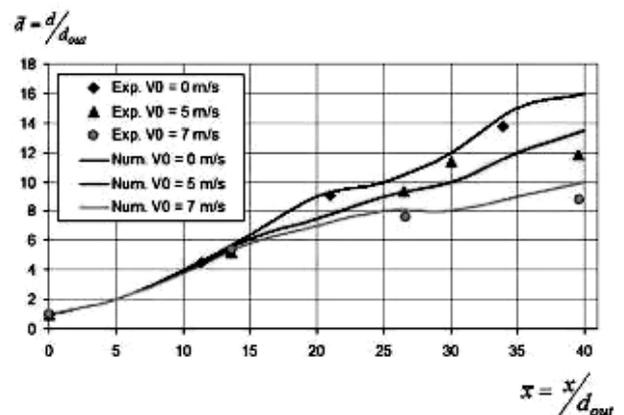


Figure 10 - Dependence of jet diameter upon distance along jet axis

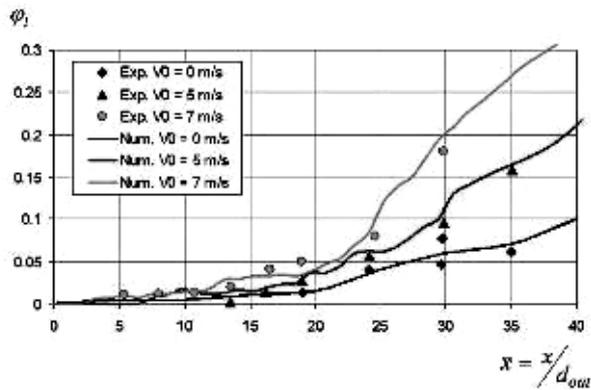


Figure 11 - Water volume fraction distributions along jet axis

References

1. G.N. Abramovich Theory of turbulent jets.- GIFML, Moscow, 1960 (in Russia)
2. G.N. Abramovich Theory of turbulent jets.- "Nauka", Moscow, 1984 (in Russia)
3. L.A. Epstein certificate of authorship №457032, 1975 г. (in Russia)
4. A.V. Ancupov, V.N. Blagosklonov Structure of submerged supersonic jets. – Trudy TsAGI, Numb.1781, 1976. (in Russia)
5. V.I. Belov Experimental study and flow model of underexpanded gas jets in water. – "Nauka", Novosibirsk, 1983 (in Russia)
6. V.A. Surin, V.N. Evchenko, I.M. Rubina Flow of gas jet in water. – IFZh, t.45, N4, 1983, p.542-554 (in Russia)
7. B.F. Glickman About gas jet in water. – News of USSR Ac. Of Science, OTN, Energy and Automatic, 1957, N2 (in Russia)
8. L.A. Epstein The device for carrying out researches in the conditions equivalent to any value of gravitational forces - certificate of authorship 476475, USSR, 1975 (in Russia)
9. A.L. Stasenko Physics mechanics of multi-phase flows: Tutorial. - M.: MIPT, 2004 (in Russia)
10. Y.F. Zhuravlev, V.M. Lapin The structure of high-pressure gas jets inside cocurrent water flow. – TsAGI' works Jour., 2685, Moscow 2009 (in Russia)
11. Anton N. Varyukhin, Yuri F. Zhuravlev Some problems of supercavitational flow cfd modeling. - Proceedings of the World Maritime Technology Conference WMTC2012. May 29-June 1, 2012, Saint-Petersburg, Russia p.611-623 (in Russia)

EFFICIENCY OF HIGH-SPEED UNDERWATER MOTION

Igor Nesteruk

Institute of Hydromechanics, NASU, Kyiv, Ukraine

Vul. Shcherbakova 63 "B", kv. 16, Kyiv, 04128, Ukraine

Abstract

Two new efficiency criteria for high-speed underwater motion are proposed. The power-efficiency and energy-efficiency factors were calculated for different water animals and vehicles. The comparison of the power-efficiency coefficients shows that the best swimmers have a streamlined shape that ensures an attached flow pattern and a laminar boundary layer at rather large values of the Reynolds number. The efficiency of different flow patterns was analysed. The information about animal shapes and locomotion should be of great use to improve robot fish and underwater vehicles.

Introduction

Improving of robot fish and high-speed underwater vehicles needs further investigations of low drag flow patterns, optimal shapes and propulsion efficiency. E.g., the very important problem of the drag reduction of the high-speed underwater hulls can be solved with the use of different flow patterns. Some axisymmetric examples are shown in Figs. 1 and 2.

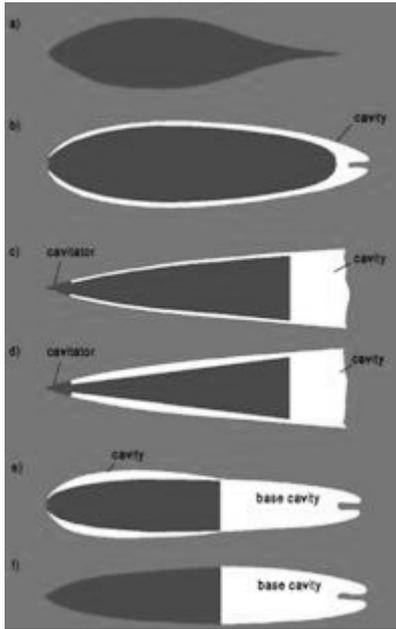


Figure 1 - Different axisymmetric flow patterns

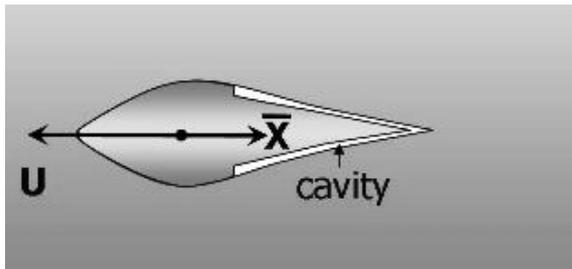


Figure 2 - Non-standard cavitator and cavity which needs no closing body

The patterns, shown in Figs. 1a and 1f correspond to the flow without boundary layer separation and low pressure drag. The supercavitating flow patterns, shown in Figs. 1b, 1c, 1d, 1e, ensure low skin-friction drag due to the small surface of the cavitator wetted by water, but the pressure drag can be rather high. To create a cavity, the slender (Figs. 1c and 1d) and non-slender slender (Figs. 1b and 1e) cavitators can be used. This idea was developed in many theoretical, numerical and experimental investigations in a lot of countries. This year we celebrate the 100 anniversary of the famous Ukrainian academician G. V. Logvinovich who sufficiently contributed both in the theoretical and experimental research of supercavitation, and practical applications of this phenomenon. His principle of independence [1] is still the very efficient tool for calculating the shape of long 3D cavities.

The non-standard flow pattern with a cavity which closes without any artificial closing body or reentrant jet (shown in Fig.2) could provide minimal pressure drag (due to the D'alambert paradox) and the skin-friction drag is reduced in comparison with the unseparated flow pattern shown in Fig. 1a (due to the smaller area wetted by water).

To compare the effectiveness of flow patterns different criteria can be used. If the vehicle velocity U and the hull volume V are fixed the simplest and effective criterion is the volumetric drag coefficient:

$$C_v \equiv \frac{2X}{\rho U^2 V^{2/3}} \quad (1)$$

When the hull caliber D or its length L are fixed, the coefficients C_D or C_L can be used:

$$C_D \equiv \frac{8X}{\rho U^2 \pi D^2}, \quad C_L \equiv \frac{2X}{\rho U^2 L^2} \quad (2)$$

The shape criteria (1) and (2) were applied in [2-4] to compare the effectiveness of different flow patterns. In this paper we will consider some new propulsion efficiency criteria and compare the swimming efficiency of animals and underwater vehicles.

1. Propulsion Efficiency Criteria

The power balance for the steady motion at velocity U , when the thrust is equal to the drag X , can be written as follows:

$$qm\eta = UX = U C_v \rho \frac{U^2}{2} V^{2/3}$$

where q is the available power per unit mass, m is that mass, and $0 < \eta < 1$ is the propulsion efficiency, which also takes into account the fin drag.

The power-efficiency factor $PE = q\eta$ can be estimated as follows:

$$PE = \frac{\rho U^3 C_v}{2 \rho_b V^{1/3}} \quad (3)$$

where $\rho_b = m/V$ is the average body density. In particular, for neutrally buoyant vehicle or animal ($m = \rho V$) the power-efficiency factor can be written as follows

$$PE = \frac{U^3 C_v}{2 V^{1/3}} \quad (4)$$

Characteristics (3) or (4) represent the “sprinter” effectiveness of underwater movement. But it is very important to have both high velocity and large range S (or operating time $T = S/U$), therefore the best vehicle must have also the greatest value of the energy-efficiency factor – the energy stored inside the vehicle per unit of its mass, which is necessary for movement at the velocity U to achieve the range S , multiplied by the propulsion efficiency coefficient η . With the use of (3) this characteristics can be written as follows:

$$EE = q\eta T = \frac{\rho U^2 C_v S}{2 \rho_b V^{1/3}} \quad (5)$$

2. Comparison Of Propulsion Efficiencies For Different Animals And Vehicles

To use formulas (3) or (5) the information about drag coefficient C_v is necessary. In many cases the information about drag is not available (especially for animals). But we can compare the characteristics with the use of C_v for some ideal case. For example, let us take the attached laminar flow around slender body of revolution (as shown in Fig. 1a).

On such slender unseparated body of revolution (with a small maximum diameter D to length L ratio) the pressure drag can be neglected and the laminar friction drag was estimated in [5]:

$$C_v = \frac{4.708}{\sqrt{\text{Re}_v}}, \quad \text{Re}_v = \frac{U V^{1/3}}{\nu} \quad (6)$$

(ν is the kinematic viscosity of water). Eq. (6) shows that the volumetric friction drag coefficient C_v does not depend on the slender body shape,

yields only approximately 8% greater value of drag than the flat plate concept (see [5]) and can be considered as minimum possible total drag for the attached flow (in some cases the supercavitating flow patterns shown in Figs. 1b-1f and 2 yield smaller drag, see, e.g., [2-4]).

Applying (6) to formula (3) yields

$$\begin{aligned} PE &= 2.354 \frac{\rho U^3}{\rho_b \sqrt{\text{Re}_v} V^{1/3}} = \\ &= 2.354 \frac{\rho U^{5/2} \sqrt{\nu}}{\rho_b \sqrt{V}} \end{aligned} \quad (7)$$

Large values of PE correspond to the better swimmers (i.e., the animals, who can produce more energy per unit time and per unit mass and use it effectively for locomotion). Smaller values of this factor correspond to the vehicles or animals which have a large drag (greater than the theoretical minimum (6)) and don't need (or cannot) to use a lot of their energy for fast underwater movement and/or cannot use their energy in proper way (e.g., due to the small efficiency η). Eq. (7) can be also rewritten in a dimensionless form

$$pe = \frac{PE}{v^{1/3} g^{4/3}} = 2.354 \frac{\rho U^{5/2} v^{1/6}}{\rho_b g^{4/3} \sqrt{V}}$$

Applying (6) to formula (5) yields

$$\begin{aligned} EE &= 2.354 \frac{\rho U^2 S}{\rho_b \sqrt{\text{Re}_v} V^{1/3}} = \\ &= 2.354 \frac{\rho U^{3/2} S \sqrt{\nu}}{\rho_b \sqrt{V}} \end{aligned} \quad (8)$$

and in a dimensionless form:

$$ee = \frac{EE}{g^{2/3} v^{2/3}} = 2.354 \frac{\rho U^{3/2} S}{\rho_b g^{2/3} v^{1/6} \sqrt{V}}$$

The values of PE and EE calculated for different vehicles and animals with the use of (7) and (8) are shown in the Table. It can be seen that some good shaped animals are more efficient than torpedoes at the same Reynolds number range. For example, *Thunnus thynnus* has 3 times greater value of PE than torpedo Mark 48, *Makaira indica* is twice more efficient as torpedo Spearfish. The supercavitating torpedo “Shkval” has rather high value of PE , but its EE factor is smaller than for torpedoes Mark 48 and Spearfish. It looks that supercavitation can be useful to increase the speed of the vehicle, but not its range. The supercavitation also drastically increases the noise of the vehicle.

The whales have much greater power-efficiency factor in comparison with submarines. The real values of q are 1.61 W/kg and 3.8 W/kg for Collins and Virginia submarines respectively. Taken the value

0.85 for the propeller efficiency, the real values of PE are approximately 100 times greater than the theoretical ones shown in Table. This fact can be explained by the same big difference between the real values of C_v (approx. 0.032 and 0.062 for Collins and Virginia submarines respectively) and minimal theoretical values which can be calculated from (6) (approx. $3 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}$).

Presented comparisons show that animals probably have much better shapes than underwater vehicles. The reasons of smaller animals' drag will be considered in the next Section.

3. Unseparated Shapes And Critical Values Of The Reynolds Number

The people who investigate the animals swimming believe that their perfect shapes ensure unseparated flow and near to zero pressure drag (e.g., [6, 7]). On the contrary, the researchers connected with technical applications think that separation on a solid body is inevitable (e.g., [8]) and can be removed only with the use of some active flow control methods (e.g., by suction [9]). This pessimistic point of view is based on the classical pressure distribution with a stagnation point at the trailing edge and positive pressure gradient in its vicinity which makes separation inevitable [8]. Nevertheless, the experiments with dolphins showed that during gliding (inertial movement without maneuvering and shape change) they really have unseparated flow pattern (e.g., [6, 7]).

To achieve an attached flow a series of special shaped bodies of revolution with favourable (negative) pressure gradients near the trailing edge were calculated and tested in the wind tunnel [2, 3, 10, 11]. An example –shape UA-2c – is shown in Fig. 3 and is rather similar to the dolphin body. The unclosed version of this shape body UA-2 revealed the attached flow pattern in experiments at $Re_L = UL/v < 300000$ (see [11]).

We will use the fact that the shapes of best swimmers do ensure the unseparated flow pattern and will try to estimate the friction drag of a slender unseparated body of revolution (in this case the friction drag practically coincide with the total one). The forebody always has the laminar boundary layer, which can become turbulent downstream due to the different factors. Nevertheless, at some subcritical values of the Reynolds number the boundary layer remains laminar. To estimate the maximum value of the Reynolds number, when the boundary layer remains laminar on a slender unseparated body of revolution, the Tollmin-Schlichting-Lin theory (e.g., [8]) and the Mangler-Stepanov transformations (see, e.g., [12]) were used and the following formula was obtained [13]:

$$Re_L \int_0^x R^2(\xi) d\xi < 59558 \quad (9)$$

If the boundary layer remains laminar over the entire surface, the integral in (9) has to be substituted as follows:

$$\int_0^1 R^2(\xi) d\xi = \frac{V}{\pi L^3} \quad .$$



Figure 3 - Comparison of the shape UA-2c with the body of a bottlenose dolphin.

Thus,

$$Re_L < \frac{59558\pi L^3}{V} \quad \text{or} \quad Re_v < \frac{59558\pi L^2}{V^{2/3}} \quad (10)$$

To calculate the critical values of the Reynolds numbers Re_L^* and Re_v^* , corresponding to the right-hand parts of the inequalities (10), the information about the body shape is necessary. Expecting the optimal body shape to be close to the dolphin or UA-2c, the ratio V/L^3 can be determined directly after calculating the corresponding shape based on the method proposed in [13] or with the use of the approximate formula $V/L^3 = 0.295(D/L)^2$, which was also applied to calculate the values of C_v for animals in Table. Then the critical Reynolds numbers can be estimated as follows:

$$Re_L^* \approx 6.3 \cdot 10^5 \frac{L^2}{D^2} \quad \text{or} \quad Re_v^* \approx 4.2 \cdot 10^5 \frac{L^{4/3}}{D^{4/3}} \quad (11)$$

Eqs. (11) testify that the boundary-layer remains laminar on slender bodies of revolution at rather large Reynolds numbers and the critical value of the Reynolds number increases with the diminishing of the thickness ratio D/L . Formulas (11) yield $Re_L^* \approx 1.7 \cdot 10^7$ or $Re_v^* \approx 3.8 \cdot 10^6$ for the bottlenose dolphin body $L/D = 5.2$.

These estimations resolve the known Gray paradox, since the Reynolds number $Re_L \approx 1.4 \cdot 10^7$ taken for estimations in [14] corresponds to the laminar flow on the dolphin shape (see also [15]).

Table - Reynolds numbers, efficiency characteristics and slenderness ratio for different animals and vehicles

Name	$Re_v \cdot 10^{-6}$	$Re_v^* \cdot 10^{-6}$	PE (W/kg)	EE (J/kg)	D/L	(D/L)*
Illex coindetii Verany	0.32	7.10	96.6	-	0.12	-
Loligo vulgaris Lam.	0.36	5.78	77.9	-	0.14	-
Hirundichthys rondeletii Cuv. et Val.	0.45	5.78	202.4	-	0.14	-
Mola mola L.	0.60	2.09	0.011	-	0.30	-
Scomber scombrus L.	0.64	4.13	13.2	-	0.18	-
Caretta caretta L.	1.03	1.58	0.16	-	0.37	-
Human (sportsmen dolphin kick)	1.3	3.59	0.095	-	0.20	-
Sarda sarda Bl.	2.28	3.59	52.4	-	0.20	-
Prionace glauca (juvenile)	2.43	4.13	83.2	-	0.18	-
Salmo trutta labrax Pall.	2.45	4.46	29.3	-	0.17	-
Sphyaena barracuda Walb.	3.42	6.38	45.8	-	0.13	-
Thunnus alalunga Bonnat.	3.88	3.16	70.6	-	0.22	0.199
Prionace glauca (adult)	4.62	4.13	12.3	-	0.18	0.166
Acanthocybium solandri Cuv. et Val.	5.19	7.10	90.7	-	0.12	-
Scomberomorus commersoni Lac.	5.64	5.27	150.8	-	0.15	0.143
Dephinus delphis ponticus Barab.	6.35	3.36	16.9	-	0.21	0.130
Tetrapturus belone Raf.	6.43	12.18	244.5	-	0.08	-
Thunnus albacora Lowe	7.29	3.36	47.9	-	0.21	0.118
Istiophorus platypterus Show and Nodder	8.75	9.05	246.5	-	0.10	-
Xiphias gladius	10.8	3.85	30.3	-	0.19	0.0877
Squalus carcharias	15.1	3.59	0.557	-	0.20	0.0682
Istiophorus albicansa	15.2	9.05	38.4	-	0.10	0.0677
Megaptera novaeanglie	15.5	3.85	0.081	-	0.19	0.0667
Orcinus orca	16.5	2.53	0.875	-	0.26	0.0637
Thunnus thynnus L.	18.8	2.98	24.9	-	0.23	0.0579
Torpedo Mark 48	23.7	10.41	8.34	$1.12 \cdot 10^4$	0.09	0.0485
Physeter catodon L.	24.2	3.85	0.06	-	0.19	0.0478
Balaena mysticetus L.	27.8	2.41	0.022	-	0.27	0.0431
Makaira indica Cuv et Val.	34.0	4.13	41.7	-	0.18	0.0371
Torpedo Spearfish	37.2	12.18	20.3	$1.12 \cdot 10^4$	0.08	0.0346
Balaenoptera physalus L.	41.2	4.84	0.097	-	0.16	0.0321
Balaenoptera borealis Less.	56.4	5.27	0.618	-	0.15	0.0253
Balaenoptera musculus L.	57.2	4.46	0.129	-	0.17	0.0251
Supercavitating torpedo "Shkval"	70.6	14.56	87.5	8745.5	0.07	0.0214
Submarine Collins class (diesel-electric)	124.7	9.05	0.019	105.7	0.10	0.014
Underwater express BAA06-13(requirements)	151.0	no data	6.13	no data	no data	0.0121
Submarine Virginia class (nuclear)	195.8	10.41	0.018	limited only by food supply	0.09	0.01

Thus slender bodies of revolution can delay the laminar-turbulent transition on their surfaces and reduce the skin-friction drag. It must be recalled that the presented estimations are valid only for the flow pattern without separation. That is why the effect of the laminar-to turbulent transition delay was not achieved on the standard (separated) slender bodies of revolution. The difference in shapes can be almost non-visible, but usually the pressure distribution is very sensitive to the

small changes in shape and similar shapes can have very different pressure gradients and separation behavior. In particular, the body shape UA-2c has $L/D=3.6$, a negative pressure gradient forebody, ending at the minimum pressure point $x \approx 0.33$, a long positive pressure gradient region (approximately 45% of the total body length) and a negative pressure gradient near its tail. The separation on the Goldschmied's body ($D=0.508$ m;

$L/D=2.9$; with a long negative pressure gradient forebody (approx. 76% of the total hull length), a short zone of the pressure increase (its length $d \approx 10\%$) and a negative pressure gradient region near the tail was removed only with the use of boundary-layer suction, see [9]).

At supercritical Reynolds numbers the friction drag on the unseparated slender of revolution can be estimated by using method presented in [5] for the laminar part of the boundary layer and the flat plate concept [16] for the turbulent one. An example of such calculations and comparison with the experimental results for the Hansen&Hoyt body [17] are show in Fig. 4. The larger drag on the Hansen&Hoyt body can be explained by presence of laminar separation revealed in experiments. It can be seen from Fig. 4 that the drag coefficient curve has a distinct minimum, corresponding to the critical value of the Reynolds number. At supercritical values the drag coefficient increases rapidly, stabilizes near the value $C_V \approx 0.01$ and then diminishes.

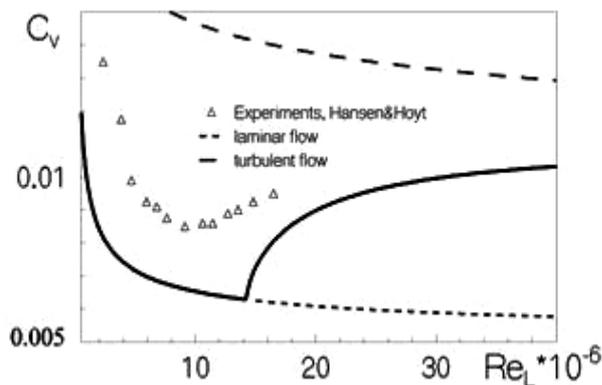


Figure 4 - Volumetric drag coefficient (solid line) calculated for a body of revolution similar to UA-2c and *Dehinus delphis ponticus* Barab. ($D/L=0.21$).

Calculations for the pure laminar and the pure turbulent boundary layers are shown by dashed lines. Markers represent the experimental measurements for Hansen&Hoyt body with $D/L=0.22$, [17].

Critical values of Reynolds numbers Re_v^* were calculated for different animals and vehicles with the use of formula (11) and presented in the Table.

4. Discussion. Which Is The Best Shape?

The Table demonstrates that the best swimmers (with the higher values of PE) are fishes which swim at subcritical values of Reynolds number (e.g., Indo-Pacific sailfish *Istiophorus platypterus*, Mediterranean spearfish *Tetrapturus belone*, Flying fish *Hirundichthys rondeletii*). Animals which swim at supercritical Reynolds numbers (e.g., dolphins, sharks swordfish *Xiphias gladius*, black marlin *Makaira indica*) have much smaller values of power-efficiency factor. It must be noted that the value of PE for juvenile Blue shark

Prionace glauca (swim at subcritical Reynolds numbers) is almost 7 times greater than for adult one

which swim at supercritical values of Re_v . Thus, the best swimmers probably ensure the attached laminar flow pattern and the small drag close the minimum value (6).

The smallest values of PE are associated with non-streamlined animals (e.g., ocean sunfish *Mola mola*, bowhead whale *Balaena mysticetus*, or sperm whale *Physeter catodon*) and submarines. The shapes of these animals and vehicles obviously cannot ensure any attached flow pattern. The low values of PE for submarines are both the result of the large supercritical Reynolds numbers and of the separation that increases the drag 3- to 5-fold in comparison to the value possible for an attached flow pattern.

When designing underwater vehicles (e.g., robot fish), a most important objective is to minimize the drag for a given volume and velocity. To solve this problem, the minimum volumetric drag coefficient C_V for the hull (the main part of the body) must be achieved at the given volumetric Reynolds number Re_v . Thus, the optimal hull shape must ensure attached and laminar boundary layer.

Since for laminar attached flow on a slender body of revolution C_V is independent of the shape (see (6)), the hull shape may be arbitrary provided it ensures a laminar attached flow. It means that the hull must be unseparated and slender enough to increase the value of the critical Reynolds number and to ensure $Re_v \leq Re_v^*$. These necessary values of $(D/L)^*$ can be calculated from (11). For animals and vehicles, which swim at supercritical Reynolds numbers, the examples of such calculations are shown in the Table.

This simple way of improving the efficiency can be used for underwater vehicles which move at moderate subcritical Reynolds numbers (e.g., torpedoes). In the case of very large Reynolds numbers (e.g., submarines) the necessary unseparated hull must be unrealizable slender (see Table). For such vehicles some non-standard flow patterns (for example, shown in Fig. 2 can be recommended). The advantages and disadvantages of supercavitating flow patterns shown in Figs. 1b - 1f will be discussed in the next Section.

Further theoretical and experimental investigations of unseparated shapes (similar to UA-2) with different thickness ratio at different angles of attack and at large Reynolds numbers are necessary in order to study the peculiarities of boundary layer separation and laminar-to-turbulent transition.

5. Discussion.

Swimming And Flying/Jumping

Some fish and molluscs (e.g., southern short-fin squid *Illex coindetii*, European squid *Loligo vulgaris*) are both perfect swimmers and rather good fliers. They can change their shape during flight to create lift forces (see, e.g., [18]). Dolphins

jump into air during their motion. The animals use flying/jumping to escape from predators and to diminish the energy with is necessary for locomotion (since the friction drag in air is approximately 800 times smaller).

The same phenomenon can be used in the case of vehicles in order to increase their range or EE value. For example, an optimal shaped body having a velocity 50 m/s can jump in air at the distance circa 250 m. This distance can be increased with the use of shape changing and creating the lift force. Some water entry tests of the unseparated bodies of revolution are already done in [19].

The supercavitating flow patterns shown in Figs. 1b - 1f and 2 are examples of simultaneous swimming and flying, since a part of the body - cavitator - is wetted by water, another part of the hull is located in cavity an fly in the gas.

In comparison this the attached flow or one shown in Fig. 2, the supercavitating flow patterns shown in Figs. 1b - 1f have large pressure drag. In particular, the volumetric pressure drag coefficient can be calculated as follows

$$C_{Vcav} = \sqrt[3]{\frac{9\pi\sigma^4}{-16\ln\sigma}}, \quad (12)$$

$$\sigma = \frac{2(p_a + \rho gh - p_c)}{\rho U^2} \quad (13)$$

for the flow pattern 1b and a conic cavitator with the angle 2θ , $\theta > 25^\circ$ [20]. Here p_a and p_c are pressures in atmosphere above the free water surface and in cavity, h is the operating depth of the vehicle. the value of C_{Vcav} does not depend on θ for these non-slender cavitators and tends to zero with diminishing of the cavitation number σ .

Another disadvantage of the supercavitating flow patterns is additional drag connected with the creating the lift drag which must be equal to the part of the vehicle weight $\Delta G = k_1 \rho_b V g$ which is non-compensated by buoyancy, i.e. $Y = \Delta G = k_1 \rho_b V g = k \Delta X$, where ρ_b is the average vehicle density and $k = Y / \Delta X$ is the aerodynamic efficiency. The corresponding additional volumetric drag coefficient can be given as follows

$$\begin{aligned} \Delta C_V &= \frac{2\Delta X}{\rho U_\infty^2 V^{2/3}} = \\ &= \frac{2\Delta G}{k \rho U_\infty^2 V^{2/3}} = \frac{2k_1 \rho_b}{k \rho Fr_V^2} \\ Fr_V &= \frac{U_\infty}{g^{1/2} V^{1/6}} \end{aligned} \quad (14)$$

Here Fr_V is the volumetric Froude number.

Formulas (6), (12) and (14) must be taken into account in order to decide which flow pattern is preferable. Let us compare the corresponding characteris-

tics for supercavitating torpedo "Shkval". A vehicle with the attached laminar flow could have the value $C_V \approx 0.56 \cdot 10^{-3}$ (see (6)), but very small thickness ratio $D/L \approx 0.021$ (see Table). Formula (12) yield the value $C_{Vcav} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ at $\sigma = 0.016$ (this value is the minimal cavitation number allowing locating the hull of $D/L \approx 0.07$ in the cavity, see the Garabedian formula $L/D = \sqrt{-\ln \sigma / \sigma}$, [21]). Even at $\sigma = 0.01$ the corresponding value $C_{Vcav} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ is 3 times greater than formula (6) yields. To have the values of the cavitation number smaller than 0.016, the ventilation is necessary even at small depth (see (13)). The use of gas injection into the cavity needs additional energy and decreases the vehicle efficiency. Formula (14) can give the values of ΔC_V greater than 0.001 in the case of this torpedo.

For great values or Reynolds number, e.g., $Re_V > 5 \cdot 10^7$ the flow pattern shown in Fig. 2 can be recommended. If a part of a vehicle is covered by the cavity, which closes itself (without any fictitious closing rigid body or re-entrant jet, see Fig. 2), the hull's pressure drag has to be near to zero (due to Dalmert paradox). The skin-friction drag of such vehicle can be reduced, since the large part of its surface has no contact with the water. In addition, such vehicle can have rather high buoyancy and the additional drag ΔC_V can be reduced (see (14)).

Due to the smaller area of contact with the water, the skin-friction drag coefficient can be estimated as follows for the laminar attached boundary-layer, [22]:

$$C_{dV} = \frac{4.708}{\sqrt{Re_V}} \sqrt{\frac{V_b}{V}}, \quad (15)$$

where V_b is the volume of the body's part wetted by water.

In order to realize the flow pattern shown in Fig. 2, a special investigation has been done in [23]. It was shown that shapes of the axisymmetric slender cavities can be not only elliptical. The cavity longitudinal cross section can be also a parabola, a concave and convex hyperbola and even a straight line (at one specific value of the cavitation number). The last case shows, that the slender body theory is applicable up to the end of the straight line cavity (in comparison with the elliptical cavities with the infinite slope at the blunt trailing edge). Therefore, such cavity can close itself and does not need any artificial closing scheme.

To support this fact the nonlinear calculations have been performed in [23] with the use of sources and doublets located on the axis of symmetry. Their intensity was chosen to satisfy the constant pressure condition on the cavity surface. An example is presented in Fig. 5. For the body shown in Fig. 5 ($V_b/L^3 = 2.6 \cdot 10^{-4}$, $V/L^3 = 5.5 \cdot 10^{-4}$),

equation (15) yields the drag diminishing of 31% (in comparison with the unseparated flow pattern $V_b = V$). Diminishing V_b/V leads to a further drag reduction. Nevertheless, the short cavitators have more deep pressure minimum on their surface. This fact can cause separation (and cavitation) upstream to the point $x = 0$ and another flow pattern with a large pressure drag. The separation behavior is very important for such flow pattern and has to be investigated in a water tunnel.

6. Conclusions

Two new efficiency criteria - the power-efficiency and the energy-efficiency factors were developed. The values of the power-efficiency and energy-efficiency factors were calculated for different water animals and vehicles. The comparison of the power-efficiency coefficients shows that the best swimmers have a streamlined shape that ensures an attached flow pattern and a laminar boundary layer at rather large values of the Reynolds number. The critical values of the Reynolds number for the slender unseparated body of revolution were estimated. The efficiency of different flow patterns was analysed. The information about animal shapes and locomotion should be of great use to improve robot fish and underwater vehicles.

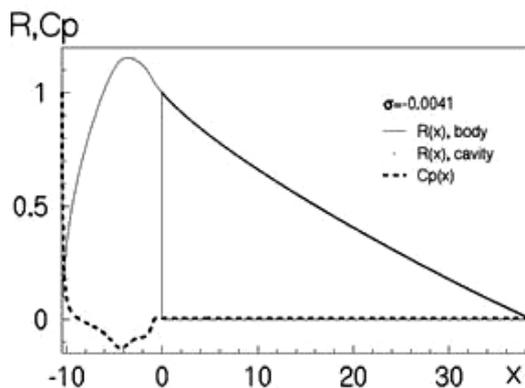


Figure 5 - Axisymmetric cavitator ($x < 0$) and cavity, which closes itself ($x > 0$). Shape and pressure distribution.

The non-standard supercavity flow pattern was proposed with the cavity, which closes itself without any fictitious closing schemes. The total drag of the corresponding vehicle can be reduced due to the small value of the pressure drag. The water tunnel tests of such flow patterns are necessary.

Acknowledgments

The author thanks Julyan Cartwright, Alberto Redaelli and Guiseppa Passoni for very useful discussions of the results.

References

1. Logvinovich, G.V., 1969, Hydrodynamics of Flows with Free Boundaries, Kiev, Naukova Dumka Publishing House, 208 p. (in Russian). English translation: Logvinovich G.V., 1973, Hydrodynamics of free-boundary flows, Halsted Press, Israel.

2. I. Nesteruk, The Problems of Drag Reduction in High Speed Hydrodynamics, Int. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics", Cheboksary, Russia (2002) 351- 359.

3. I. Nesteruk, Can Shapes with Negative Pressure Gradients Prevent Cavitation, Proc. of FEDSM'03, 4th ASME JSME Joint Fluids Engineering Conference, Honolulu, USA (2003) No. FEDSM2003-45323.

4. Nesteruk, I. 2012 Drag Effectiveness of Supercavitating Underwater Hulls, I. Nesteruk (ed.). Supercavitation, Springer, pp. 79-106.

5. I. Nesteruk, Reserves of the hydrodynamical drag reduction for axisymmetric bodies, Bulletin of Univ. of Kiev, Ser.: Phys. & Math. 4 (2002) 112-118.

6. Aleyev, Yu. G. (1977). Nekton. Dr. W. Junk, The Hague.

7. Rohr, J., Latz, M. I., Fallon, S., and Nauen, J. C. (1998). Experimental approaches towards interpreting dolphin-stimulated bioluminescence. J. Exp. Biol. 201, 1447-1460.

8. L.D. Landau, E.M. Lifshits, Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics), Butterworth-Heinemann, 1987.

9. F.R. Goldschmied, Integrated hull design, boundary layer control and propulsion of submerged bodies: Wind tunnel verification, In AIAA (82-1204), Proceedings of the AIAA/SAE/ASME 18th Joint Propulsion Conference (1982) 3-18.

10. I. Nesteruk, Experimental Investigation of Axisymmetric Bodies with Negative Pressure Gradients, Aeronautical J. 104 (2000) 439-443.

11. Nesteruk I., 2003, "New type of unseparated subsonic shape of axisymmetric body", Dopovidi NASU, No. 11: 49-56. (in Ukrainian).

12. Loitsiansky L.G., 1978, Mechanics of liquid and gas, Moscow: Nauka.

13. Nesteruk I., 2002, Peculiarities of Turbulization and Separation of Boundary-Layer on Slender Axisymmetric Subsonic Bodies, Naukovi visti, NTUU "Kyiv Polytechnic. Inst.", N 3, pp. 70-76. (in Ukrainian).

14. Gray, J. (1936). Studies in animal locomotion VI. The propulsive powers of the dolphin. J. Exp. Biol. 13, 192-199.

15. I. Nesteruk, J.H.E. Cartwright, Turbulent skin-friction drag on a slender body of revolution and Gray's Paradox, J. Phys.: Conf. Ser. (2011) 318 022042; doi:10.1088/1742-6596/318/2/022042

16. Hoerner S.F., 1965, Fluid-Dynamic Drag.

17. Hansen R.J., Hoyt J.G., 1984, Laminar-To-Turbulent Transition on a Body of Revolution with an Extended Favorable Pressure Gradient Forebody, Journal of Fluids Engineering, v. 106, pp. 202-210.

18. K. Muramatsu, Y. Yamamoto, T. Abe, K. Sekiguchi, N. Hoshi, J. Sakurai. (2013). Oceanic squid do fly. Mar Biol, DOI 10.1007/s00227-013-2169-9

19. Nesteruk I. & Zverkhovskiy O., 2010, Experimental Investigations of Water Entry of Axisymmetric Bodies with the Negative Pressure Gradients, Prykladna gidromekhanika, v. 12(84), N 3, pp. 47-53. (In Ukrainian).

20. Nesteruk I., 2003, Drag calculation of slender cones using of the second approximation for cre-

ated by them cavities, *Prykladna gidromekhanika (Applied Hydromechanics)*, Kyiv, 5(77), No. 1. pp. 42-46. (in Ukrainian).

21. Garabedian P.R., 1956, Calculation of axially symmetric cavities and jets, *Pac. J. Math.*, Vol.6, No.4, pp. 611-684.

22. Buraga O.A., Nesteruk I. and Savchenko Yu. M., 2002, "Comparison of the slender axisym-

metric bodies drag by unseparated and supercavitation flow patterns", *Prykladna gidromekhanika (Applied Hydromechanics)*, Kyiv, 4(76), No. 2: 3-8. (in Ukrainian).

23. Nesteruk I., 2004, "Partial cavitation on long bodies", *Prykladna gidromekhanika (Applied Hydromechanics)*, Kyiv, 6(78), No.3: 64-75. (in Ukrainian).

PROPULSION PERFORMANCE OF AN AXISYMMETRIC BODY WITH IDEAL PROPULSOR IN VISCOUS FLUID

Alexander S. Achkinadze

Saint Petersburg State Marine Technical University

3, Lotsmanskaya street, Saint Petersburg, Russia, 190008
achkin@mail.ru

Abstract

In the paper the approach developed by the author is used for calculating the propulsion performance and coefficients of interaction between an axisymmetric body and the ideal propulsor in viscous fluid. The distributions of static pressure and axial projection of relative velocity over the wake cross-section was preliminary found from a numerical experiment when the flow around the given body of revolution was calculated for the two cases, viz. with and without operating propulsor. Three diameters of the actuator disk were considered in the variants studies. The calculations show that the propulsive efficiency is somewhat reduced as the diameter is increased but remains to be very high (the propulsive efficiency is 0.9985). When the actuator disk diameter is 0.3 maximum diameter of the axisymmetric body it is seen from the calculations that the significant wake has an important effect in this variant (the wake fraction equals 0.3965). The hull efficiency here is 1.532, while the open-water propulsor efficiency is 0.6517 and propulsive efficiency equals 0.9985. The proposed approach is believed to be promising for propulsion performance estimations for waterjet propulsors, in particular those having sophisticated configurations with several propulsive units, for handling the data obtained in test tanks including relevant measurements in the cross-section of hydrodynamic wake of the “hull-propulsor” complex.

Introduction

The momentum theorem and conservation-of-energy principle were applied by the author [1], [4], [5] to derive approximate analytical equations for the effective thrust and power delivered at the ideal propulsor using integrals over the finite surface of hydrodynamic wake far away from the “hull-propulsor” complex under uniform and straightforward motion in viscous fluid. The sub-integral functions contain distributions of static pressure and axial projection of relative velocity over the wake cross-section. The proposed “dry” analytical approach to the derivation of the above-said distributions is implemented using Fluent-type application software. For simplification the propulsor is modeled by a given distribution of pressure discontinuities over actuator disk, i.e. as the ideal propulsor. It is assumed that the flow is irrotational.

In the paper the approach developed by the author is used for calculating the propulsion performance of an axisymmetric body with the ideal propulsor in viscous fluid. The distributions of static pressure and axial projection of relative velocity over the wake cross-section was preliminary found from a numerical experiment when the flow around the given body of revolution was calculated for the two cases, viz. with and without operating propulsor. Three diameters of the actuator disk were considered in the variants studies.

Algorithm

Of Propulsion Performance Estimations

Let us first describe the algorithm for estimation of propulsion performance and interaction coefficients based on the distribution of pressure and axial projection of relative velocity in the wake cross-section behind the complex under consideration. Each step of the algorithm

is sequentially numbered. It is assumed that the “hull-ideal propulsor” complex has a given geometry. For the sake of simplicity an axisymmetric case is considered.

1) The advance speed of the complex U_0 is defined; the actuator disk diameter of ideal propulsor D is defined;

2) In the cylindrical coordinate system x, r, θ the static pressure discontinuity for the propulsor disk points is defined as the radius function $\Delta p(r)$, for simplicity the axisymmetric case is considered;

3) The propulsor thrust T is determined (more exactly the axial projection of thrust vector using an exceptional rule of sign: the thrust is assumed positive as usual when the vector under consideration is directed along the negative x -axis) and the axial thrust vector projection T_X ($T_X = -T$) is determined using the rule of signs assumed specifically in this study where the projection T_X is opposite in sign to the thrust (1),

$$T = \int_0^{D/2} (\Delta p) 2\pi r dr, \quad (1)$$

$$T_X = -T, \quad (2)$$

where r - radius of cylindrical coordinate system in the propulsor disk plane with its origin at the x -axis, D - given diameter of actuator disk;

4) Two radius-wise distributions of pressure $p_0 - p_W(r)$ and axial projection of relative velocity $u_W(r)$ in the cross-section F_W are determined for the given distance from the propulsor disk to the cross-section. These two distributions are obtained from a numerical experiment using a package of software applications, e.g. Fluent. Thus, the problem of viscous

flow around the given complex is solved for the case of operating propulsor, i.e. with the given Δp for the points in the disk representing the propulsor. The pressure discontinuity Δp on the actuator disc is refined by iteration.

5) Two radius-wise distributions of pressure $p_0 - p_w^*(r)$ and axial projection of relative velocity $u_w^*(r)$ in the cross-section F_w are determined at the given distance from the propulsor disk to the cross-section for the complex with non-operating propulsor, i.e. at $\Delta p = 0$. These two distributions are required to determine the resistance in step 8 and these are obtained from a numerical experiment using a package of software applications, e.g. Fluent. Thus, the problem of viscous flow around the given complex is solved for the case of non-operating propulsor.

6) The axial projection of the total effective thrust T_{EX}^Σ of the system is determined, i.e. the axial projection of the force acting on the complex from the fluid under uniform motion. The total effective thrust is $T_{EX}^\Sigma = 0$ for the self-propulsion point and $T_{EX}^\Sigma > 0$ for the case when the model is subject to a towing force from a virtual carriage and $F_X < 0$ [4],

$$T_{EX}^\Sigma = \int_0^{D/2} [\rho u_w (U_0 - u_w) + (p_0 - p_w)] 2\pi r dr, \quad (3)$$

7) The external axial force F_X is determined (pull-forward force $F_X < 0$ or pull-back force $F_X > 0$) to be applied to the complex under consideration, e.g., from a virtual towing carriage, to ensure zero balance of axial projections of all forces acting on the complex. This force is equal to the counter-force with the opposite sign:

$$F_X = -T_{EX}^\Sigma, \quad (4)$$

8) The axial projection of the resistance force R is found. The resistance force is calculated from formula (5) using the earlier determined (see step 5) radius-wise distributions of pressure $p_0 - p_w^*(r)$ and axial projection of relative velocity $u_w^*(r)$ in the cross-section F_w for the case on non-operating propeller, i.e. at $\Delta p = 0$ [4],

$$R = \int_0^{D/2} [\rho u_w^* (U_0 - u_w^*) + (p_0 - p_w^*)] 2\pi r dr, \quad (5)$$

9) The axial projection of the thrust deduction force is determined from the main propulsion equation (6):

$$\Delta T = -(R + T_X + F_X) = T - R - F_X, \quad (6)$$

10) The thrust deduction coefficient is found

$$t = \Delta T / T, \quad (7)$$

11) The axial projection of the effective thrust vector T_E is found using the usual rule of signs unlike the rule of sign used by the author (i.e. the said projection is greater than zero if the effective thrust force coincides

with the direction of motion). At self-propulsion point, when $F_X = 0$, the main propulsion equation gives a well-known expression $T_E = R = T - \Delta T$. In the general case under consideration we have

$$T_E = R + F_X = T - \Delta T + F_X, \quad (8)$$

12) The power externally delivered at the propulsor is determined [4]

$$P_D = R U_0 + \int_0^{D/2} \left[0,5 \rho (u_w^2 - U_0^2) + (p_w - p_0) \right] u_w 2\pi r dr \quad (9)$$

13) The generalized propulsive efficiency is found

$$\eta_{DG} = T_E U_0 / P_D, \quad (10)$$

14) The average flow velocity through the hydraulic section of equivalent isolated optimum ideal propulsor of small axial size is determined

$$u_{SOPT} = P_D / T \quad (11)$$

Remark. The equivalent isolated optimum ideal propulsor is assumed to be the propulsor having the same: geometry of actuator disk, thrust T and consumed power P_D as the non-isolated ideal propulsor under consideration. The average flow velocity through the hydraulic section (represented by a thin 2D disk) of the equivalent propulsor (11) is generally not equal to that of the non-isolated propulsor for two reasons: first, the pressure discontinuity distribution over the disk of non-isolated propulsor is not uniform $\Delta p \neq const.$ and, secondly, formula (11) is not valid for this ideal propulsor because it is neither isolated not optimum.

15) The design velocity U_A is determined which corresponds to the velocity at infinity ahead of the equivalent isolated optimum ideal propulsor of small axial size. For the isolated optimum ideal propulsor of small axial size the Froude - Finsterwalder theorem is valid and also the thrust can be expressed in terms of pressure discontinuity at the propulsor disk [2], [3]:

$$\bar{u}_{SOPT} = U_A + w_a / 2 \quad (12)$$

$$T = \rho F_P w_a (U_A + w_a / 2) = \rho F_P w_a u_{SOPT} \quad (13)$$

$$U_A = \bar{u}_{SOPT} - T / (2\rho F_P \bar{u}_{SOPT}) \quad (14)$$

where w_a - time-averaged axial projection of the absolute (induced) velocity at the infinity in the slipstream of the equivalent isolated optimum ideal propulsor, F_P - area of the hydraulic section of ideal propulsor disk equal to $F_P = \pi D^2 / 4$, where D - diameter of propulsor disk. Equation (14) is derived from (12) by substitution of w_a found using the second right-hand part of equations (13).

16) The design wake fraction is determined

$$w_T = 1 - U_A / U_0 \quad (15)$$

17) The open-water propulsor efficiency is found

$$\eta_0 = T U_A / P_D = \eta_{DG} (1 - w_T) i_Q / (1 - t), \quad (16)$$

where the relative rotative factor is assumed to be unity ($i_Q = 1$) because in the adopted model it is assumed that the flow is axisymmetric.

Calculation Study Of Interaction Between The Ideal Propulsor And The Axisymmetric Body Under Uniform Motion In Viscous Fluid

The simplest case is analyzed for illustrating the capabilities offered by the proposed approach. The domain where this approach is applicable will be clarified as more experience is gained in numerical experiments under the proposed mathematical model, including additional capabilities arising from the generalized Rankine theorem formulating the analytical optimum condition for the ideal propulsor operating behind hull in viscous fluid [4].

Let us consider the case of straightforward and uniform motion of the “hull-ideal propulsor” complex viscous fluid. As was mentioned above, nowadays the achievements in the computational fluid dynamics (CFD) make it possible to carry out numerical experiments on the above-said complex under uniform motion in viscous flow. This study has used the FLUENT software package.



Figure - Complex: Axisymmetric body with aft actuator disk

The case study considers the turbulent flow around an axisymmetric body with aft propulsor represented by a thin 2D actuator disk (see Fig.). Similar studies were conducted earlier [6], [7], [8], [9], [10]. Below are given general explanations regarding calculations for three variants with different diameters of the actuator disk (0.3; 0.8 and 1.0 maximum body diameter equal to 0.1609 m so that the actuator disk areas in m^2 were 0.001830; 0.01301; 0.02033, respectively). The given axisymmetric body shape coincides with the Patel body shape [5] which is an ellipsoid of revolution with a cone afterbody (cone angle of 43 deg.). The axisymmetric body aspect ratio is 6.2150. The hull length is 1m. The maximum diameter of the axisymmetric body is 0.1609m. The speed of uniform advance motion of the complex is 1.4334 m/s. The control cross section of hydrodynamic wake is located at a distance of four hull lengths or 82.9; 31.1; 24.9 diameters of the actuator disk for the three variants under consideration, respectively. This actuator disc is located in the transverse plane crossing the body axis in the aft at a small distance (3% body length) inward from the aftermost point of the cone.

The turbulence model $k - \omega$ SST was used for the CFD calculations, and the flow around hull was assumed as fully turbulent. The analysis was performed by specification of an axisymmetric pressure discontinuity distribution over the disk (this paper only gives the results for three variants, all with uniformly distributed pressure discontinuities over the disk), i.e. the propulsor thrust was specified rather than the effective thrust. In this case the propulsor effective thrust is known at self-propulsion point because the effective thrust under this condition is

equal to the bare hull resistance found by calculation of bare hull flow at given velocity. However the propulsor thrust is unknown because the thrust-deduction force is not known. For this reason iterations were done to ensure sufficiently accurate determination of the thrust corresponding to the self-propulsion point, i.e. when the actual effective thrust is close to the bare hull resistance. For the sake of simplicity and illustration this study assumed the simplest radius-wise distribution of pressure discontinuities represented by a constant value on the ideal propulsor disk.

The results of calculations for the three variants of different actuator disk diameters are given in Table 1. The required pressure discontinuity value was determined by iteration but the Table 1 contains only the data obtained at the final iteration step.

Remark. For each case a general type of uniform advance motion of the “hull-propulsor” complex along the negative x-axis is considered. In the general case under consideration the uniform advance motion requires that the sum of the axial projections of all acting forces be zero giving the main propulsion equation represented in two equivalent forms

$$R + \Delta T + T_X + F_X = R + \Delta T - T + F_X = 0 \quad (17)$$

This equation can be used for iteration to find the axial projection of the thrust vector T_X corresponding to zero axial external force F_X (self-propulsion point) with a given accuracy at a specified constant ship speed. Since the thrust-deduction force ΔT is not known in advance, it is required to use iterations for satisfying the inequality $F_X^2 / T_X^2 < \epsilon^2$, where ϵ^2 - square of the specified maximum error for the solution of the main propulsion equation with respect to the axial thrust projection. In a first approximation for the self-propulsion point it can be assumed that $T_X = -R$, $\Delta T = 0$. As it is seen from the results of calculations for the three variants (Table 1) the iteration process provided a high level of accuracy in solving the main propulsion equation (17) characterized by $\epsilon = 0.000425$ for variant 1 in accordance with the criterion $F_X^2 / T_X^2 < \epsilon^2$. The iteration process has actually formalized a physically clear algorithm under which the propulsor thrust to be specified is chosen in all three variant based on the condition that the effective thrust should with a given error be equal to the bare hull resistance, and obviously the hull resistance is equal in all three variants. As it is seen from the calculations for three different disk diameters and three respective pressure discontinuities on actuator disks at the same effective thrust, the generalized propulsive efficiency is smoothly reduced as the disk diameter is increased but remains at a very high level, viz. 0.998; 0.982 and 0.961, respectively.

Remark. The main inherent advantage of the proposed approach is that it offers to use the effective fields of relative velocity and static pressure containing the total velocities and pressures induced by both the hull and the propulsor. A different approach was formulated by Ivchenko in [11]. It should be noted that Ivchenko

employed a very simplified flow model viz., viscous wake behind hull and propulsor was assumed cylindrically shaped, i.e. the diffusive wake expansion was ignored.

Table 1 - Three variants illustrating applications of the propulsion estimation algorithm.

Summary results.

Operating condition: self-propulsion point.

Absolute speed of complex advance $U_0 = 1.4334 \text{ m/s}$;

Reynolds number $1.26 \cdot 10^6$;

bare hull resistance $R = 2.074 \text{ N}$;

pressure discontinuity of ideal propulsor (IP)

is constant over the disk $\Delta p = \text{const.}$

Fluid density $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$.

Characteristic	Var	Value
IP disc diameter D	1	$0.3D_{MAX} = 0.04827 \text{ m}$
	2	$0.8D_{MAX} = 0.1287 \text{ m}$
	3	$D_{MAX} = 0.1609 \text{ m}$
Area of IP hydraulic section F_P	1	0.001830 m^2
	2	0.01301 m^2
	3	0.02033 m^2
Effective thrust loading coefficient C_{TE}	1	1.105
	2	0.1554
	3	0.09944
Constant pressure discontinuity over IP disk Δp	1	1225.1 Pa
	2	166.26 Pa
	3	105.56 Pa
Thrust T	1	2.242 N
	2	2.163 N
	3	2.146 N
Axial projection of complex's total effective thrust vector T_{EX}^{Σ}	1	0.0008810 N
	2	0.0003120 N
	3	0.0002250 N
External axial force $F_X = -T_{EX}^{\Sigma}$	1	-0.0008810 N
	2	-0.0003120 N
	3	-0.0002250 N
Thrust-deduction force ΔT	1	0.1689 N
	2	0.08931 N
	3	0.07222 N
Thrust deduction factor t	1	0.07533
	2	0.04129
	3	0.03365
Axial projection of IP effective thrust vector $T_E = T - \Delta T + F_X$	1	2.073 N
	2	2.074 N
	3	2.074 N
Power delivered at IP P_D	1	2.976 Wt
	2	3.026 Wt
	3	3.093 Wt
Generalized propulsive efficiency $\eta_{DG} = T_E U_0 / P_D$	1	0.9985
	2	0.9824
	3	0.9612
Average flow velocity through hydraulic section of equivalent isolated	1	1.327 m/s
	2	1.399 m/s

Characteristic	Var	Value
optimum IP $u_{SOPT} = P_D / T$	3	1.441 m/s
Design velocity for equivalent isolated optimum IP: $U_A = u_{SOPT} - T / (2 \rho F_P u_{SOPT})$	1	0.8645 m/s
	2	1.339 m/s
	3	1.404 m/s
Design wake fraction $w_T = 1 - U_A / U_0$	1	0.3965
	2	0.06586
	3	0.02051
Open water IP efficiency $\eta_0 = T U_A / P_D$	1	0.6517
	2	0.9571
	3	0.9741
Hull efficiency $(1-t)/(1-w_T)$	1	1.532
	2	1.026
	3	0.9868

Thus, for formulating the optimum condition it was required to introduce an artificial value, namely the "friction wake fraction at infinity behind the complex", which raised a problem of experimental or theoretical evaluation of this value. It should be noted that Ivchenko used the notion of propulsor-induced velocity, apart from the velocity induced by flow around hull, to write the optimum condition, which makes it impossible to analytically describe the adopted mathematical model for viscous flow conditions. As a critical remark regarding the Ivchenko model it should also be pointed out that there is an error in his expression for the power delivered at propulsor, viz. Ivchenko gives the following equation

$$P_D = 0.5\rho \int_{F_{\infty}} u_W (u_W^2 - v_{f\infty}^2) dF_{\infty}, \quad (18)$$

which does not coincide with the equation (9) derived by the author [1], [4]:

$$P_D = R U_0 + 0.5\rho \int_{F_W} u_W (u_W^2 - U_0^2) dF_W, \quad (19)$$

It takes into account that in (9) in the concerned case $(p_w - p_0) = 0$.

It is seen that Ivchenko's formula misses the first summand in the right-hand part and the square of advance speed U_0^2 is mistakenly replaced by $(v_{f\infty})^2$, which, according to Ivchenko paper [11], is the square of axial projection of relative velocity vector associated with the viscous flow around the hull only (though it is impossible to discriminate this component from the relative velocity induced by propulsor slipstream) in the control section of the hydrodynamic wake far away from the complex. Even on presumption that the Ivchenko formula is correct, it is obvious that anyway $v_{f\infty}$ can only be a nominal the value determined for the case of flow around bare hull without operating propulsor. At operating propulsor it is impossible to discriminate the velocity induced by flow around hull from that induced by propeller operation, so the effective value of $v_{f\infty}$ cannot be found and it will always remain a nominal value by definition.

Conclusion

The study has investigated how the diameter of the ideal propulsor actuator disk fitted in the aft of axisymmetric body influences the propulsive efficiency. The calculations show (see Table 1 and 2) that the propulsive efficiency is somewhat reduced as the diameter is increased but remains to be very high.

Table 2 - Propulsive efficiency versus IP actuator disk diameter referred to the maximum diameter of axisymmetric body

0.9985	0.9824	0.9612
$0.3D_{MAX} =$ $=0.04827m$	$0.8D_{MAX} =$ $=0.1287m$	$D_{MAX} =$ $=0.1609m$

The proposed approach is also viable for seeking the optimum pressure discontinuity distribution over the actuator disk using the generalized propulsion efficiency as the objective functional with concurrent optimization of hull and propulsor interaction parameters. In this study the pressure discontinuity was assumed to be uniform over the actuator disk. The calculations showed that for the three case studies the propulsion efficiency calculated for the self-propulsion point reached very high values (see the Table 2), therefore the uniform pressure discontinuity distribution assumed here is close to the sought optimum. When the actuator disk diameter is 0.3 maximum diameter of the axisymmetric body it is seen from the calculations that the significant wake has an important effect in this case $w_r = 0.3965$. The hull efficiency here is 1.532, while the open-water propulsor efficiency is 0.6517 and propulsive efficiency equals 0.9985.

If the control cross-section of hydrodynamic wake of the system under consideration is sufficiently distant from the complex, the above-given analytical expressions are simplified because the integrals containing pressures are close to zero.

The proposed approach is believed to be promising for propulsion performance estimations for waterjet propulsors, in particular those having sophisticated configurations with several propulsive units, for handling the data obtained in test tanks including relevant measurements in the cross-section of hydrodynamic wake of the "hull-propulsor" complex. It should be emphasized that the proposed approach offers a unique advantage of di-

rect full-scale predictions avoiding the scale-effect issues.

The author is grateful to A.A. Andryushin for his valuable assistance in calculations.

References

1. Achkinadze A.S. Optimum condition for the "hull-propulsor" complex in viscous fluid and upper limit of the propulsive efficiency. Proc. Krylov Shipbuilding Research Institute, vol.49 (333), 2009. pp.159-170. (in Russian).
2. Lavrentyev V.M. General theory of marine hydraulic propeller. Proc. CNIIMF, vol.35, 1961, pp.3-39. (in Russian).
3. Kopeetsky V.V. Ideal propulsor theory. Lecture notes, LKI, 1960, p. 204 (in Russian).
4. Achkinadze A.S. Mathematical models of ship propulsors hydrodynamics. Optimum ideal propulsor operating jointly with hull in viscous fluid. Monograph. SPbGMTU, 2010. p.95. (in Russian).
5. Achkinadze A.S. One Theorem About the Maximum Efficiency System "Hull and Actuator Disk" in Viscosity Fluid. Proceedings of The First International Symposium on Marine Propulsors, smp'09, 22-24 of June, Trondheim, Norway, 2009, pp. 576-582.
6. Patel V.C., Nakayama A., Damian R. Measurement in the thick axisymmetric turbulent boundary layer near the tail of a body of revolution, J.Fluid Mech, vol.63/2, 1974. pp:345-361.
7. Report. Calculation of interaction between propeller and body of revolution in viscous fluid. vol.30069, 1983 (in Russian).
8. Stern F., Kim H.T., Patel V.C., Chen H.C. A viscous flow approach to the computation of propeller-hull interaction. J.Ship Res. vol.32, 1988. pp:246-262.
9. Stern F., Kim H.T., et al. Computation of viscous flow around propeller-body configurations: series 60 $C_B = 0.6$ ship model, J.Ship Res. vol.38, No.2, 1994, pp.137-157.
10. Srinivasan U., Arakeri J.H. Modeling of hull-propeller interaction on an axisymmetric body. International Conference in Marine Hydrodynamics 2006. pp. 675-684.
11. Ivchenko V.M. Possibilities for improvement in ship propulsion performance. Proc. Krylov Shipbuilding Research Institute, vol.185, 1962, pp.16-33. (in Russian).

THE RESONANT MECHANISM OF GAS BUBBLE BREAK-UP IN FLUID

Vladimir Vanovsky, Alexander Petrov

Moscow Institute for Physics and Technology, Institute for Problems in Mechanics RAS

vovici@gmail.com, petrov@ipmnet.ru

Abstract

One of the possible mechanisms of bubble breakup is the one due to shape instability. The resonance of radial and arbitrary deformational oscillation mode frequencies 2:1 were examined by using Zhuravlev's method of invariant normalization of Hamiltonian systems and the complete analytical solution was obtained. It has been shown the problem is fully analogical to that of the swinging spring [8, 12]. It has been shown that in order for arbitrary oscillation mode described by a high Legendre polynomial number n to be in resonance 2:1 with the radial bubble oscillations, the bubbles' radii should be proportional to n^3 . The exact expression for energy transfer period was obtained. The maximal magnitude of deformational mode due to energy transfer from radial mode has been shown to grow with the growth of n linearly. For example the relation of magnitudes in case of $n=7$ is about 20. The resonant energy transfer and huge growth of deformational mode magnitude on big n could be the explanation of bubble breakup due to shape instability.

INTRODUCTION

Non-spherical bubble oscillations were studied in a huge number of works (see [1, 2, 3], for example). The linear theory provides us the harmonic oscillations of radial and deformational modes. The resonant energy transfer can be obtained only by considering the non-linear terms in dynamic equations. The most important resonance occurs when the ratio of frequencies of radial and deformational oscillations is 2:1. For the resonance to be obtained, the quadratic terms in dynamic equations should be considered [4, 5, 6]. In [4], the method of two scales was used for overcoming divergence. The problem of ellipsoidal oscillations of a gas bubble under harmonic variation of pressure in the environmental liquid with taking into account the amplitude square terms in the equations was investigated numerically in [7] and analytically in [9],[10]. In [9, 10], the method of invariant normalization [11] was used for constructing the asymptotic solution, describing the energy transfer from radial to ellipsoidal oscillations. In the work [13], a similar investigation of the energy pumping from the radial mode into an arbitrary axisymmetrical mode was carried out. In this work we studied arbitrary 3D deformational mode. Analytical expressions describing the system's behavior were derived.

Main Part

We started from the expression for bubble radius:

$$r = a_0 \left(\begin{array}{l} 1 + a(t) + P_n^m(\cos \theta)(\varepsilon_1(t) \cos(m\varphi) + \\ + \varepsilon_2(t) \sin(m\varphi) \end{array} \right)$$

where $P_n^m(\cos \theta)$ stands for n, m 's associated Legendre polynomial. Solving Laplace's equation with Neumann's boundary conditions we obtain the velocity potential $\Phi(r, \theta, t)$ outside the bubble up to the third order of smallness on a and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Thus, we obtain the kinetic and potential energy of the system and the Lagrangian of the system:

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_{\partial\Omega} \Phi v_n dS =$$

$$= -\frac{\rho}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\eta=-1}^1 \Phi r^2(\varphi, \theta, t) \dot{r}(\varphi, \theta, t) d\eta$$

$$U = \sigma(S - S_0) + p_\infty(V - V_0) + \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]$$

Here S and V stand for the bubble's area and volume and can be easily calculated using the expression for r ; $S_0 = 4\pi a_0^2$; $V_0 = 4/3\pi a_0^3$; σ stands for the surface tension coefficient; p_∞ stands for the external pressure and γ is the gas's adiabatic coefficient.

On solving the linear system we obtain the angular frequencies for the bubble's radial and deformational oscillations:

$$\omega_a^2 = \frac{2\sigma}{\rho a_0^3} \left(3\gamma - 1 + \frac{3p_\infty a_0 \gamma}{2\sigma} \right),$$

$$\omega_\varepsilon^2 = \frac{2\sigma}{\rho a_0^3} \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2}$$

The condition of resonance for radial and deformational modes 2:1 was obtained:

$$a_0 = \frac{\sigma}{p_\infty} \left(\frac{4(n^2 + n - 2)(n + 1) + 2}{3\gamma} - 2 \right)$$

The resonant bubble radius a_0 doesn't depend on m . On Figure 1 is plotted the dependence of the resonant bubble radius on n for air bubble in water at normal conditions:

$$\sigma = 0.073 \text{ N/m}; p_\infty = 10^5 \text{ N/m}^2; \gamma = 1.4.$$

One can observe that the resonant bubble radius is increasing rapidly and the maximal n to take into account is nearby 10, where a_0 reaches approximately 1 mm.

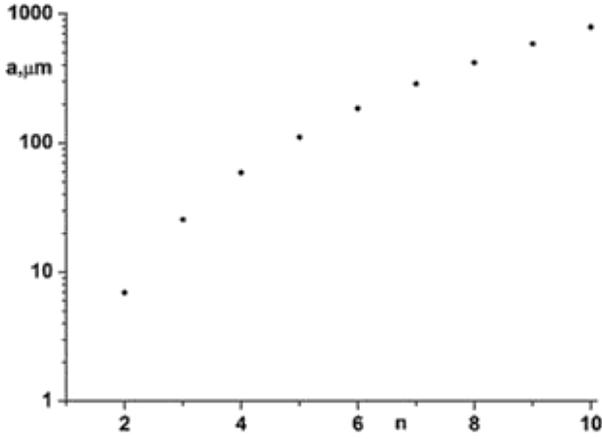


Figure 1 - Dependence of resonant bubble radius on n .

We obtain the Lagrangian of the system up to the third order of smallness on a and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ considering only the resonant terms (terms with both a and $\varepsilon_{1,2}$ degrees of freedom). On switching to the dimensionless variables

$$\tau = \omega_\varepsilon t, \quad x = a, \quad y_{1,2} = N\varepsilon_{1,2},$$

$$N^2 = \frac{(1 + \delta_{mo})(n+m)!}{2(n+1)(2n+1)(n-m)!}$$

and using the condition of resonance we obtain a rather simple expression for Lagrangian

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 - 4x^2 - y_1^2 - y_2^2) + \\ & + \frac{3}{2}x(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) + \\ & + \left(n+3 - \frac{mn(2n+1)}{4}\right)\dot{x}(y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2) - \\ & - 4(n+1)x(y_1^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

On the next step we obtain the system's Hamiltonian up to the third order of smallness on x, y_1, y_2 considering only the resonant terms:

$$H = H_0 + F_1,$$

$$H_0 = \frac{1}{2}(u^2 + v_1^2 + v_2^2 + 4x^2 + y_1^2 + y_2^2)$$

$$F_1 = -\frac{3}{2}x(v_1^2 + v_2^2) -$$

$$-\left(n+3 - \frac{mn(2n+1)}{4}\right)u(y_1v_1 + y_2v_2) +$$

$$+4(n+1)x(y_1^2 + y_2^2)$$

Analogically to the investigation of 3-dimensional oscillations of a swinging string in [8, 12] we use the procedure of Hamiltonian' invariant normalization [11]. To obtain the resonance 2:1 we obtain the normal form in the first order of approximation. In accordance with the procedure one should firstly obtain a solution of unperturbed system with Hamiltonian H_0 :

$$x(t) = X \cos 2t + \frac{U}{2} \sin 2t$$

$$u(t) = U \cos 2t - 2X \sin 2t$$

$$y_{1,2}(t) = Y_{1,2} \cos t + V_{1,2} \sin t$$

$$v_{1,2}(t) = V_{1,2} \cos t - Y_{1,2} \sin t$$

The normal form in the first order of approximation can be obtained by averaging the perturbation F_1 along the unperturbed trajectories:

$$\bar{F}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_1(x(t), y_1(t), y_2(t), u(t), v_1(t), v_2(t)) dt$$

After averaging we obtain:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = & \frac{4n + mn(2n+1) - 1}{8} \times \\ & \times (X(Y_1^2 + Y_2^2 - V_1^2 - V_2^2) + \\ & + U(Y_1V_1 + Y_2V_2)) \end{aligned}$$

In Birkhoff variables

$$z_1 = \frac{U}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}iX, \quad z_2 = V_1 + iY_1, \quad z_3 = V_2 + iY_2$$

the first approximation of the normal form can be expressed as $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{F}$, where

$$\tilde{H}_0 = i(2z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3).$$

$$\tilde{F} = -\frac{(4n + nm(2n+1) - 1)\sqrt{2}}{16} \times$$

$$\times z_1(\bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2) - \bar{z}_1(z_2^2 + z_3^2)$$

Hamilton equations and there solutions:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2iz_1 & z_1 = Z_1 e^{2it} \\ \dot{z}_2 = iz_2 & z_2 = Z_2 e^{it} \\ \dot{z}_3 = iz_3 & z_3 = Z_3 e^{it}, \end{cases}$$

Here Z_1 and Z_2 have to be substituted by the

solutions of Hamilton equations for Hamiltonian \tilde{F} :

$$\dot{Z}_1 = \frac{(4n + nm(2n+1) - 1)\sqrt{2}}{16} (Z_2^2 + Z_3^2),$$

$$\dot{Z}_2 = -\frac{(4n + nm(2n+1) - 1)\sqrt{2}}{8} Z_1(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)$$

After the substitution $\tilde{t} = \frac{4n + nm(2n+1) - 1}{3}t$

our problem becomes fully analogical to the 3-dimensional swinging string' problem [8, 12]. This problem is solved analytically. There exists an energy integral:

$$W = 2Z_1\bar{Z}_1 + Z_2\bar{Z}_2 + Z_3\bar{Z}_3$$

On denoting the total energy of n, m 's deformational mode $Z_2\bar{Z}_2 + Z_3\bar{Z}_3$ by ξ we obtain the second integral:

$$\Pi + \frac{\xi^2}{2} = E, \quad \Pi = \frac{(4n + nm(2n+1) - 1)^2}{32} (\xi^3 - W\xi^2)$$

In limit case $E \rightarrow 0$ the initial bubble oscillations are practically radial with small initial perturbation on deformational mode. A phenomenon of resonant energy transfer will take place when small initial perturbation of the deformational mode will lead the system to practically full periodical energy transfer from one mode to another. For the oscillations with initial conditions $x(0) = x_0$, $y_1(0) = y_{01}$, $y_2(0) = y_{02}$, $u(0) = 0$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ we consider the parameter $\varepsilon = \left| \frac{y_{01}^2 + y_{02}^2}{x_0^2} \right|$ to be small. An

expression for the period of energy transfer from radial to deformational oscillation mode is obtained analogically to the swinging string:

$$T = \frac{4}{(4n + nm(2n+1) - 1)x_0} \left(\ln \frac{32}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \right)$$

On Figure 2 this period is plotted for $n=7$ as function of m . One can observe that the period rapidly decreases on higher m indexes. Assuming the energy to be distributed uniformly by the deformational modes, one can conclude that the energy should be transferred mainly in the n,n -deformational mode.

The energy transfer process was simulated numerically and obtained analytically. The analytical expressions for the enveloping curves for magnitude of radial and deformational oscillations can be written in the form of solitons:

$$\begin{aligned} X(t) &= \\ &= x_0 \left(\left| \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{32}{\varepsilon} \right) \right| + \left| \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{2} \right) \ln \frac{32}{\varepsilon} \right) \right| - 1 \right) \times \\ &\times \sqrt{Y_1^2(t) + Y_2^2(t)} = \\ &= 2x_0 \left(\operatorname{sech} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{32}{\varepsilon} \right) + \operatorname{sech} \left(\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{2} \right) \ln \frac{32}{\varepsilon} \right) \right) \end{aligned}$$

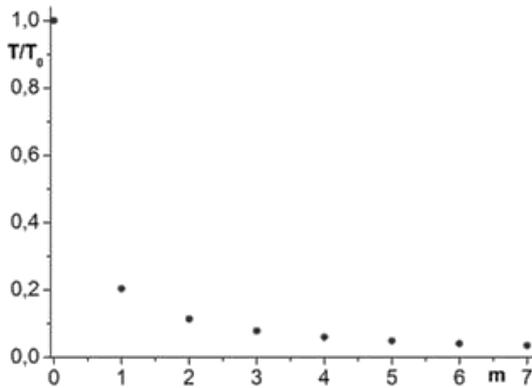


Figure 2 - Dependence of energy transfer period on m at $n=7$.

On Figure 3 is shown the plot of numerical simulation for $n=7$, $m=0$, $x_0=0.007$, $y_0=0.0013$. Enveloping

curves, obtained analytically, are represented by bold lines. By a is denoted the magnitude of radial oscillations and by ε of the deformational ones, corresponding to the n,m -Legendre polynomial.

From the plot, one can see that the analytical solution is in rather good coincidence with the numerical modelling. The energy is completely transferred from radial oscillations to deformational ones.

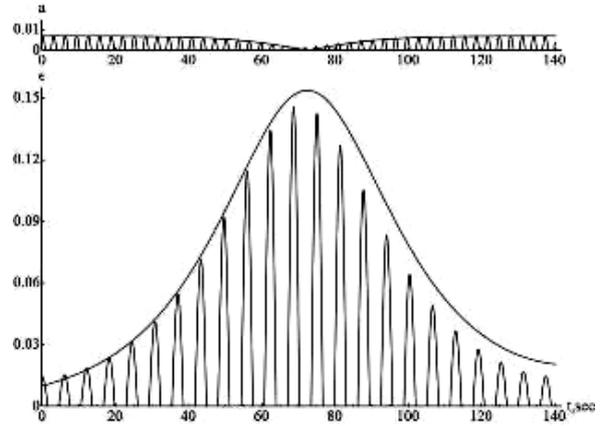


Figure 3 - Comparison of numerical modelling with analytically obtained energy transfer curves.

The enormous increase of the oscillations' magnitude after the energy transfer from radial to deformational mode could help us explain the process of gas bubble break-up. On Figure 4 is plotted the ratio of oscillations magnitudes of deformational and radial mode as function of n and m .

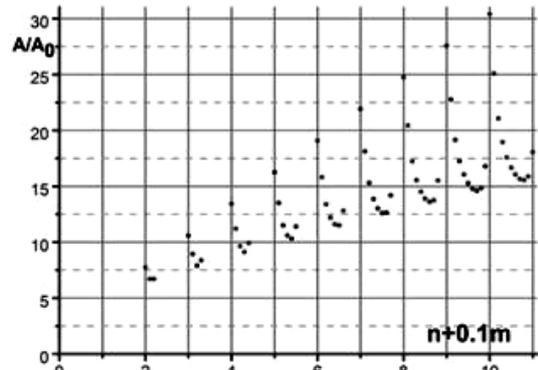


Figure 4 - Magnitudes ratio on n and m .

Conclusions

The phenomenon of the resonant energy's transfer from radial to arbitrary deformational mode is fully described analytically with the help of Zhuravlev's invariant Hamiltonian normalization procedure. The exact expressions for energy's transfer period, resonant bubble ratio and magnitudes' ratio were obtained. The obtained results are in good coincidence with the results of numerical modeling. The enormous increase of oscillations' magnitude when energy is transferred from radial oscillations to deformational ones, described by the Legendre polynomial with high n -index, could lead us to the explanation of gas bubble break-up in fluid.

Literature

1. Brenner M. P., Lohse D. and Dupont T. F. 1995, Phys. Rev. Lett. 75(5), 954.
2. Wu C.C. and Roberts P. H. 1998, Phys. Lett.A. 250, 131.
3. Hao Y., Prosperetti A. 1999, Phys. Fluids V. 11. N 6. pp. 1309-1317.
4. Ffowcs Williams J. E. and Guo Y. P. 1991, J. Fluid Mech. V. 224, pp. 507-529.
5. Longuet-Higgins M. S. 1989, J. Fluid Mech. V. 201, pp. 525-565.
6. Longuet-Higgins M. S. 1991, J. Fluid Mech. V. 224, pp. 531-549.
7. Aganin A. A. et al. 2005, Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza, No. 5, pp. 47-52.
8. Petrov A. G. and Fomichev A. V. 2009, Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, No. 8, pp. 15-26.
9. Petrov A. G. and Fomichev A. V. 2009, Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza, No. 2, pp. 102-115.
10. Petrov A. G. 2009, Analytical Hydrodynamics (Fizmatlit, Moscow, in Russian)
11. Zhuravlev V. F. 1997, Fundamentals of Theoretical Mechanics (Nauka, Moscow, in Russian)
12. Petrov A. G. 2006, Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, No. 5, pp. 18-28.
13. Vanovsky V. V. and Petrov A. G. 2011, Doklady Physics, V. 56, No3, pp. 194-198.
14. Lamb H. 1933, Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press.
15. Strasberg M. 1956, J. Accoust. Soc. Am. 28. pp. 20-26.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Димитриева Н.А.¹, Павлова Н.А.²

¹Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

²Чебоксарский политехнический институт «МГОУ им. В.С. Черномырдина»

¹Россия, 428015, г. Чебоксары, Московский пр-т 15

²Россия, 428000, г. Чебоксары, ул. К. Марса 54

dna@chuvsu.ru, pavlovana21@mail.ru

Аннотация

Математическое моделирование установившихся кавитационных течений осуществляется различными методами, один из них связан с решением интегрального уравнения, выражающего функцию тока плоского или осесимметричного течений в идеальной невесомой несжимаемой жидкости [1, 2]. Для численного решения таких уравнений А.Г. Терентьевым предложен итерационный метод [3], позволяющий осуществлять решение задачи непосредственно в физической области течения и названный поэтому «прямым итерационным методом». Этот метод ранее применён авторами к расчёту кавитационного обтекания сферы, сферических сегментов и криволинейных конусов [4, 5] в безграничной жидкости, а также к решению задач обтекания профиля с частичной каверной под свободной поверхностью [6].

В настоящей работе прямой итерационный метод применяется к исследованию кавитационного обтекания препятствий возмущёнными потоками. Рассматривается моделирование развитых каверн за препятствиями, находящимися в потоке от вихря, под свободной поверхностью, в осесимметричной трубе.

Обозначения

V_∞	Скорость жидкости на бесконечности
V_0	Скорость жидкости на границе каверны
P_∞	Давление на бесконечности
P_c	Давление в каверне
ρ	Плотность жидкости
σ	Число кавитации $\sigma = 2(P_\infty - P_c) / \rho V_\infty^2$
h	Ширина канала или радиус трубы
Γ	Циркуляция скорости

Введение

Простейшей моделью кавитационных течений является стационарное кавитационное обтекание препятствия идеальной невесомой несжимаемой жидкостью. Если для решения плоских задач в этой постановке применяются методы ТФКП, то в осесимметричном случае используют иные подходы. Известны также методы расчёта кавитационных течений, позволяющие рассматривать как плоские, так и осесимметричные задачи [7, 8]. Причём в [7] численный алгоритм сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно значений скорости и ординат точек свободной границы в некоторых точках, а в [8] – к решению нелинейного интегродифференциального уравнения. Метод прямой итерации [3], основу которого составляет метод граничных элементов [9], сводится к численному решению системы линейных алгебраических уравнений. Разработанный численный алгоритм позволяет достаточно просто рассчитывать гидродинамические задачи об обтекании как изолированного тела, так и системы тел безграничным

потоком. Этот численный алгоритм применим также к исследованию тел в канале, трубе, в весо-мой жидкости и др. В этом случае рассматривается система с дополнительными возмущающими телами.

Применению данного подхода к численному исследованию тел в плоском и осесимметричном каналах посвящена данная работа.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерное (плоское или осесимметричное) стационарное кавитационное обтекание препятствия возмущённым потоком идеальной невесомой несжимаемой жидкости. Возмущение в поток в осесимметричном случае вносит кольцевое крыло или возмущающие плоские тела, значительно больших размеров, чем обтекаемое препятствие.

Меридиональное сечение области течения за диском, совпадающее с геометрией плоского течения за пластиной, перпендикулярной набегающему потоку, показано на рис. 1.

Плотность жидкости ρ , скорость её на бесконечности V_∞ и диаметр диска $2R$ (или длина пластины) принимаются равными единице. Пусть задана также безразмерная длина каверны $L/2R$.

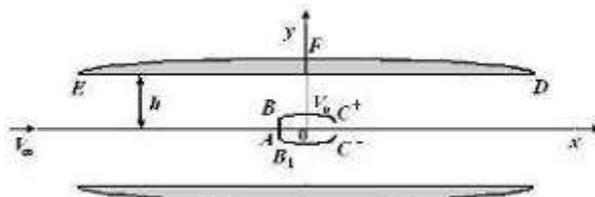


Рисунок 1 - Меридиональное сечение области течения

Функция тока $\Psi(x, y)$ таких течений удовлетворяет следующим краевым задачам

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \text{ в области течения, (1)}$$

где $\varepsilon = 0$ для плоского случая и $\varepsilon = 1$ – для осесимметричного;

$$\Psi = C_1 = 0 \text{ на } B_1AB, BC^+, B_1C^-, (2)$$

$$\Psi = C_2 = \text{const на } DEFD, (3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \begin{cases} -V_0 \text{ в плоском случае,} \\ -V_0 y \text{ в осесимметрич. случае,} \end{cases} \text{ на } BC^+, B_1C^- (4)$$

$$\Psi = \begin{cases} V_\infty y \text{ в плоском случае,} \\ V_\infty \frac{y^2}{2} \text{ в осесимметричном случае,} \end{cases} (5)$$

при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$,

$$\Gamma = 0 \text{ на } DEFD. (6)$$

Здесь x, y – цилиндрические координаты в случае осесимметричного течения и декартовы – для плоского, \bar{n} – внешняя к области течения единичная нормаль. Отметим, что если в задаче появляются дополнительные границы, то на них также выставляются условия типа (3) и (6).

Решение краевой задачи

Для решения поставленных задач представим функцию тока в интегральном виде. В плоском случае это можно сделать с помощью формулы Грина, обобщение которой для сингулярных функций получено в [11], а в осесимметричном – используем результаты [2]. Тогда, с учётом граничных условий (2), (3) и условий на бесконечности (5), получим интегральные уравнения

$$\Psi(P) = \begin{cases} y + \int_s V(Q)H(P, Q)dl(Q) + C_j & \text{в плоском} \\ \frac{y^2}{2} - \int_s V(Q)H(P, Q)dl(Q) + C_j & \text{в осесим-} \\ & \text{метрич.} \\ & \text{случае} \end{cases} (7)$$

где

$$H(P, Q) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2) & \text{в плоском} \\ \frac{\sqrt{y\eta}}{\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right] & \text{в осе-} \\ & \text{сим.} \\ & \text{случае.} \end{cases} (8)$$

Здесь $P(x, y)$ – фиксированная точка на сечении границы течения $S = AB \cup BC^+ \cup DE \cup EFD$, $Q(\xi; \eta)$ – текущая точка при интегрировании, $V(Q)$ – скорость жидкости в текущей точке Q ; $K(k), E(k)$ – полные эллиптические интегралы

первого и второго рода соответственно, $k = \frac{2\sqrt{y\eta}}{R_1}$,

$R_1 = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2}$ Постоянные C_j ($j = 1, 2$) выбираются в зависимости от положения точки $P(x, y)$: индекс $j = 1$ соответствует этой точке, лежащей на препятствии или границе каверны, индекс $j = 2$ – точке, лежащей на возмущающем теле.

Здесь неизвестны функция $y(x)$, описывающая меридиональное сечение границы каверны, скорость $V(x, y)$ на препятствии, каверне и возмущающем теле. Кроме того, заранее неизвестно и значение постоянной C_2 . Отметим, что в силу симметрии течения в осесимметричном случае, достаточно рассмотреть только верхнюю половину области течения. При решении плоских задач требование симметричности необязательно.

Численное решение задачи

Для численного решения интегрального уравнения (7) применяется метод граничных элементов [9]. Граница S разбивается системой точек (x_k, y_k) , $k = \overline{0, N}$ на заданное число N участков, каждый из которых заменяется отрезком прямой (граничным элементом) S_k , ($k = \overline{1, N}$), и на каждом элементе неизвестная функция считается постоянной, равной ее значению в середине элемента (узле) (X_k, Y_k) . Удовлетворяя уравнения (7) в узлах, получаем систему линейных уравнений:

$$Y_k = - \sum_{i=1}^N V_i \int_{S_i} H(X_k, Y_k; \xi, \eta) dl - C_j, \quad k = \overline{1, N} \quad (9)$$

в плоском случае или

$$\frac{Y_k^2}{2} = \sum_{i=1}^N V_i \int_{S_i} H(X_k, Y_k; \xi, \eta) dl + C_j, \quad k = \overline{1, N} \quad (10)$$

– в осесимметричном, в которые следует также включить уравнение (6). Последнее примет вид

$$\sum_{m=1}^{N_2} V_m l_m = 0, \quad (11)$$

где N_2 – количество граничных элементов на границе возмущающего тела.

В обоих случаях систему уравнений можно записать в матричном виде

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{Q}, \quad (12)$$

где элементы матрицы \mathbf{M} имеют вид

$$M_{k,i} = (-1)^{\varepsilon+1} \int_{S_i} H(X_k, Y_k; \xi, \eta) dl, \quad k, i = \overline{1, N},$$

$$M_{k,N+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq k \leq N_1, \\ 1, & \text{если } N_1 + 1 \leq k \leq N, \\ 0, & \text{если } k = N + 1, \end{cases}$$

$$M_{N+1,i} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq i \leq N_1, \\ l_i, & \text{если } N_1 + 1 \leq i \leq N, \\ 0, & \text{если } i = N + 1, \end{cases}$$

а вектора \mathbf{Q} –

$$Q_k = \begin{cases} Y_k & \text{в плоском случае,} \\ \frac{Y_k^2}{2} & \text{в осесимметричном случае,} \end{cases} \quad k = \overline{1, N},$$

$$Q_{N+1} = 0,$$

где N_1 – количество граничных элементов на препятствии и границе каверны.

Применение прямого итерационного метода А.Г. Терентьева

Для решения систем (12) применён прямой итерационный метод А.Г. Терентьева [3]. Итерации проводятся по следующему алгоритму:

1) задаются границы меридионального сечения обтекаемого препятствия $S^{(1)}$, границы возмущающих течение тел;

2) задаётся начальное приближение к границе каверны $S^{(2)}$ (например, в виде отрезка прямой длиной L , параллельного оси Ox);

3) вычисляется промежуточное значение скорости $\mathbf{V}^{*(m)} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$;

4) вычисляется средняя скорость на каверне

$$V_{cp} = \frac{\sum_{k:(X_k, Y_k) \in S^{(2)}} h_k V_k}{\sum_{k:(X_k, Y_k) \in S^{(2)}} h_k},$$

где h_k – длина граничного элемента, скорость в узлах на каверне заменяется на V_{cp} , в узлах на твёрдых границах скорости сохраняются, получается вектор $\mathbf{V}^{(m)}$; вычисляется число кавитации

$$\sigma_m = \left(\frac{V_{cp}}{V_\infty} \right)^2 - 1;$$

5) по формуле $\mathbf{Q}^{(m)} = \mathbf{M}(\mathbf{Q}^{(m-1)})\mathbf{V}^{(m)}$ вычисляются ординаты узлов по скорректированной скорости и определяются ординаты узлов свободной поверхности; ординаты узлов на твёрдой границе заменяются заданными;

б) находятся приращения ординат узлов свободной границы и скоростей на твёрдых границах в двух последовательных итерациях; если заданная точность не достигнута, шаги 3) – 6) повторяются.

Численные результаты

Описанный алгоритм применён к исследованию кавитационного обтекания профиля Жуковского и диска в возмущённых потоках.

Обтекание профиля с частичной кавитацией в канале с криволинейными границами. Задача обтекания профиля потоком от вихря моделируется течением между двумя дугами концентрических окружностей. Возмущение в поток вносят два тела, внутренние границы которых – дуги окружностей (рис. 2) с радиусами $R_2 = 8$ (для верхнего тела) и $R_3 = 7$ (для нижнего тела). Ширина канала равна $h = R_2 - R_3 = 1$.

Задача сводится к исследованию кавитационного обтекания системы трех профилей в безграничном потоке. Следовательно, интегральное уравнение (7) (плоский случай) содержит 3 неизвестных

параметра C_1, C_2, C_3 , для определения которых задаются условия Жуковского – Чаплыгина $\lim_{s \rightarrow a+0} V(s) + \lim_{s \rightarrow a-0} V(s) = 0$, где a – дуговая координата задней кромки первого профиля, и два условия об отсутствии циркуляции (11) на возмущающих телах.

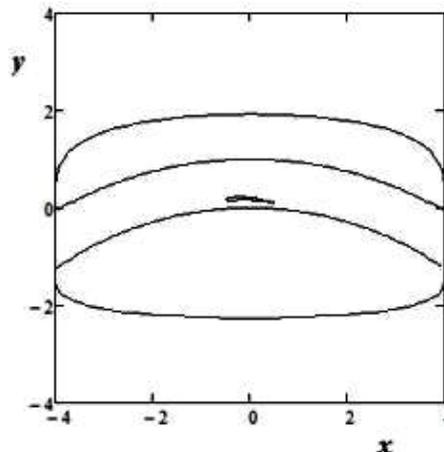


Рисунок 2 - Профиль в канале с криволинейными границами

Численные расчеты проводились для профиля Жуковского с параметрами $\kappa = 0.1, d = 0.05, c = 0$, которые характеризуют искривленность, толщину и закругленность задней кромки при угле атаки $\alpha = 10^\circ$. Расстояние от задней кромки профиля до нижней границы, h_c , варьируется. На рис. 3,а представлен профиль с частичной каверной длиной $L_c = 0.47$ в канале с криволинейными границами при расстояниях: $h_c = 0.1$ (кривая 1), $h_c = 0.5$ (кривая 2) и $h_c = 0.7$ (кривая 3). Соответствующие числа кавитации и коэффициенты подъемной силы C_Y , гидродинамического момента относительно задней кромки профиля C_M равны:

для кривой 1 - $\sigma = 1.44, C_Y = 1.77, C_M = -1.12$;

для кривой 2 - $\sigma = 1.61, C_Y = 1.64, C_M = -1.06$;

для кривой 3 - $\sigma = 3.13, C_Y = 2.74, C_M = -1.79$.

С приближением профиля к верхней стенке канала число кавитации возрастает, а каверна сужается (рис. 3,б), что показывает сильное влияние стенки канала.

Следует отметить, что при численных расчётах скорость набегающего потока считалась равной единице. В данной задаче средняя скорость в канале

$$V_\infty = \frac{V_2 R_2}{R_3 + \frac{H}{2}} \quad (V_\infty = 1.3)$$

моделирует скорость набегающего потока для профиля, поэтому, поделив на эту скорость все полученные результаты, можно получить течение в канале с единичной скоростью на бесконечности. Количество жидкости, протекающей в канале, определяется как разность между значениями функции тока на двух границах $q = C_2 - C_3 = 1.3$, что совпадает со скоростью на бесконечности $V_\infty = 1.3$.

На рис. 3,в приведена зависимость числа кавитации и гидродинамических характеристик профиля с частичной каверной от расстояния h_c (так как C_M отрицателен, его величина умножена на -1).

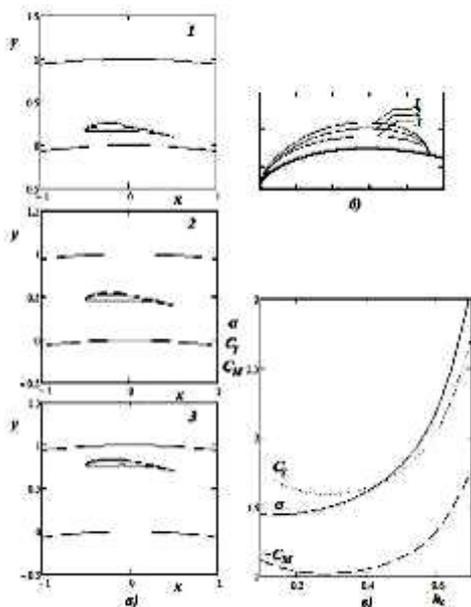


Рисунок 3

а) профиль Жуковского с частичной каверной в канале при различных расстояниях h_c : 1 – $h_c=0.1$; 2 – $h_c=0.5$; 3 – $h_c=0.7$; б) форма частичных каверн при тех же значениях h_c ;
в) зависимость числа кавитации σ , коэффициенты подъемной силы C_Y , момента относительно задней кромки профиля C_M от h_c

Из рис.3,б и 3,в следует, что влияние канала усиливается при приближении профиля к криволинейным стенкам.

Обтекание профиля с развитой кавитацией вблизи свободной границы. Моделирование данной задачи аналогично предыдущей задаче. Отличие состоит в том, что возмущение в поток вносит верхнее тело со свободной нижней границей, а нижнее тело следует удалить. На нижней границе возмущающего тела выполняется динамическое условие о постоянстве скорости, значение которой определяется в процессе вычислений. Алгоритм построения свободной границы и каверны описан в работе [6].

Численные расчёты проводились для профиля Жуковского ($\kappa = 0.1, d = 0.05, c = 0.005$) при угле атаки $\alpha = 10^\circ$. В качестве кавитационной модели использовалась модель с замыканием каверны на пластину (схема Рябушинского). Считаются заданными точка отрыва от передней кромки $\epsilon p = 0.06$ и длина каверны $Lc = 1$.

На рис. 4 показана конфигурация свободной границы и каверны для различных глубин погружения h_0 профиля, а соответствующие гидродинамические характеристики представлены в таблице 1. Глубина погружения определяется как

расстояние между двумя линиями тока на бесконечности $h_0 = (C_2 - C_1)/V_2$, где V_2 - скорость на свободной границе, моделирующая скорость на бесконечности.

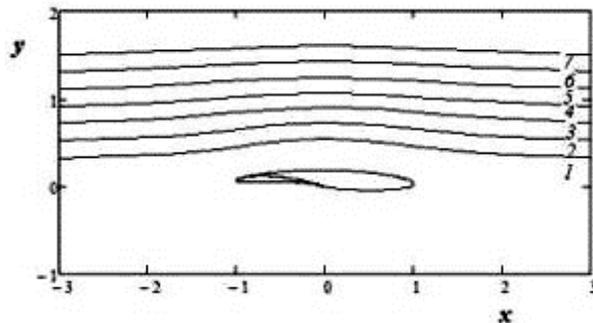


Рисунок 4 - Конфигурация свободной границы и каверны за профилем под свободной поверхностью

Таблица 1

№	h_0	σ	C_Y	C_M
1	0.2257	0.2634	0.3772	-0.1901
2	0.3929	0.2948	0.3244	-0.1417
3	0.5693	0.3268	0.3422	-0.1418
4	0.7235	0.3369	0.3135	-0.123
5	0.8873	0.3463	0.2987	-0.1126
6	1.0728	0.3621	0.322	-0.1205
7	1.2349	0.3658	0.2957	-0.1068

Результаты показали, что при различных глубинах погружения профиля форма каверны меняется незначительно, профиль с каверной влияет на свободную границу только локально. На рис. 4 каверна соответствует глубине погружения профиля $h_0 = 0.2257$.

Кавитационное обтекание диска в трубе. Для тестирования алгоритма в осесимметричном случае рассмотрена задача о кавитационном обтекании диска в цилиндрической трубе.

Пусть диск, расположенный в цилиндрической трубе радиуса h , обтекается с образованием каверны (рис. 5).

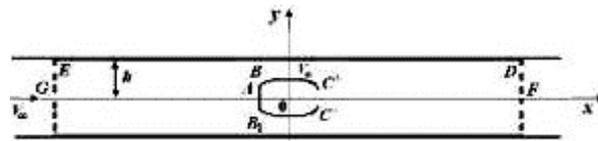


Рисунок 5 - Меридиональное сечение области течения в задаче о кавитационном обтекании диска в трубе

В этом случае требуется решить уравнение (1) при $\epsilon = 1$ с учётом граничных условий (2), (4) и (5), соответствующих осесимметричным течениям. Соотношение (3) выполняется на стороне ED сечения трубы и имеет вид: $\Psi = C_2 = h^2 / 2$.

Ограничим область решения задачи дополнительными сечениями трубы GE и FD , перпендикулярными её оси. На этих границах имеем: $\Psi = y^2/2$, где y – ординаты точек этих сечений.

Начальное приближение к границе каверны здесь, как и в плоском случае, выбиралось в виде отрезка прямой заданной длины, параллельного оси течения. Однако, в отличие от схемы Рябушинского, фиктивное тело в конце каверны не достраивается. Получающаяся в ходе итераций граница каверны незамкнута и приобретает «естественную» форму.

Числовые расчёты проведены для безразмерного радиуса трубы $h/2R = 3$. Отрезки $G0$ и $0F$ равны 20 диаметрам диска. Общее количество граничных элементов с изменением длины каверны менялось от 500 до 700. Зависимости длины каверны, её максимального радиуса и коэффициента давления

$$C_D = D / \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \pi R^2,$$

где $D = \pi \int_0^R (V^2 - V_0^2) y dy$

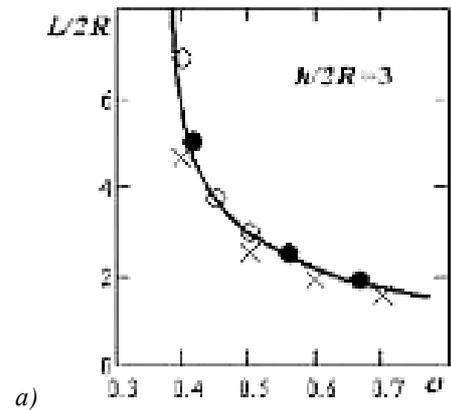
от числа кавитации показаны сплошными линиями на рис. 6. Крестиками на этих графиках обозначены результаты работы [12], а светлыми кружочками – работы [13]. Удовлетворительное согласование наших результатов с известными позволяет применять рассмотренный алгоритм к решению других задач в ограниченных потоках.

Кавитационное обтекание диска возмущённым потоком жидкости. Физическая область течения показана на рис. 1.

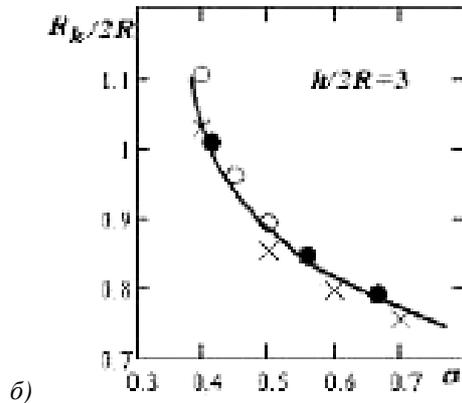
Результаты расчётов показаны на рис. 7, 8. Здесь внутренний радиус кольцевого крыла и длина его оси выбирались такими же, как размеры части трубы в предыдущей задаче. Граница сечения кольцевого крыла задавалась в виде полуэллипса с полуосями $20R$ и $2R$. Результаты расчётов числа кавитации, максимального радиуса каверны и коэффициента давления для трёх заданных значений относительной длины каверны ($L/2R = 2, 2.5, 5$) показаны чёрными кружочками на рис. 6. Совпадение результатов решения рассматриваемой задачи с решением предыдущей позволяет считать, что задача об осесимметричном кавитационном обтекании препятствия возмущённым потоком является хорошей моделью кавитационного обтекания этого тела в трубе. Форма верхней струи каверны длиной $L/2R = 5$ за диском, находящимся в полости рассматриваемого кольцевого крыла показана на рис. 7.

Распределение скорости на диске и на внутренней границе кольцевого крыла показаны на рис. 8,а и 8,б соответственно. На рис 8,б для наглядности показанная внутренняя область крыла сокращена до размеров $-10 \leq x/2R \leq 10$, так как вне этого промежутка скорость остаётся постоянной, равной скорости невозмущённого потока. Здесь для

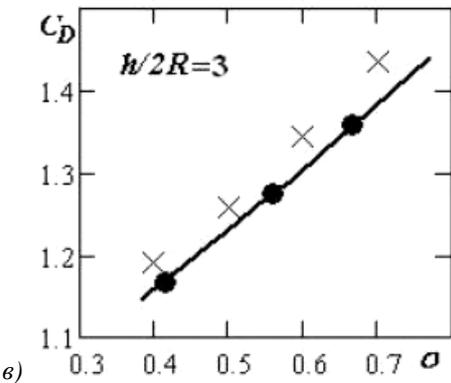
нормировки скорости применён тот же приём, что при решении плоских задач.



а)



б)



в)

Рисунок 6 - Зависимости относительных длины (а), ширины каверны (б) и коэффициента давления (в) от числа кавитации для диска в трубе при $h/2R = 3$

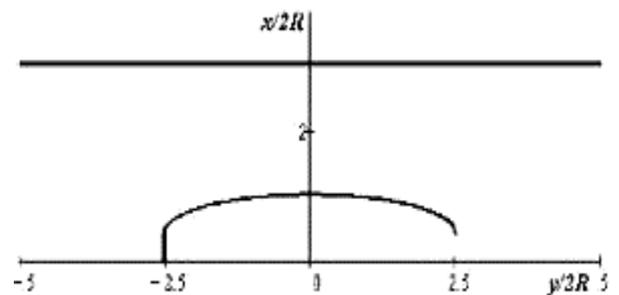


Рисунок 7 - Форма каверны длиной $L/2R = 5$ за диском, находящимся в возмущённом потоке

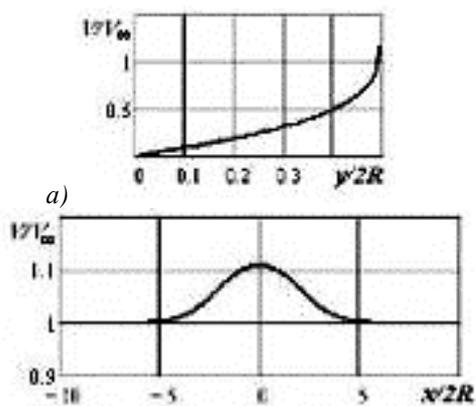


Рисунок 8 - Распределение скорости *а)* на диске; *б)* на внутренней границе кольцевого крыла

Выводы

В работе метод прямой итерации А.Г. Терентьева применён к исследованию плоских и осесимметричных задач обтекания препятствий в возмущённых потоках. Хорошее согласование результатов решения тестовых задач с известными и простота реализации численного алгоритма метода позволяет сделать вывод о его эффективности при решении подобных задач.

Авторы выражают благодарность профессору А.Г. Терентьеву за постановку задач и внимание к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-08-97085 р_поволжье_а.

Литература

1. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows // Backbone Publishing Company. USA, 2011. – 598 pp.
2. Сидоров О.П. Решение задачи об обтекании тела вращения// Труды Казан. авиац. ин-та. – Казань, 1958. – Т. 38. С. 23–42.
3. Терентьев А.Г. Итерационный метод в численной гидродинамике// В сб. Образование. Наука. Производство. Инновационный аспект. Сб. трудов научно-практической конференции, посвященной 50-летию ЧИ МГОУ – М.: Изд-во МГОУ, 2005. – Вып. 3. – Т. 1. С. 238–243.
4. Димитриева Н.А. Сравнительный анализ двух численных методов исследования осесимметричного кавитационного обтекания криволинейных препятствий// Гидродинамика больших скоростей и математическое моделирование: материалы III Межд. летней науч. школы – Кемерово: ИНТ, 2006. С. 127–133.
5. Димитриева Н.А. Компьютерное моделирование осесимметричного кавитационного обтекания препятствий с криволинейными границами// Сб. трудов X Межд. науч. школы «Гидродинамика больших скоростей» и Межд. науч. конф. «Гидродинамика. Механика. Энергетические установки» (к 145-летию со дня рождения акад. А.Н. Крылова) – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2008. С. 349–356.
6. Павлова Н.А. Численное моделирование частичной кавитации вблизи свободной границы. Сб. трудов X Межд. науч. школы «Гидродинамика больших скоростей» и Межд. науч. конф. «Гидродинамика. Механика. Энергетические установки» (к 145-летию со дня рождения акад. А.Н. Крылова) – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2008. С. 367–372.
7. Гузевский Л.Г. Численный анализ кавитационных течений. Препринт № 40-79. – Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979. – 36 с.
8. Иванов А.Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. – Л.: Судостроение, 1980. – 238 с.
9. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536. с.
11. Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике. – Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 1987. – 79 с.
12. Brennen C.A. A numerical solution of axisymmetric cavity flows// J. Fluid Mech. 1969. Vol. 37. Pt. 4. P. 671-688.
13. Гузевский Л.Г. Соответствие плоских и осесимметричных кавитационных течений Рябушинского в трубах// Гидродинамика больших скоростей. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1985. – С. 45–48.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Житников В.П., Зиннатуллина О.Р

Уфимский государственный авиационный технический университет

450000, Уфа, ул. К. Маркса, 12
zhitnik@mail.ru; olga_zr@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются задачи отрывного обтекания идеальной жидкостью различных препятствий (включая воздухоопорные цилиндрические оболочки). Для оценки погрешности и уточнения численных результатов используются методы фильтрации, что позволяет исследовать тонкие эффекты.

Введение

В [1] рассмотрено кавитационное обтекание кругового цилиндра по различным схемам замыкания каверны. Был исследован вопрос о выполнении условий Бриллюэна, первое из которых заключается в том, что скорость жидкости на границе каверны должна быть наибольшей, а второе – это требование пересечения свободной поверхностью границы препятствия. Были проведены расчеты, которые предположительно позволяли утверждать, что единственным течением из возможных (при разных положениях точки отрыва свободной поверхности), удовлетворяющим обоим условиям Бриллюэна, является течение с гладким отрывом (течение Бриллюэна-Вилла). Параметры таких течений для разных чисел кавитации представлены таблично с 4-мя значащими цифрами для коэффициента давления C_x угла отрыва, длины и ширины каверны. Другие зависимости представлены графиками, в частности, C_x от угла отрыва. Отмечено, что эта зависимость имеет локальный экстремум в точке гладкого отрыва.

Следует отметить, что, основываясь на данных графиках, это предположение можно сделать весьма приближенно, поскольку точность передачи графической информации обычно не превышает двух значащих цифр (погрешность ≥ 0.01) от диапазона исследования. При этом если в точке экстремума зависимости имеют вид $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$, то при определении $f(x)$ с погрешностью 0.01, значение x_0 определяется примерно до 0.1. Поэтому для проверки и обоснования предположения об экстремуме в конкретной точке нужна более высокая точность и другая форма графического представления.

Здесь с помощью технологии фильтрации численных результатов [2, 3] подробно исследуется поведение характерных параметров при смещении точки отрыва потока относительно положения, соответствующего гладкому отрыву (конечности кривизны струи в точке отрыва). Рассматриваются задачи с разными условиями на границах (обтекание оболочки, весома жидкость, разные схемы замыкания каверны).

1. Кавитационное обтекание кругового цилиндра по схеме Тулина–Терентьева

Постановка задачи полностью соответствует [1]. Здесь приводятся уточненные результаты расчетов и оценка погрешности. На рис. 1 показаны формы границ течения при разном положении точки отрыва для числа кавитации $K=1$. Видно, что при отрыве течения в точке, расположенной выше по потоку, чем точка гладкого отрыва, свободная граница пересекает поверхность препятствия, т.е. не выполняется второе условие Бриллюэна.

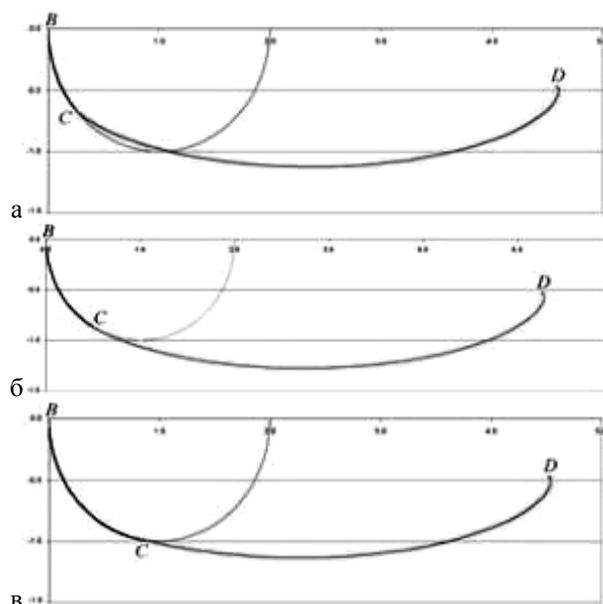


Рисунок 1 - Формы границ течения при $K=1$ с отрывом:

- а – выше точки гладкого отрыва;
- б – гладкий отрыв;
- в – ниже точки гладкого отрыва

Рассмотрим образ области течения на плоскости логарифмического годографа скорости

$$\ln \frac{dW}{V_\infty dZ} = \tau - i\theta,$$

где $\tau = \ln \frac{V}{V_\infty}$, V, θ – модуль и угол наклона вектора скорости к оси абсцисс (рис. 2). Как видно из рисунка, при отрыве ниже по потоку от точки гладкого отрыва на смоченной поверхности имеется зона, где скорость больше скорости на границе каверны, т.е. не выполняется первое условие Бриллюэна.

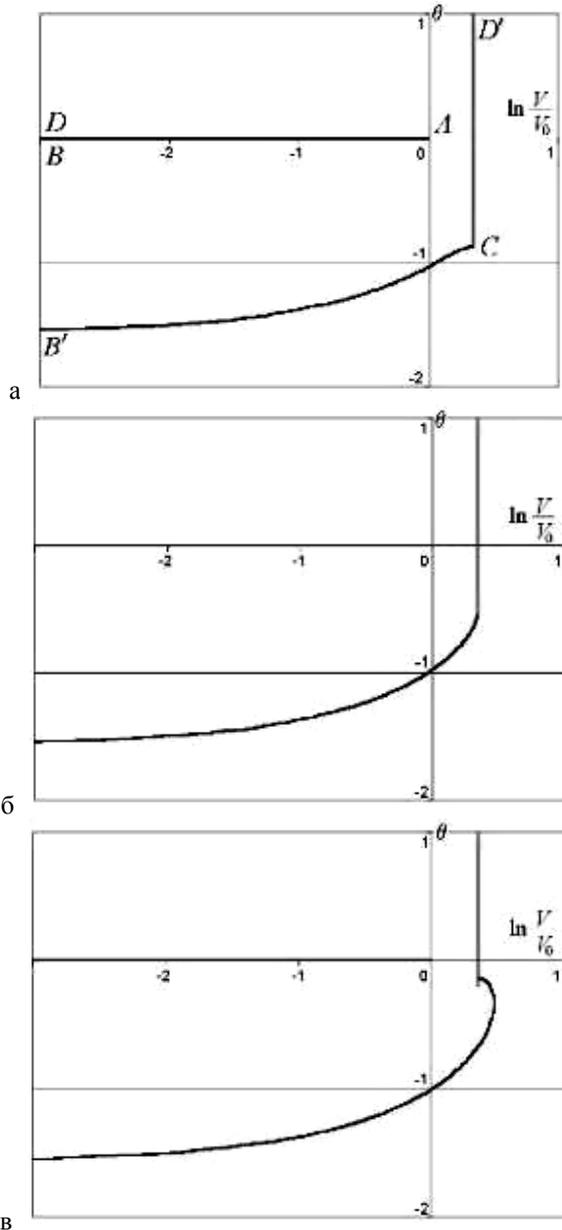


Рисунок 2 - Формы образа области течения на плоскости логарифмического годографа для $K=1$ при отрыве:
 а – выше точки гладкого отрыва;
 б – гладкий отрыв;
 в – ниже точки гладкого отрыва

Таким образом, единственным течением, удовлетворяющим обоим условиям Бриллюэна одновременно, является течение с гладким отрывом. Второе течение с гладким отрывом, полученное в [1], находящееся далеко ниже по потоку, не удовлетворяет первому условию Бриллюэна.

Теперь рассмотрим вопрос о локальном максимуме коэффициента сопротивления

$$C_x = \frac{2}{\rho V_\infty^2 R} \operatorname{Im} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = (K+1) \int_{AC} \left[1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \frac{dY}{R}, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости; V_0, V_∞ – скорость жидкости на границе каверны и на бесконечности; $P(Z), P_0$ – давления в потоке и в каверне; R – радиус цилиндра.

На рис. 3,а приведена зависимость $C_x(\theta_C)$ для $K=1$, на рис. 3,б зависимость разности $\Delta C_x = C_x - C_{x_0}$ от разности $\Delta \theta_C = \theta_C - \theta_{C_0}$, где C_{x_0}, θ_{C_0} – значения параметра C_x и угла отрыва θ_C при гладком отрыве в масштабе 10^{-6} по $\Delta \theta_C$, 10^{-12} по ΔC_x . На точечные графики зависимостей нанесен график функции $f(x) \approx kx^2$ с подобранным коэффициентом $k \approx 1$. Это позволяет с высокой точностью установить, что экстремум $C_x(\theta_C)$ имеет место при гладком отрыве.

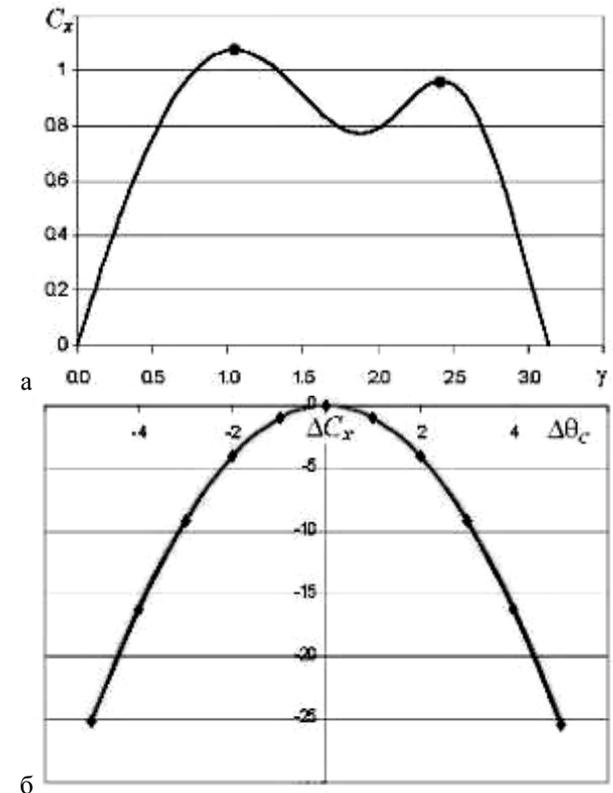


Рисунок 3 - Зависимости: а – $C_x(\theta_C)$; б – $\Delta C_x(\Delta \theta_C)$

Для оценки погрешности использовалась численная фильтрация результатов расчетов [2, 3], полученных при различных числах точек коллокаций n . Результаты фильтрации изображены на рис. 4, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа точек коллокаций n , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра $\delta = |\Delta u / u|$ (точность решения, выраженная в количестве верных значащих цифр). Цифрой 0 обозначены вычисленные результаты, цифрами 1, 2, ... – результаты 1-й 2-й и т.д. фильтра-

ции. Эти результаты показывают, что для приведенных вариантов величина C_x определяется с относительной погрешностью около 10^{-13} - 10^{-14} , а θ_{C0} – около 10^{-10} . Точность ограничивается погрешностью округления.

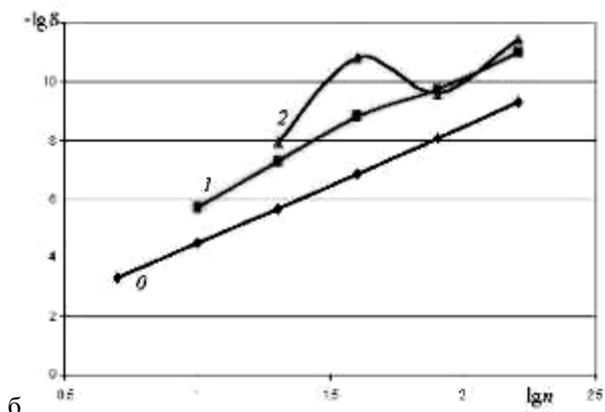
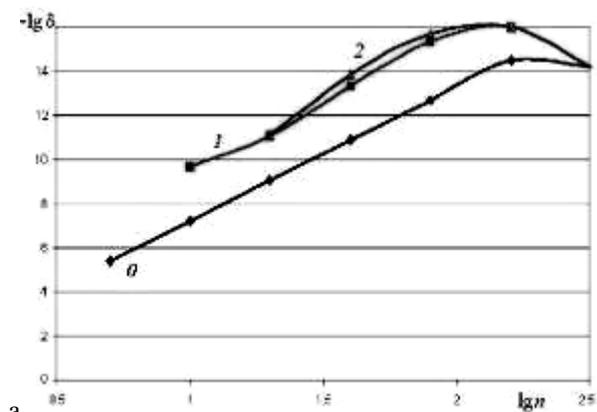


Рисунок 4 - Оценки точности вычисления параметров:
а – C_x ; б – θ_{C0}

Возникает вопрос об общности вывода об экстремуме зависимостей при гладком отрыве. Чтобы прояснить этот вопрос, рассмотрим другие задачи отрывного обтекания препятствий.

2. Кавитационное обтекание кругового цилиндра по схеме Рябушинского

Рассматривается задача кавитационного обтекания идеальной жидкостью кругового цилиндра по схеме Рябушинского (рис. 5), согласно которой для замыкания каверны вводится замыкатель $B'C'$, симметричный кавитатору BC . Пусть давление в каверне равно P_0 , давление на бесконечности – P_∞ . Число кавитации определяется как

$$K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2} = \left(\frac{V_0}{V_\infty} \right)^2 - 1.$$

Задача решается двумя методами, первый из которых – метод Леви-Чивиты, как и в предыдущей задаче, второй использует интеграл Шварца на полосе и описан в [4, 5]. Применение двух методов позволило проверить оценки, полученные в виде интервалов неопределенности на пересечение и убедиться в непротиворечивости этих оценок. На

рис. 6 приведены оценки параметров, полученных вторым методом. Толстыми линиями показаны результаты попарного вычитания, тонкими – сравнения с эталоном [3].

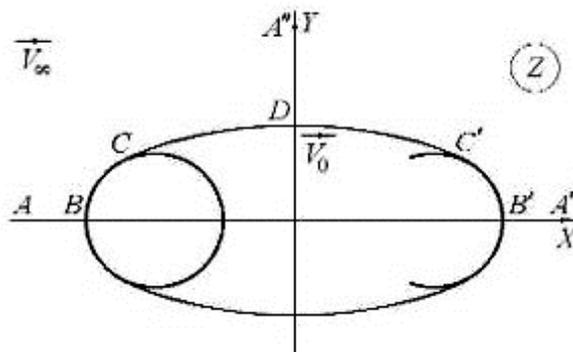


Рисунок 5 - Схема кавитационного обтекания кругового цилиндра по схеме Рябушинского

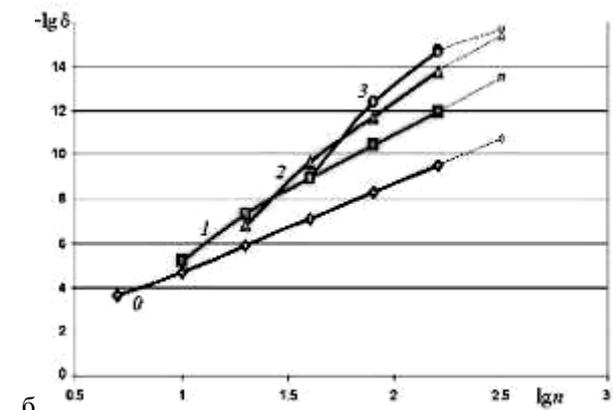
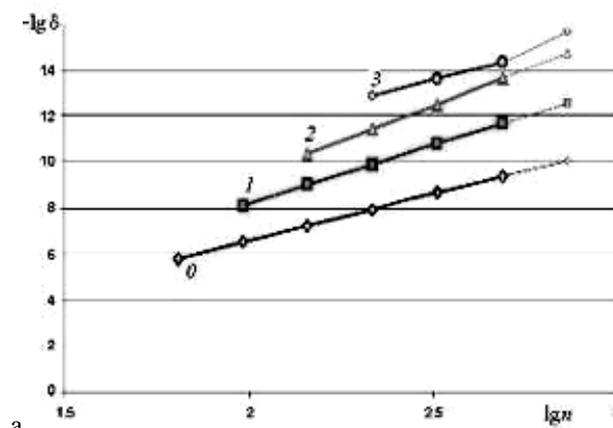


Рисунок 6 - Оценки точности вычисления параметров:
а – C_x ; б – θ_{C0}

Исследовалась не только зависимость $C_x(\theta_C)$, но и зависимости полудлины x_D и полуширины y_D каверны от θ_C . На рис. 7 зависимости показаны в масштабе 10^{-7} по $\Delta\theta_C$, 10^{-14} по Δx_D и по Δy_D . На точечные графики зависимостей нанесен график функции $f(x) \approx kx^2$ с подобранными коэффициентами k .

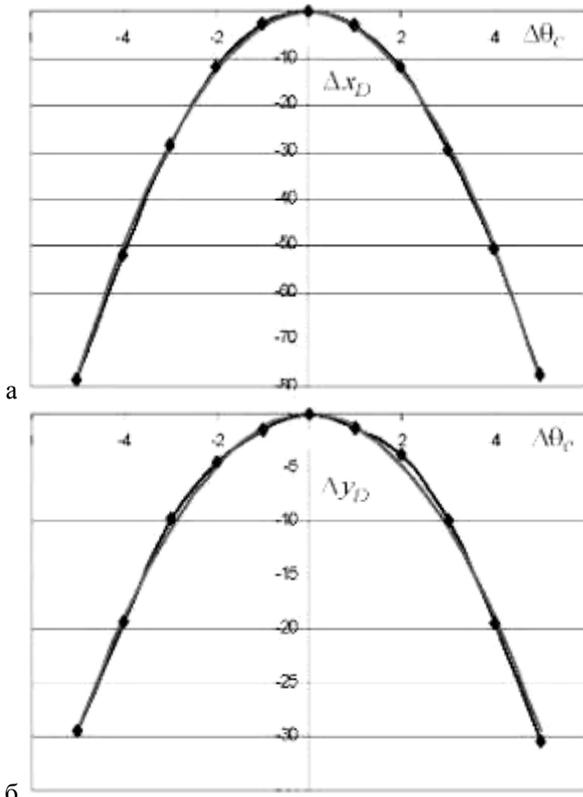


Рисунок 7 - Зависимости:
 а – $\Delta x_D(\Delta\theta_C)$; б – $\Delta y_D(\Delta\theta_C)$

Исследование показывает, что экстремумы в точке гладкого отрыва имеют все указанные зависимости.

Рассмотрим, как повлияет на экстремальные свойства изменчивость формы обтекаемого препятствия при изменении положения точки отрыва.

3. Кавитационное обтекание мягкой оболочки по схеме Кирхгофа

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, закрепленную в одной точке A ; точка B может двигаться вдоль оси X . При этом касательная к оболочке в точке B перпендикулярна оси X (рис. 8). Скорость потока на свободной линии тока равна V_0 . На линии SA вектор скорости параллелен оси X (рис. 8).

В задаче обтекания оболочки на границе требуется выполнения условия Лапласа

$$T = R(P_6 - P) = \text{const}, \quad (2)$$

где T – натяжение оболочки; R – радиус кривизны; P_6 – давление внутри оболочки.

Течение характеризуется соотношением давлений $\mu = \frac{P_6 - P_0}{P^* - P_0}$, где P_0 – давление на свободной

поверхности; P^* – константа Бернулли. Для исследования экстремальных свойств зависимостей рассмотрен случай $\mu=1$ (при этом давление в критической точке A совпадает с давлением внутри оболочки P_6).

На рис. 9 приведены оценки параметров, полученных видоизмененным методом Леви-Чивиты [6].

Толстыми линиями показаны результаты попарного вычитания, тонкими – сравнения с эталоном [3].

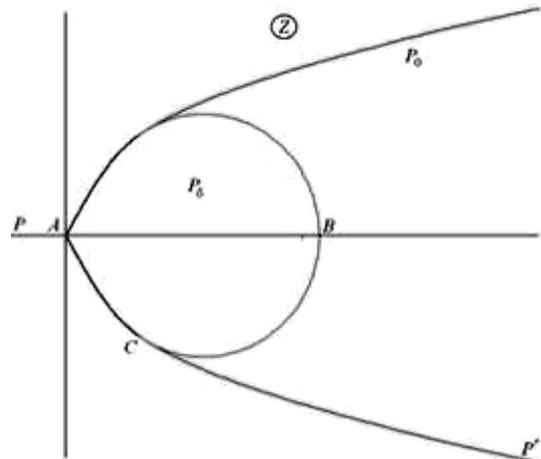


Рисунок 8 - Схема обтекания воздухопорной оболочки ($\mu=1$)

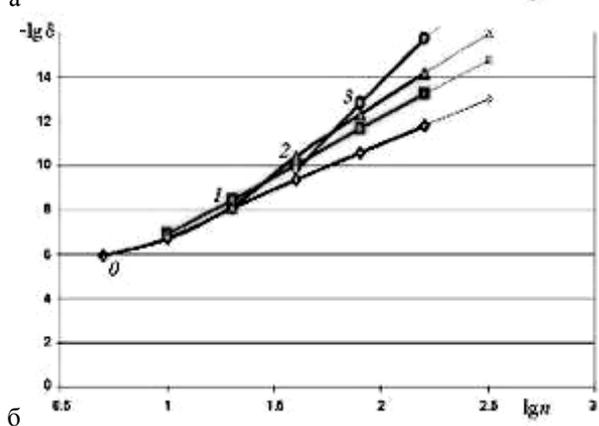
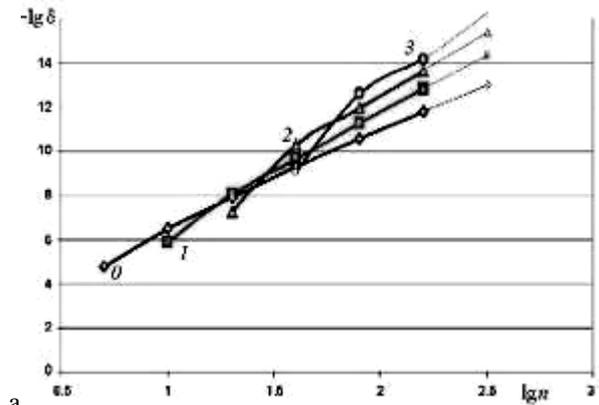


Рисунок 9 - Оценки точности вычисления параметров:

$$а - C_x; б - T^*$$

Исследованы зависимости $C_x(\theta_C)$ и коэффициент натяжения $T^*(\theta_C) = \frac{2T}{\rho V_0^2 l \mu} = \frac{R_0}{l}$ (R_0 – радиус

кривизны несмоченной части оболочки, l – длина образующей оболочки, отнесенная к π). На рис. 10 зависимости показаны в масштабе 10^{-7} по $\Delta\theta_C$, 10^{-14} по Δx_D и по Δy_D .

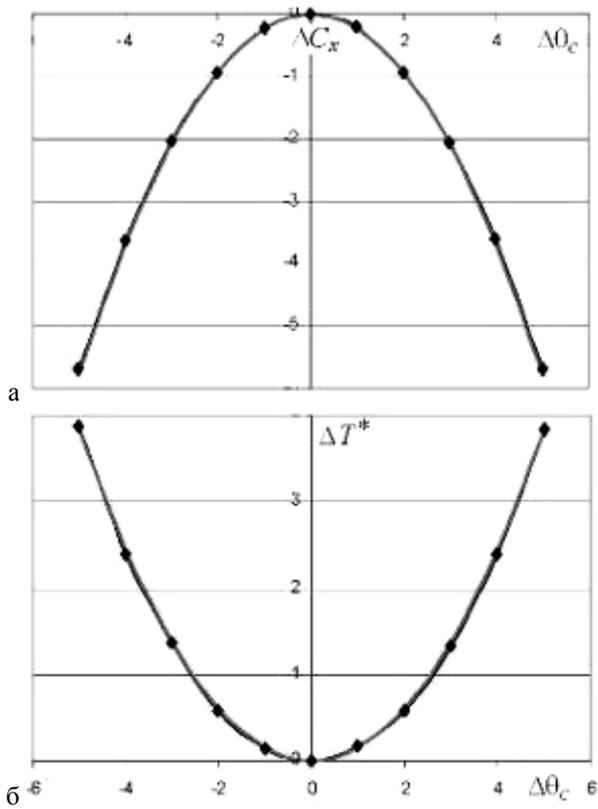


Рисунок 10 - Зависимости для $\mu=1$:
 а - $\Delta C_x(\Delta\theta_C)$; б - $\Delta T^*(\Delta\theta_C)$

Видно, что эти зависимости имеют экстремумы в точке гладкого отрыва, как и в рассмотренных выше задачах.

4. Обтекание мягкой оболочки вблизи экрана

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, оба конца которой (А и В) закреплены (в задаче моделируется один из возможных типов гибких ограждений, применяемых в АВП – баллонного). Скорость потока на свободной линии тока равна V_0 , скорость на бесконечности слева – V_1 . На линии PA и вдоль экрана PS' вектор скорости параллелен оси X (рис.11). При небольших перепадах давлений, характерных для АВП, воздух можно моделировать идеальной невязкой несжимаемой жидкостью.

Для решения этой задачи, как и в предыдущей, использовались два метода: видоизмененный метод Леви-Чивиты [7], второй метод использует интеграл Шварца на полосе [5].

Величина отстояния оболочки от экрана характеризуется безразмерным числом

$$\frac{Q}{V_0 l} = Q^* = \frac{1}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

Исследовалась зависимость от положения точки отрыва высоты оболочечной конструкции

$$H^* = \frac{H}{l} = \begin{cases} -\min \frac{Y(\sigma)}{l}, & \theta_C \leq 0; \\ \frac{R_0}{V_0 l} (1 - \cos \theta_B), & \theta_C \geq 0; \end{cases}$$

и коэффициента нормального давления

$$C_y = \frac{2}{\rho V_0^2 l} \operatorname{Im} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = \frac{\mu R_0}{l} (\sin \theta_A - \sin \theta_B) + \mu$$

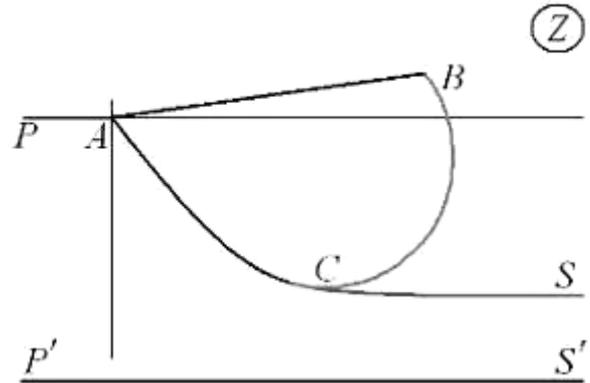


Рисунок 11 - Схема обтекания оболочки вблизи экрана

На рис. 12 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для $y_C=0$; $L/l=\pi/2$; $\mu=1$ от длины смоченной поверхности $L_0(Q^*)$ при $Q^*=2; 1; 0.5; 0.25$ (кривые 1, 2, 3, 4). Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия гладкого отрыва ($L_C = L_0$), отмечено на графиках жирной точкой. Видно, что при $L_C = L_0$ зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

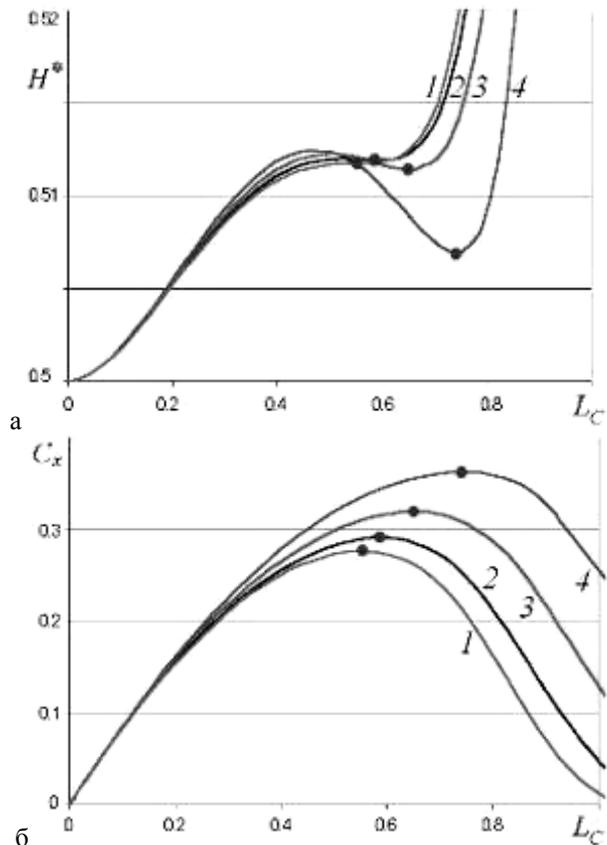


Рисунок 12 - Зависимости параметров:
 а - H^* ; б - C_y для $\mu=1$

В соответствии с оценками (рис 13), погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} .

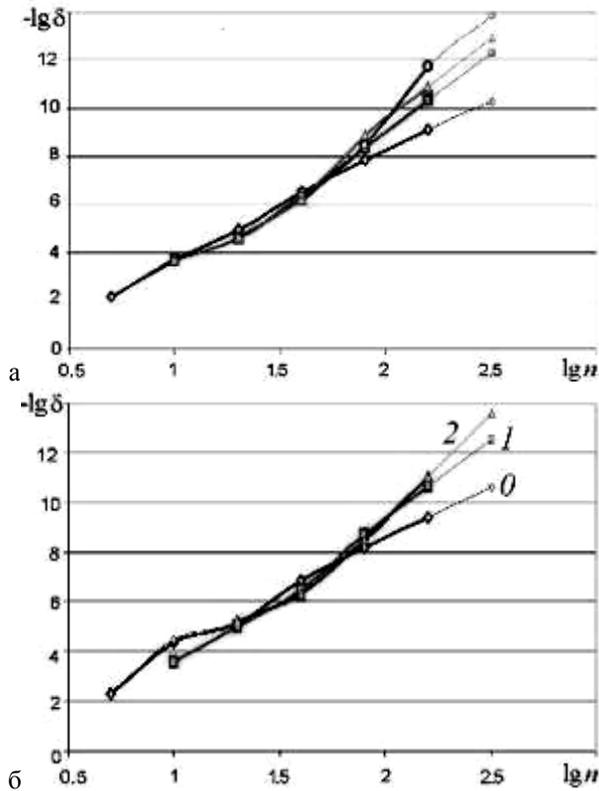


Рисунок 13 - Оценка погрешности параметров:
а - H^* ; б - C_Y для $Q^*=0.25, \mu=1$

На рис. 14 масштабная единица по оси абсцисс равна 10^{-6} , по оси ординат - 10^{-12} . Как показывают графики, положение экстремума с точностью 10^{-6} совпадает с θ_{C_0} .

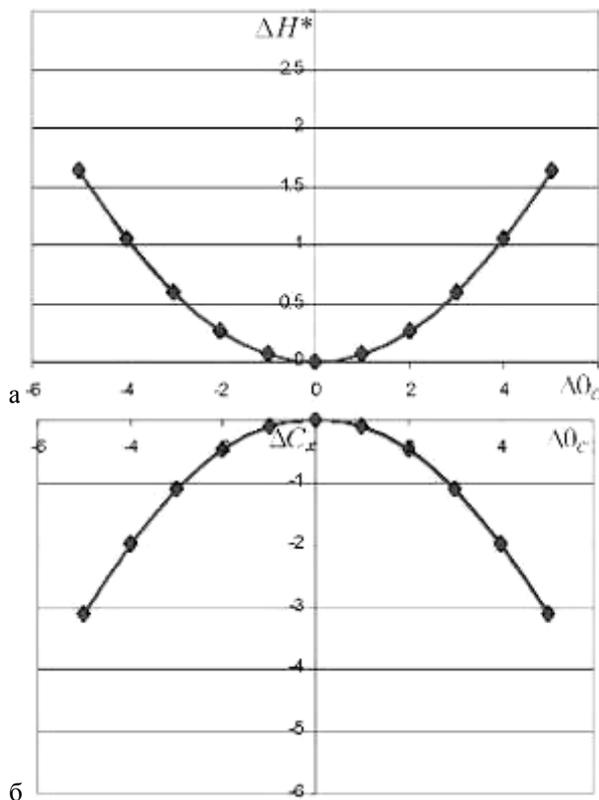


Рисунок 14 - Зависимости для $\mu=1$:
а - $\Delta H^*(\Delta\theta_C)$; б - $\Delta C_Y(\Delta\theta_C)$

Далее рассмотрим влияние видоизменения условия на свободной границе.

5. Кавитационное обтекание полукруглого выступа на дне весомой жидкостью по схеме Рябушинского

Рассматривается задача кавитационного обтекания идеальной весомой жидкостью полукруглого выступа по схеме Рябушинского (рис. 15). Слой жидкости над цилиндром считается достаточно большим, так что влияние стенки или свободной поверхности не оказывает существенного влияния на течение вблизи препятствия. Такой схемой может моделироваться обтекание выступа на дне или на подводном крыле.

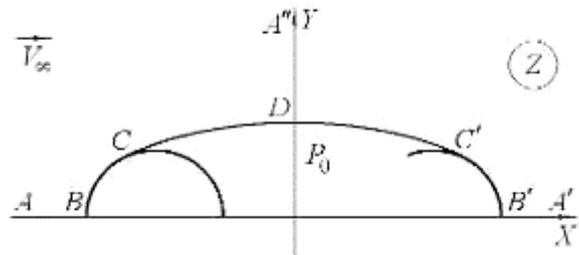


Рисунок 15 - Схема обтекания цилиндрического выступа весомой жидкостью

На границе каверны давление $P=P_0$, тогда получим краевое условие в виде

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 + \frac{2}{Fr^2} \frac{Y}{R} = 1 + K, \quad Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gR}}, \quad K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2}.$$

Обозначим гипотетическую скорость на части оси X внутри каверны $V=V_0$, тогда

$$\left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2 = 1 + K.$$

Для данной задачи коэффициент давления определяется формулой

$$C_x = \frac{2}{\rho V_\infty^2 R} \text{Im} \int_0^{Z_C} (P - P_0) dZ = (1 + K) \int_0^{Y_C} \left(1 - \frac{V^2}{V_0^2}\right) \frac{dY}{R} - \frac{1}{Fr^2} \frac{Y_C^2}{R^2}.$$

Скорость жидкости в наивысшей точке D границы каверны

$$\frac{V_D}{V_\infty} = \sqrt{1 + K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}},$$

Результаты (рис. 16) показывают, что для приведенных вариантов рассматриваемые величины определяются с относительной погрешностью около 10^{-14} .

На рис. 17 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для течений, удовлетворяющих условию гладкого отрыва для $K=1; 2; 3; 4$ (кривые 1 - 4) от числа, обратного числу Фруда ($1/Fr$).

На рис. 18 приведены графики зависимостей исследуемых параметров для $K=3$ от дуговой абсциссы $\gamma = \pi/2 - \theta_C$ (кривые 0 - 4 соответствуют $Fr=\infty; 2.5; 1.25; 1; 0.97$). Положение точки отрыва, соответствующее выполнению условия гладкого отрыва

($\theta_C = \theta_{C_0}$), отмечено на графиках жирной точкой. Видно, что, как и выше, при $\theta_C = \theta_{C_0}$ зависимости, предположительно, имеют локальные экстремумы.

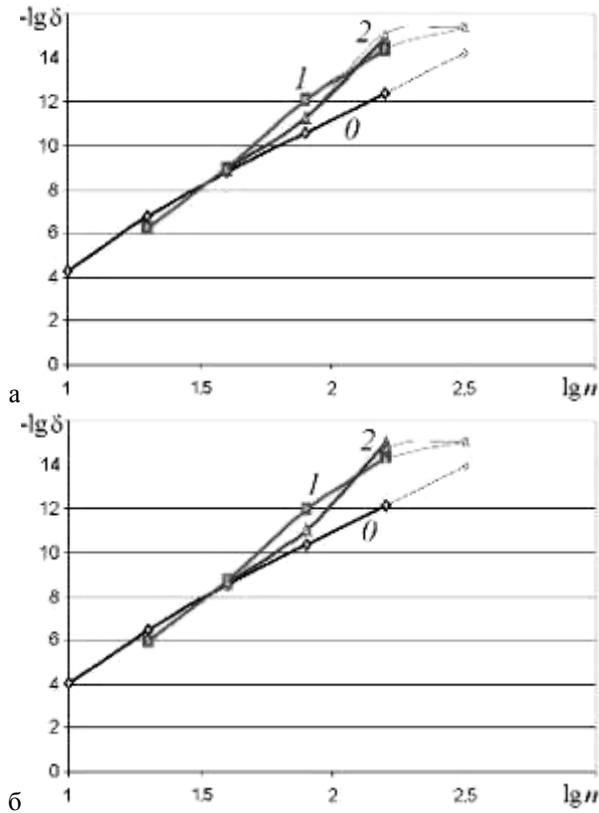


Рисунок 16 - Оценка погрешности параметров:
а - C_X ; б - V_D/V_∞ для $K=3, Fr=1$

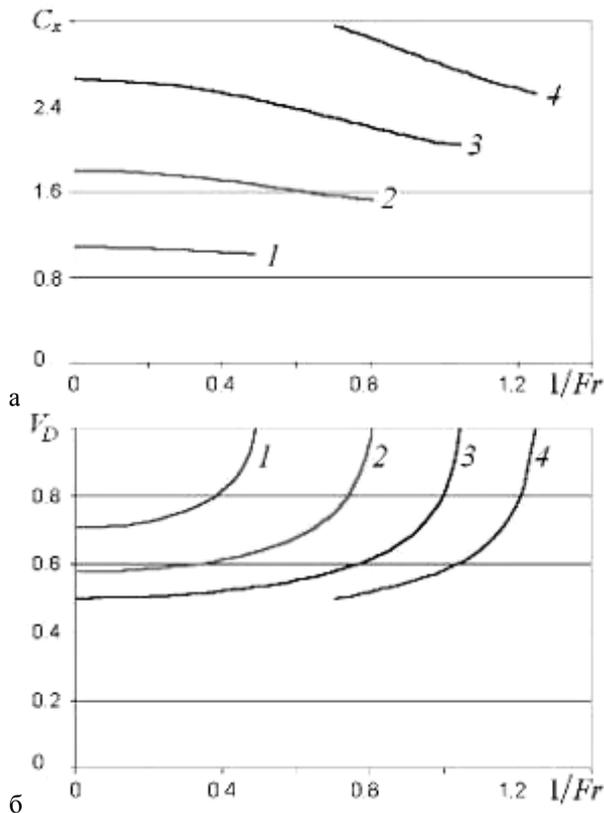


Рисунок 17 - Зависимости параметров от $1/Fr$:
а - C_X ; б - V_∞/V_D

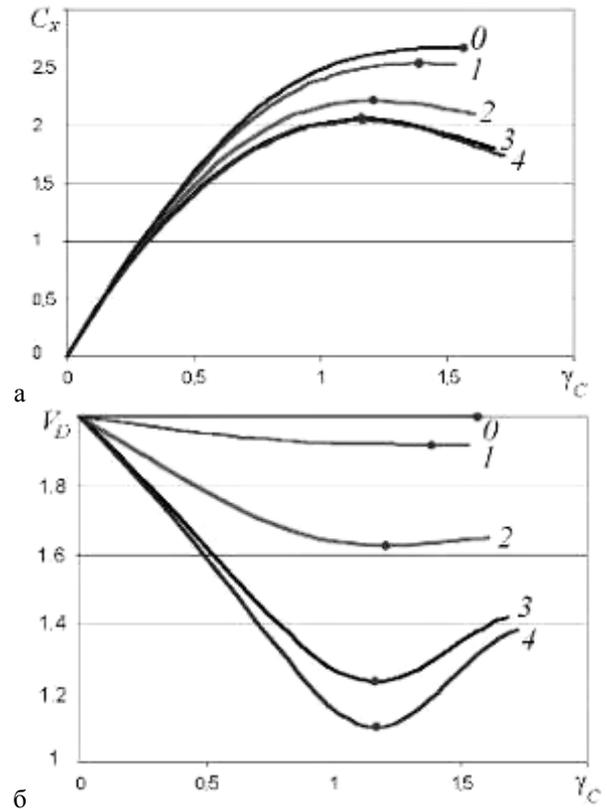


Рисунок 18 - Зависимости параметров от γ_C :
а - C_X ; б - V_D/V_∞

В соответствии со сделанными выше оценками, погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} . Согласно этому, выберем шаг по параметру θ_C равным 10^{-6} и рассмотрим разности $\Delta u = u - u_0$ в зависимости от $\Delta \theta_C = \theta_C - \theta_{C_0}$, где u_0, θ_{C_0} – значения параметров u и θ_C при выполнении условия гладкого отрыва.

Эти зависимости иллюстрируются на рис. 19. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна 10^{-6} , по оси ординат – 10^{-12} . Как показывают графики, положение экстремума с точностью 10^{-6} совпадает с θ_{C_0} , а зависимости близки к квадратичным.

Следует отметить, что бесконечный рост числа Fr возможен только для $K \leq 3$. Для $K > 3$ при увеличении Fr в данной модели происходит смыкание кавитатора и замыкателя, т.е. в пределе реализуется безотрывное обтекание. При безотрывном обтекании

$$\frac{V_D}{V_\infty} = 2 = \sqrt{1 + K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}}$$

Тогда, так как $Y_D = R, \theta_C = 0$, то

$$\frac{1}{Fr} = \sqrt{\frac{K-3}{2}}$$

В предельном решении (см. рис. 17, а)

$$C_X = K - \frac{1}{3} - \frac{K-3}{2}$$

Согласно рис. 17, б при уменьшении числа Fr скорость жидкости в наивысшей точке свободной поверхности V_D приближается к V_∞ . При этом длина каверны стремится к бесконечности, а ширина оста-

ется ограниченной. Тем самым схема течения переходит в вариант схемы Кирхгофа. При этом

$$\frac{V_D}{V_\infty} = 1 = \sqrt{1 + K - \frac{2}{Fr^2} \frac{Y_D}{R}}.$$

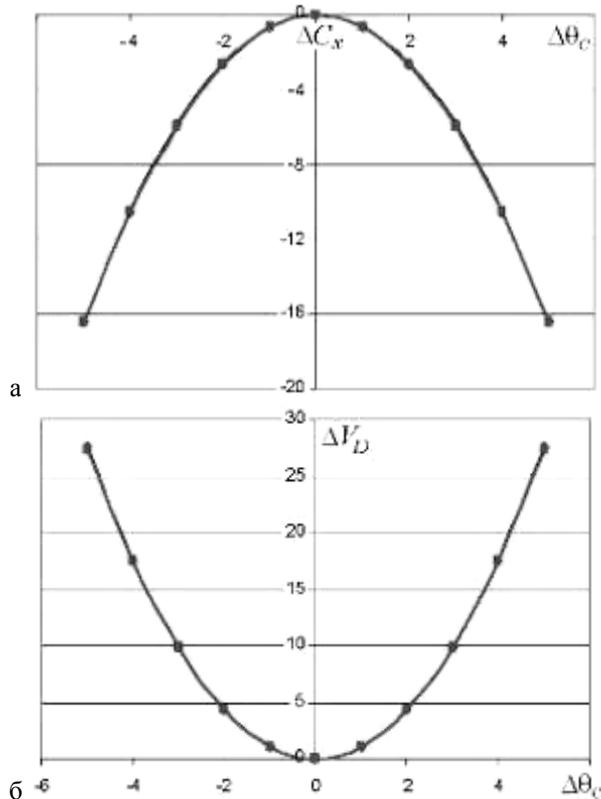


Рисунок 19 - Зависимости от приращения $\Delta\theta_C$

параметров: а – ΔC_X ; б – $\Delta \frac{V_D}{V_\infty}$

Отсюда найдем связь параметров

$$\frac{Y_D}{R} = \frac{Fr^2}{2} K.$$

Конкретные значения этих и других параметров получаются численно. Зависимости приращений параметров для предельного решения при $K=1$ иллюстрируются на рис. 20. При этом одна масштабная единица по оси абсцисс равна 10^{-6} , по оси ординат – 10^{-12} . Как показывают графики, положение экстремума с точностью 10^{-6} совпадает с θ_{C0} .

Выводы

Таким образом, в данной работе проведено численное исследование ряда задач обтекания препятствий с отрывом струи с целью определения экстремальных свойств зависимостей характерных параметров течений от угла отрыва.

Исследование показало, что для разных задач зависимости основных параметров от положения точки отрыва имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва.

Применение технологии фильтрации численных результатов позволило установить этот факт с высокой точностью (10^{-12} – 10^{-14} по исследуемой функции, и 10^{-6} – 10^{-7} по величине угла отрыва). Приведенные диаграммы дают возможность в удобном виде пред-

ставить информацию для оценки погрешности решения и обоснования оценок.

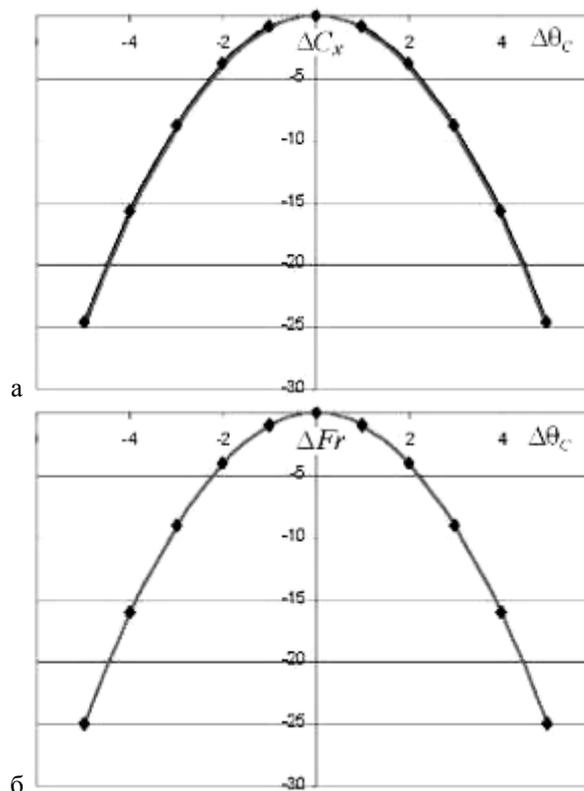


Рисунок 20 - Зависимости от приращения $\Delta\theta_C$ приращения параметров: а – ΔC_X ; б – ΔFr

Литература

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука. 1979. 536 с.
2. Житников В. П., Шерыхалина Н.М. Применение многократной фильтрации при численном решении задач методами теории функций комплексного переменного // Вычислит. технологии, 2013. Том 18, № 1. С. 15-23.
3. Житников В. П., Шерыхалина Н.М. Моделирование течений весомой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Уфа: Гилем. 2009. 336 с.
4. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Многокомпонентный анализ численных результатов. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 389 с.
5. Zhitnikov V.P., Fedorova G.I., Sherykhalina N.M., Urakov A.R. Numerical investigation of non-stationary electrochemical shaping based on an analytical solution of the Hele-Shaw problem // Journ. Eng. Math., Vol. 55, Nos. 1-4, 2006. Special Issue. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. Pp. 255-276.
6. Житников В.П., Терентьев А.Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1982. № 6. - С. 43-48.
7. Terentiev A.G., Zhitnikov V.P. Stationary Two-dimensional Inviscid Flow with Flexible Boundaries Including the Effect of Surface Tension // Journ. Eng. Math., Vol. 55, Nos. 1-4, 2006. Special Issue. A taste of engineering mathematics from present-day Russia. pp. 111-126.

EXAMPLES OF FREE-BOUNDARY FLOWS

Karabut E.A., Zhuravleva E.N.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk State University

630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

New approach to the construction of the exact solutions of unsteady free-boundary flows with ideal incompressible liquid is proposed. Six examples of such flows have been found.

Introduction

Consider a plane unsteady flow of ideal incompressible liquid. External forces and surface tension are absent. At each time moment t liquid occupies some domain in complex plane $z = x + iy$. The domain boundary consists of free surface and hard wall. On the free surface the pressure P is zero. On the hard wall the nonpermeability condition is satisfied.

The liquid motion has either inertial nature, i.e., it is caused by the initial velocity field, or it is caused by sources, doublets and other hydrodynamic singularities of specified strength. At all times t thereafter, it is necessary to calculate the fluid domain and velocity.

Very few exact solutions of this problem are known. The first and probably a unique class of exact solutions are the flows with a linear velocity field. It was discovered by Dirichlet in 1860. The modern treatment can be found in [1-3]. In this case the free surface is the second-order curve: hyperbola, ellipse or parabola. Ellipse evolution is studied in [4]. Ellipsoid evolution is considered in [5], [6].

The function $U(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t)$ is the analytic function of the complex variable z and is called a complex velocity. Here $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ are Cartesian components of the velocity vector. The arbitrary analytical function $U(z, t)$ always describes some flow, although it may be in multisheet domain. It is connected with the fact that real and imaginary parts of analytic function satisfy the Laplace equation because the equation of vortex-free flow are fulfilled. For the function $U(z, t)$, it is possible to check: are the constant-pressure lines the liquid lines simultaneously (the line consists of the same particles). For that, we find isobars from the Cauchy-Lagrange integral and verify the kinematic condition. It is not known a priori how to choose function $U(z, t)$ so that it describes a free-boundary flow.

First flow

Below, we present some considerations allowing one to construct new exact solutions. Let a liquid occupy a thin stripe located symmetrically along the positive part axis x (Fig. 1).

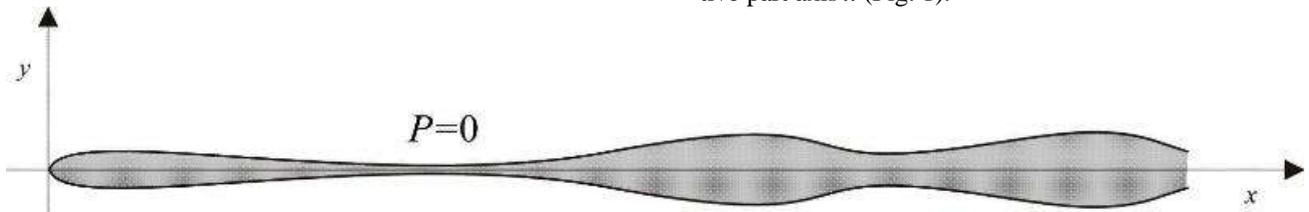


Figure 1 - The first flow

At initial time $t = 0$ the component of the velocity vector along the axis x quadratically depends on the coordinate:

$$u(x, 0, 0) = x^2/4 \quad (1)$$

The boundary of the stripe is considered to be free; zero pressure is maintained on it. It is necessary to evaluate of the boundary configuration and liquid velocity for all $t > 0$.

This problem may be solved for a thin stripe. Suppose the stripe is so thin such that pressure across it is constant. Then pressure is zero everywhere in the stripe. Thus, the pressure gradient is zero and, hence, acceleration is zero too. Therefore, each liquid particle in the infinitely thin stripe moves with the initial velocity.

If one uses the Lagrangian coordinate a , then to find the displacement $x(a, t)$, it is necessary to solve the Cauchy problem:

$$\begin{cases} x_{tt} = 0 \\ x_t|_{t=0} = a^2/4 \\ x|_{t=0} = a, (a \geq 0) \end{cases} \quad (2)$$

which has the solution

$$x = \frac{a^2}{4}t + a \quad (3)$$

In order to find the velocity $u = x_t$, as the function of Euler's coordinate x , we take the positive root of quadratic equation (3):

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{1 + xt} - 1}{t}$$

Substituting it into (2), we obtain

$$u(x,0,t) = \left(\frac{\sqrt{1+xt} - 1}{t} \right)^2 \quad (4)$$

Thus, if at initial time $t = 0$ the velocity profile is given by formula (1) and each liquid particle has the constant velocity, then at any time thereafter the velocity profile is given by (4).

The main idea of this paper consists in to analytic continuation of the solution (4) from real axis to complex plane:

$$U(z,t) = \left(\frac{\sqrt{1+zt} - 1}{t} \right)^2 \quad (5)$$

We established that complex velocity (5) describes the evolution of infinitely thin liquid stripe. Besides, it is remarkable that formula (5) describes five different free-boundary flows more.

Properties of solution

Let us choose a branch of square root for which $\sqrt{1+zt}|_{z=0} = 1$. Hence, it follows that $U(0,t) = 0$. It is possible to show that acceleration and all subsequent time derivatives of velocity of higher order also equal zero at the point $z = 0$. This means the liquid particle, which was initially at the origin of the coordinates, stays there thereafter.

The free surface of the infinitely thin liquid stripe passes through the coordinate origin (Fig. 1). Therefore, it is natural to suppose that pressure at the coordinate origin equals zero for the flow described by (5):

$$P|_{z=0} = 0 \quad (6)$$

The time moment $t = 0$ is specific. The velocity is square at this time: $U(z,0) = z^2/4$. In (5), time t may have any sign. It is more convenient to separate positive and negative times and make additionally negative times positive. Thus we obtain two cases.

In the first case (we call it *positive*) we have formula (5) at time $t \geq 0$. If $t < 0$ then we turn back time. For this purpose, it suffices to change the velocity vector for the opposite one. Substituting $U \rightarrow -U$, $t \rightarrow -t$, $z \rightarrow -z$, we obtain the second *negative* case from formula (5):

$$U(z,t) = - \left(\frac{\sqrt{1+zt} - 1}{t} \right)^2, (t \geq 0) \quad (7)$$

Note that functions (5), (7) have the point of branching:

$$x^* = -1/t \quad (8)$$

It is necessary that singularity must be outside the liquid. In recent times, a greater attention has been paid to such virtual singularity. Analysis of its behavior is very important for integrability of two-dimensional free-boundary problem. It is easy to prove that liquid velocity at singularity (8) coincides with the velocity of singularity itself.

Positive case

Complex potential $\Phi(z,t) = \varphi(x,y,t) + i\psi(x,y,t)$, where $\varphi(x,y,t)$ and $\psi(x,y,t)$ are the velocity po-

tential and stream function, respectively, it found from equation $\Phi_z = U$. Supposing that $\Phi = 0$ is at the coordinate origin we have

$$\Phi = \frac{2z}{t^2} + \frac{z^2}{2t} - \frac{4}{3t^2} \left[(1+zt)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (9)$$

It is practically impossible to perform further computations directly with formulae (5), (9) because radicals contained in them result in cumbersome expressions. We get rid of radicals by introduction a complex parameter

$$\zeta = \sqrt{1+zt} - 1 \quad (10)$$

Using (10) we transform complex plane z into plane ζ . Note that the point $\zeta = 0$ corresponds to the point $z = 0$ by this.

In addition, let us denote time by t , if z is the second independent variable, and denote time by τ , if ζ is the second argument. For example, complex velocity can be the function $U(z,t)$ or $U(\zeta,\tau)$. Such agreement is convenient for recognition of partial derivatives. Although $t = \tau$ partial derivatives have different sense and they do not coincide: $\partial/\partial t \neq \partial/\partial \tau$. Replacing z by ζ in (5), (9), (10) we obtain a parametric representation of the solution without radicals

$$U(\zeta,\tau) = \left(\frac{\zeta}{\tau} \right)^2 \quad (11)$$

$$\Phi(\zeta,\tau) = \frac{3\zeta^4 + 4\zeta^3}{6\tau^3} \quad (12)$$

$$z(\zeta,\tau) = \frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\tau} \quad (13)$$

Isobars

To find a pressure, we use the Cauchy-Lagrange integral

$$\operatorname{Re} \Phi_t + \frac{1}{2} |U|^2 + \frac{P}{\rho} = c(t) \quad (14)$$

From (6), we define: $c(t) = 0$. By using parametrical variables ζ, τ in (14), we obtain

$$\operatorname{Re}(\Phi_\tau + \Phi_\zeta \zeta_\tau) + \frac{1}{2} |U|^2 + \frac{P}{\rho} = 0 \quad (15)$$

Substitute here (11), (12) and derivative ζ_τ , found from (13). Differentiating (13) with respect to t , we have

$$z_t = - \frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\tau^2} \tau_t + \frac{2\zeta + 2}{\tau} \zeta_t$$

Taking into account that $z_t = 0$, $\tau_t = 1$, we find

$$\zeta_t = \frac{1}{2\tau} \frac{\zeta^2 + 2\zeta}{\zeta + 1} \quad (16)$$

Thus the Cauchy-Lagrange integral (15) takes the form:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\operatorname{Re} \zeta^4 - |\zeta|^4}{2\tau^4} \quad (17)$$

Using the representation $\zeta = \eta e^{i\theta}$, we obtain the fact that numerator in (17) equals zero if and only if $\cos 4\theta = 1$. Therefore we have two lines in the plane ζ ,

where the pressure equals zero: imaginary axis $\zeta = i\eta$ and real axis $\zeta = \eta$.

Find what lines in z -plane, these axes correspond to. Substitution of $\zeta = i\eta$ into (13) yields

$$z = \frac{\eta^2 + 2i\eta}{t}$$

and taking imaginary and real parts, we have

$$x = -\eta^2/t, \quad y = 2\eta/t \quad (18)$$

Thus imaginary axis $\zeta = i\eta$ in z -plane corresponds to the parabola

$$x = -ty^2/4 \quad (19)$$

Along this parabola, the pressure always equal zero.

In a similar way, we can check that real positive semiaxis $\zeta = \eta$ ($\eta \geq 0$) turns into the real positive semiaxis in z -plane as follows:

$$y = 0, \quad x \geq 0 \quad (20)$$

Here the pressure equals zero too.

Kinematic condition

If the free surface is given by equation $y = f(x, t)$, then the kinematic condition is represented in the form

$$f_t + f_x u = v \quad (21)$$

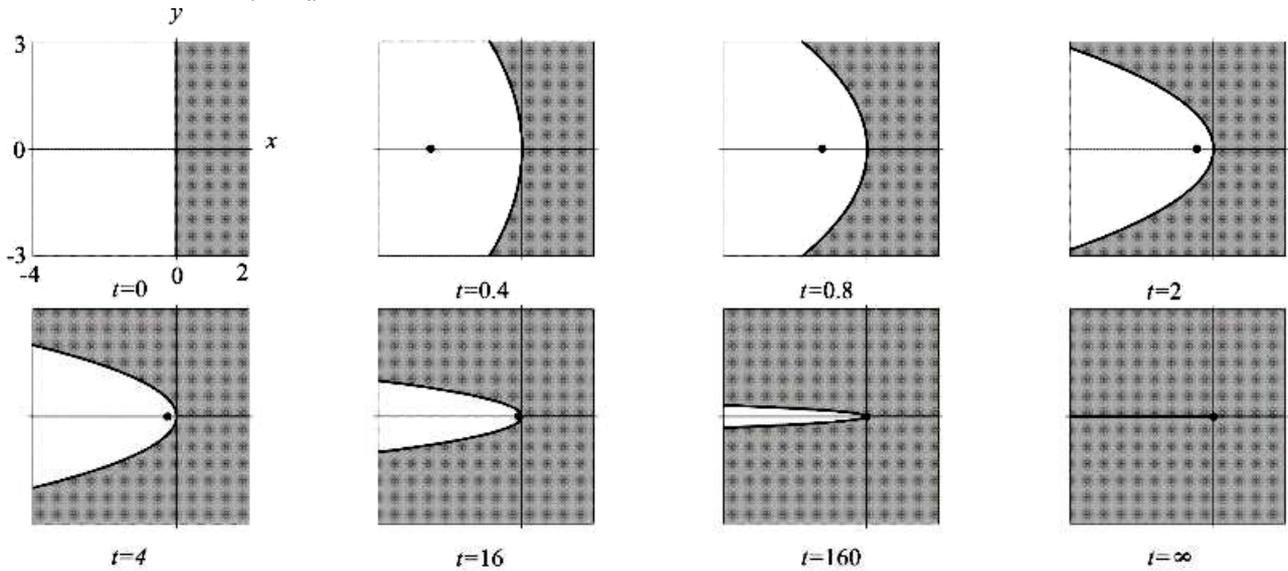


Figure 2 - The second flow

Acceleration

It is known from the manner of construction of complex velocity (5) that acceleration equals zero on the rectilinear free surface. Define acceleration for other free surface (19). In complex notation, the acceleration is found from the formula

$$\frac{dU}{dt} = U_t + \bar{U}U_z$$

Changing here variables z, t for ζ, τ , we have

$$\frac{dU}{dt} = U_t + U_\zeta \zeta_t + \bar{U}(U_\zeta \zeta_z) \quad (23)$$

From (13) we can obtain

This condition for isobar (20) is fulfilled since $f = 0$, and from (5), it follows that $v = 0$. Therefore, ray (20) is a free boundary. If the free surface is given by equation $x = g(y, t)$, then the kinematic condition may be written down in another form

$$g_t + g_y v = u \quad (22)$$

On isobar (19) we have $g = -ty^2/4$. Substituting $\zeta = i\eta$ into (11), we find the components of velocity vector:

$$v = 0, \quad u = -\eta^2/t^2$$

Using the second formula in (18), we get $u = -y^2/4$. Applying found formulae in (22), we obtain that parabola (19) is a free boundary.

The evolution of free surface (19) with increasing time is shown in Fig. 2. The dot denotes the location of singularity x^* which is initially outside the liquid and finally reaches the free surface. The initial half-plane is transformed into a plane with rectilinear cut. Thus, we have the second flow described by formula (5).

As is shown above, the axis x in Fig. 2 is not only a symmetry line but also the free surface. Hence, top half of the flow is represented in Fig. 2 is the third flow, which is described in Fig. 3. There is an interesting example of flow, in which part of the free surface remains a straight line during the whole time of flow.

$$\zeta_z = \frac{t}{2(\zeta + 1)}$$

Substitution of this derivative, complex velocity (11) and derivative (16) into (23) yields

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\zeta^2 \zeta - \zeta^3}{\tau^3 (\zeta + 1)} \quad (24)$$

It is obvious that $dU/dt = 0$ at $\zeta = i\eta$. Thus, acceleration equals zero on the free surface (19). Each liquid particle of this surface moves parallel to the axis x with constant velocity.

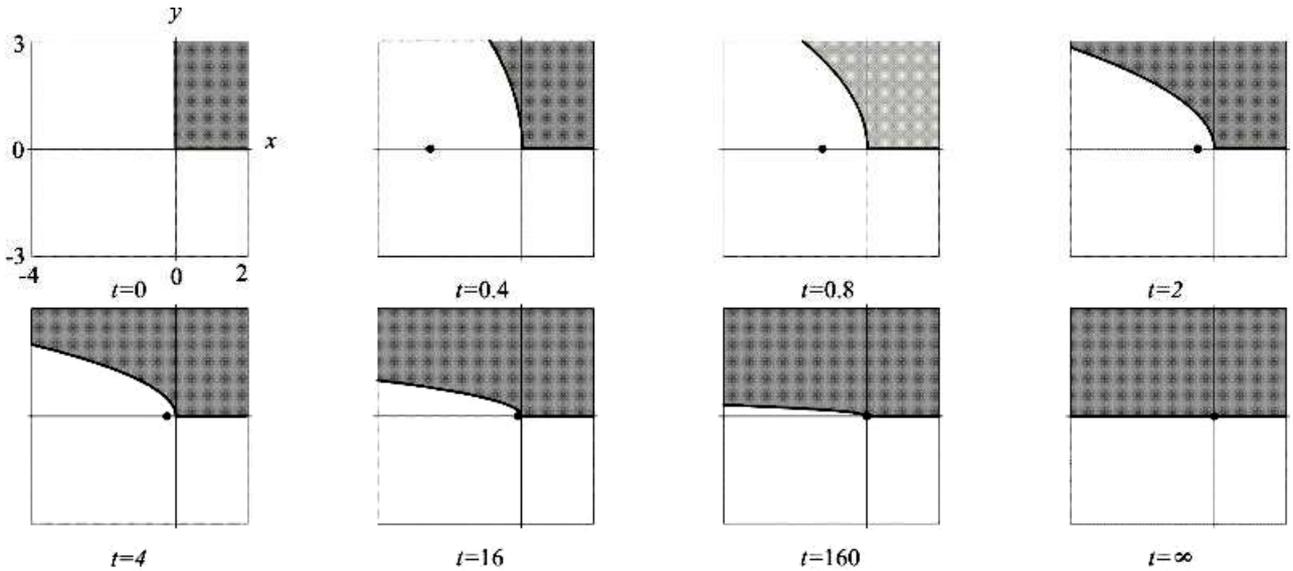


Figure 3 - The third flow

Negative case

In a similar way we can construct the flows with complex velocity (7). In this case, both, complex potential and complex velocity reverse signs. As a result, instead of (17), from Cauchy-Lagrange integral we have

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\operatorname{Re} \zeta^4 + |\zeta|^4}{2\tau^4}$$

Changing $\zeta = \eta e^{i\theta}$ we can see that the pressure equals zero if $\cos 4\theta = -1$. Thus in the plane ζ the free surface corresponds to two lines:

$$\zeta = \eta e^{i\pi/4}, \quad \zeta = \eta e^{3i\pi/4} \quad (25)$$

Substitute the first line into (13) as follows:

$$z = \frac{i\eta^2 + \eta(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{t}$$

Taking imaginary and real parts, we have

$$x = \sqrt{2}\eta/t, \quad y = (\eta^2 + \sqrt{2}\eta)/t \quad (26)$$

Hence we obtain a parabola

$$y = x + tx^2/2 \quad (27)$$

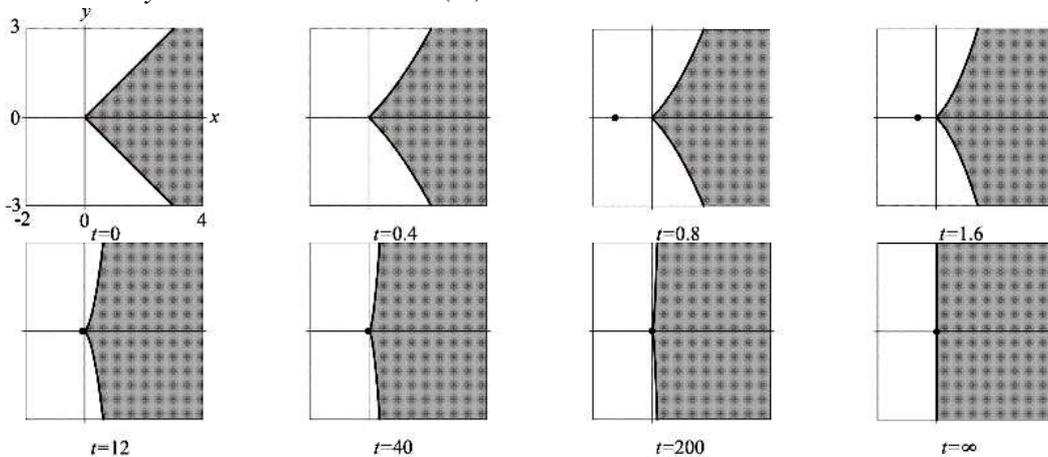


Figure 4 - The fourth flow

The form of the free surface described by (27) and the singular point x^* are shown in Fig. 4. Initially, the singular point was at infinity, finally it appears on the free surface. The flow, in which the liquid wedge with the right angle is transformed into a half-plane, is found.

along which the pressure is constant. Similarly, from the second line (25) we obtain the second analogous parabola

$$y = -x - tx^2/2 \quad (28)$$

Substitute the first line (25) into equation $U = -(\zeta/t)^2$. Taking imaginary and real parts, we have velocity components on constant-pressure line (27): $u = 0$, $v = (\eta/t)^2$. Next, by using the first formula in (26), we obtain $v = x^2/2$. Substituting found velocity components and function $f = x + tx^2/2$ into kinematical condition (21), we can see that it is satisfied. Therefore parabola (27) is a free surface. In a similar way, we can prove that parabola (28) is a free surface too.

The formula for liquid acceleration differs from (24):

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\zeta^2 \zeta + \zeta^3}{\tau^3(\zeta + 1)} \quad (29)$$

By using (24), it is easy to prove that acceleration on these free surfaces equals zero. On the free surface, each liquid particle moves with constant velocity. The path of particle is a straight line, parallel to the axis y .

The liquid flow located between two free surfaces (27) and (28) is demonstrated in Fig. 5. The liquid wedge with the right apical angle, whose bisector is along the y -axis, evolves to a half-plane with increasing time.

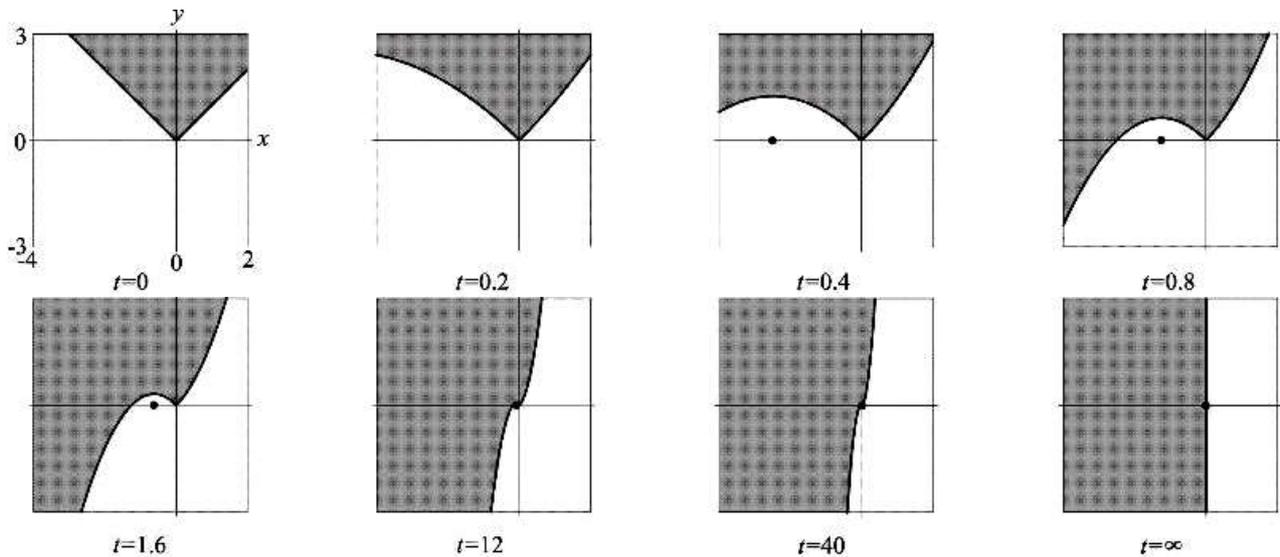


Figure 5 - The fifth flow

A remarkable feature of two liquid flows represented in Figs. 4 and 5 is that both flows have the same free surface form. Hence, one more flow can be constructed

if the top half of the flow shown in Fig. 4 is joined to that in Fig. 5. Thus we have a new flow, which is represented in Fig 6.

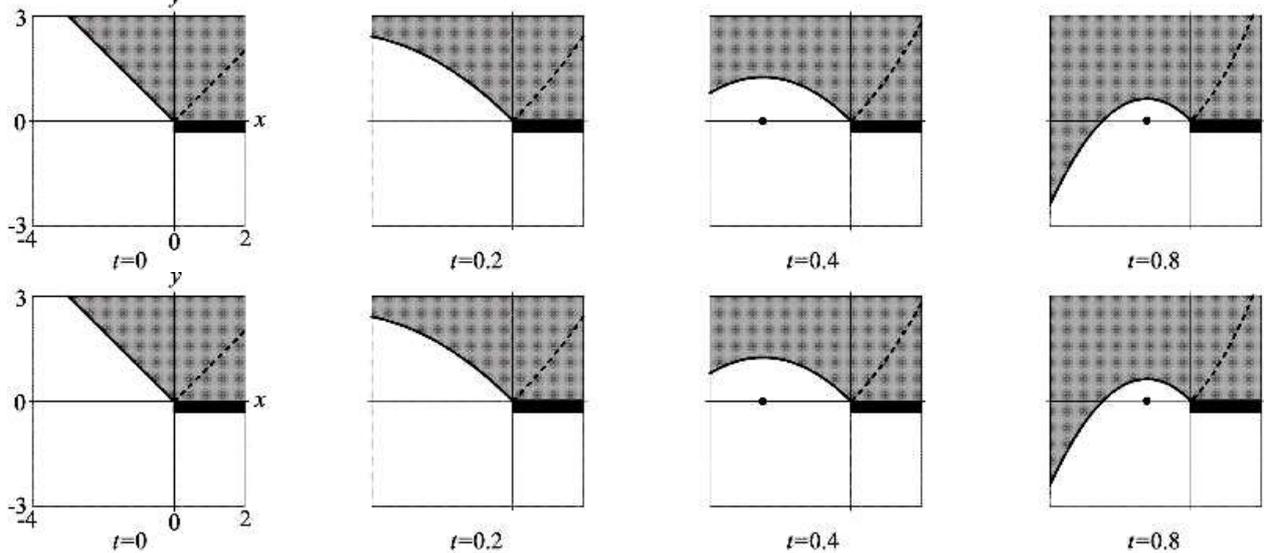


Figure 6 - The sixth flow

The rigid fixed wall is located along x axis. The parabola (28) is indicated by a dotted line. In this case the parabola can be called the *interior* free boundary since it is the constant-pressure line consisting of the same particles and located inside liquid. We have evolution of the liquid wedge with initial angle $3\pi/4$ to the wedge with angle $3\pi/2$.

Conclusion

A new method for construction of the exact solutions of free-boundary flow problem is proposed. The main idea consists in analytic continuation of the solution obtained by simple physic considerations into two-dimensional complex plane. For example, if the initial velocity profile along the x -axis will be cubic or some other profile instead of quadratic (1), then we can obtain quite different new solutions. It should be noted that all constructed flows belong to the class of self-similar flows found in [7].

The authors thanks P.I. Plotnikov for useful discussions.

The work is supported by Project of Fundamental Research of Presidium RAS No. 4.8

References

1. Ovsyannikov L.V. General equation and examples. In book: The Problem of the Unstable Flow with a Free Boundary, Nauka, Novosibirsk, 1967, pp. 5-75 (in Russian).
2. Longuet-Higgins M.S. A class of exact, time-dependent, free surface flows. J. Fluid. Mech. 1972. Vol. 55, No. 3 pp. 529-543.
3. Nalimov V.I., Puhnachov V.V. Unsteady flow of ideal liquid with free boundary. Novosibirsk, 1975 (in Russian).
4. Puhnachov V.V. About liquid ellipse motion. Dinamika Sploshnoy Sredy. 1978. V.33 pp.68-75.
5. Lavrentyeva O.M. About liquid ellipsoid motion. DAN USSR. 1980 V.253, No. 4. pp. 828-831.
6. Lavrentyeva O.M. About one class of liquid ellipsoid motion. J. Appl. Mech.Tech. Phys . 1984 V.25, No.4. p. 148-153
7. Karabut E.A. Exact solutions of the problem of free-boundary unsteady flows. C.R. Mecanique 341 (2013) 533-537

SOME EXPERIMENTAL RESULTS INVESTIGATIONS of CAVITY FLOW FORMED by OUTSIDE HYDRODYNAMIC SINGULARITIES

Vladislav P. Makhrov

Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI

4, Volokolamskoe shosse, 125993 Moscow, Russia
k608@mai.ru

Abstract

The paper presents some results of the experimental research of the axisymmetric supercavity flow formed by outside hydrodynamic singularities - the ring type wings. These flows are known as Lighthill - Shushpanov flows. The results of the cavitation experimental testing have been cited as an example of the new method of the cavities formation with positive and negative cavitation numbers in horizontal and vertical streams.

Nomenclature

d_w, d_c, λ, x - Wing and cavitator-disc diameters; aspect ratio; coordinate.
 V, p, p_σ, ρ - Velocity; pressure in the flow and cavity; density.
 X, C_x, C_g - Drag Force; drag coefficient, gas rate coefficient.
 $\sigma = 2(p-p_\sigma)/\rho V^2$ - Cavitation number.
 $Fr = V^2/g d_c$ - Froude number

Introduction

The idea of supercavitation attracts the attention of creators of high velocity underwater vehicles as a fundamental way to reduce the hydrodynamic drag, and first of all – the friction drag. Consequently, it may increase the vehicle velocity significantly. Problems of organization and calculations of the flows for the cavitation drag decreasing are the main tasks of the supercavitation investigations.

A moving system as whole is complicated by different aggregates using for the energy consumption for the drag overcoming and for the gas injection for the cavity ventilation. However, there are many theoretically researches of cavity, but the fact that since the research by H. Reichardt does not sufficiently active proceeding in using of the cavity for underwater motion with high velocity. Though, he obtained the basic tenet and equations for the cavity formation.

It is known that the usual supercavity shape is represented as an ellipsoid. But until the present time there is no evidence that the cavity may be controllable yet with different shape and cavitation numbers.

Eminent Research worker and investigator in native Aero and Hydrodynamics Professor of Moscow State University Vladimir F. Shushpanov (1911-1988) was the first who realized in practice by Lighthill's idea about cavity with negative cavitation number and a point of closing. M. Lighthill has proposed to use the hydrodynamic singularities for the cavity boundary formation for it [1].

Systematic physical experiments on cavitation flows formed according to Lighthill method were performed by Professor V.F. Shushpanov and his colleagues in Moscow Aviation Institute (MAI) jointly [2,3].

Shushpanov shown first that a cavity is formed by the ring wing (annular airfoil) and others hydrodynamic singularities and depends on the geometry of the ring wing, the cavitator and their combinations.

The similar flows were theoretically and experimentally obtained in MAI by using the ring wing. We named such cavitation flows as Lighthill – Shushpanov flows [4 - 7].

Figure 1 shows the first Lighthill's real cavities. It is obtained by using the practical ring hydrodynamic singularities – a ring water scoop.

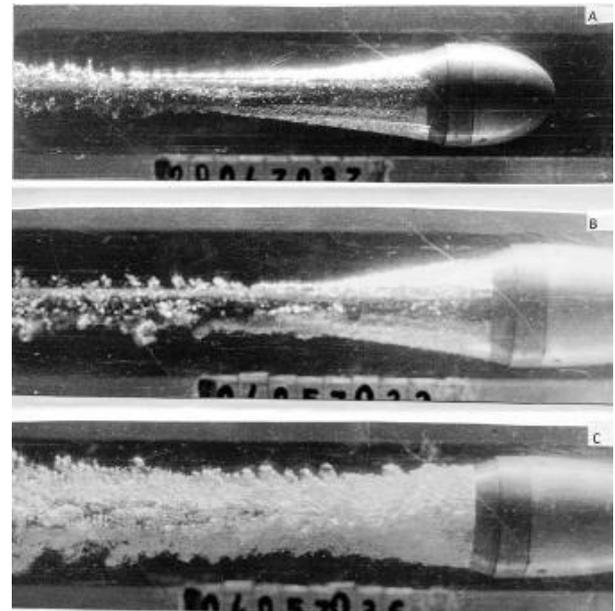


Figure 1 - Cavities by Lighthill with negative cavitation numbers (Experiment by V. Shushpanov):

A – $\sigma = -0.06, C_g = 0.028$;

B – $\sigma = -0.044, C_g = 0.017$;

C – $\sigma = -0.068, C_g = 0.053$.

The results by V. Shushpanov we repeated with success in A. Krilov flow channel for the model with 300 mm diameter [3].

This paper presents the some results experimental investigation of the controlled cavitation flow and its boundary formed by the hydrodynamic singularities – the ring wings (annular airfoil) in horizontal and vertical streams.

1. Experimental Procedure

The theory of the type Lighthill – Shushpanov flows has been applied to many experimental tests in the hydrodynamic test tunnel, towing and vertical testing rig. Systematic tests have been conducted since 1976.

Experimental procedures were performed at relatively low velocities in steady-state conditions for the disc-cavitator, testing models of bodies of various aspect ratio ($\lambda = 5 \dots 20$) and for various model's head and the ring wings at all hydrodynamic test rigs. The maximum diameters of the testing models for test tunnel were: disc-cavitator - 10mm; models of the body - 20mm; the ring wings to 60mm. For the towing the diameters of testing models were 110...300mm.

The cavitation number is simulated by supported gas (air). The expression for the gas rate has the forms:

$$C_g = GRT / \rho d_c^2 V.$$

Here G , R , T are gas weight per 1 s the gas constant, temperature of gas accordingly.

Measurements of the drag were realized for the qualitative analysis or for the comparison with analogs.

$$C_x = 8X / \pi \rho d_c^2 V^2.$$

The number of cavity σ , number of Froude and drag coefficient can be estimated.

2. The cavities are in horizontal streams

Figure 2 shows several examples photos of the cavity formed by the ring wing in natural tunnel stream, where in the cavity shape can be seen.

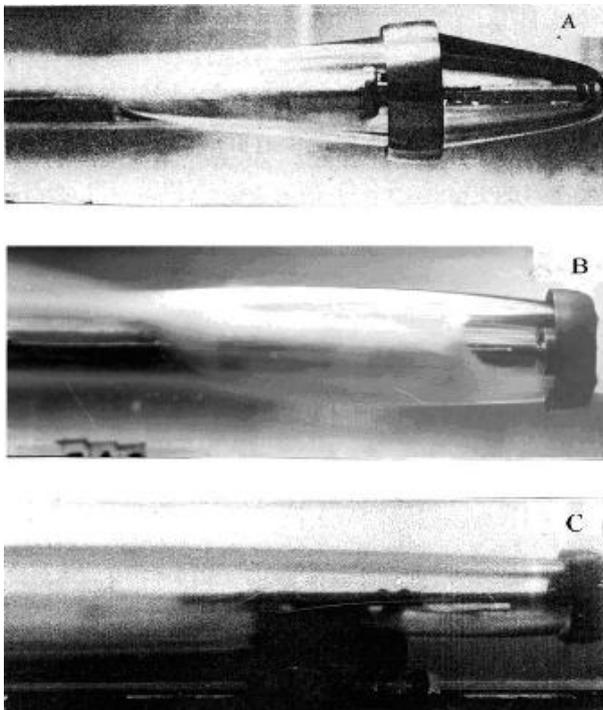


Figure 2 - Examples of the horizontal cavities formed by the ring wing:

A - $\sigma = -0.06$; B - $\sigma = 0.12$; C - $\sigma = 0.06$

Here for these conditions qualitatively different types of gas entrainment have been found: gas entrainment by vortex filaments or gas entrainment with foam.

In Fig. 3 shows the examples of the photo frames of the supercavities, formed by the pair ring wings. Here can be seen composite shape of the cavities with various number of the cavity.

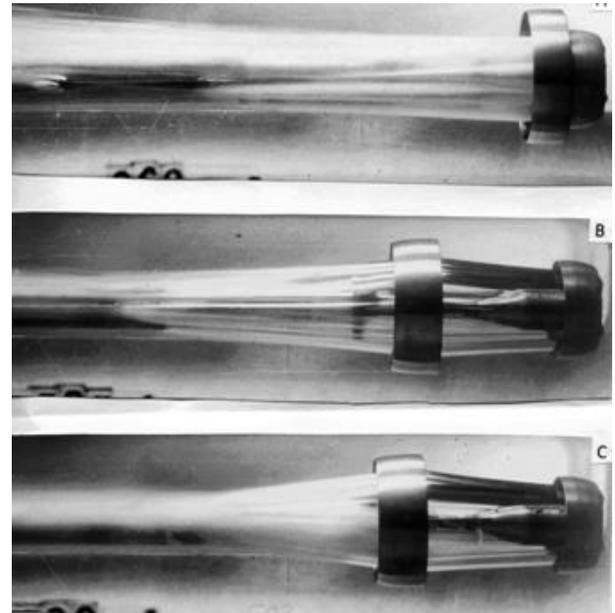


Figure 3 - Examples of the horizontal cavities formed by a pair ring wings

(σ_0 - cavity number in the disc zone):

A - $\sigma_0 = 0.04$; B - $\sigma_0 = -0.12$; C - $\sigma_0 = -0.08$

The first photo A shows the cavity with positive number and large aspect ratio ($\lambda > 20$). Others photos B and C shows the cavities with negative numbers and various gas rate. Here it is obvious the changing of the cavity curvature and velocity at the cavity boundaries. There are the points of the bend under the wings. The speed at the boundary of the cavities is changeable in the first part of the cavity and after of the wing. There is alteration the numbers of cavity before the second wing and after it.

Figure 4 also shows two photo of the supercavities formed by the pair ring wings, but with their various hydrodynamic parameters and the gas rate. Here can be seen the supercavities with various aspect ratio ($\lambda = 10 \dots 15$) and alteration of the wings characteristics (airfoil profile and wing chord) and distance between the wings.

The photo frames of the cavity formed by the ring wings in horizontal streams demonstrate the complexity but various possibilities of controlling the parameters of the ventilated cavities by varying the parameters of the wings and its relative allocation.

3. The supercavities are in vertical streams

In this section present the results of the experiments for the cavities in vertical streams. For the given cavities there is necessary to make allowances for gravity effect. The number of the cavity with its influence gravity along the length of the cavity is

$$\sigma = \sigma_0 + 2x / Fr^2(d_c).$$

Here σ_0 is the cavity number at the disc level; x is linear coordinate along the length of the cavity. Experimental tests were carried out at the small vertical water tunnel in the Moscow Complex of the TsAGI.

Method of the test is analogy by [8]. This method is shown in [9] too.

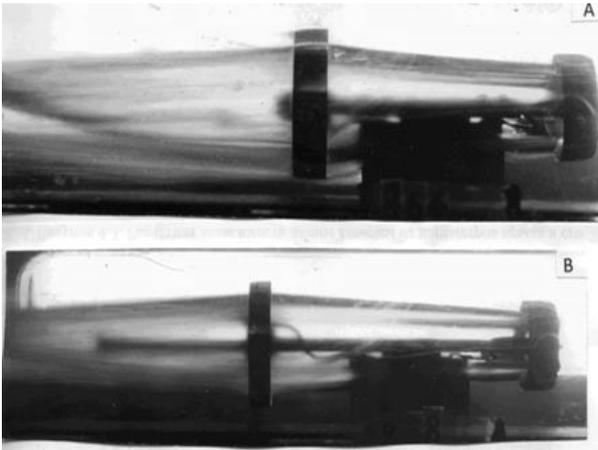


Figure 4 - Examples of the horizontal cavities formed by a pair ring wings: A - $Fr(d_w) = 20$; B - $Fr(d_w) = 50$

In Fig. 5 shown a comparison of the cavity shapes behind the disc in the falling vertical gravity flow without the ring wing (A) with $C_x = 0.89$ and formed by the ring wing around the disc (B) with $C_x = 0.2$. The cavitation number σ_0 and gas rate C_g were constant here.

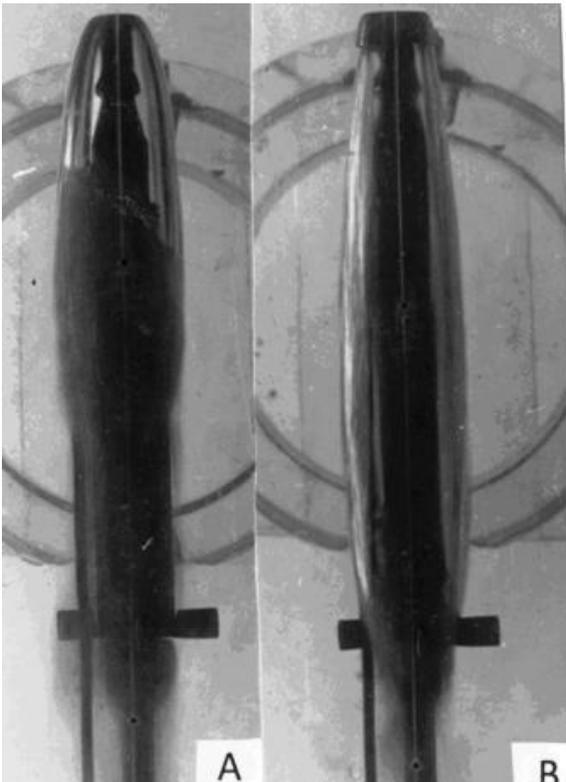


Figure 5 - Cavities in vertical water tunnel ($Fr = 11,2$):
A - behind the disc,
B - behind the disc with the ring wing

Figure 6 shows two photo the cavities formed by a ring wing at the models of the vehicle with $\lambda = 10$. At the second photo (B) the cavity has aspect ratio $\lambda > 20$.

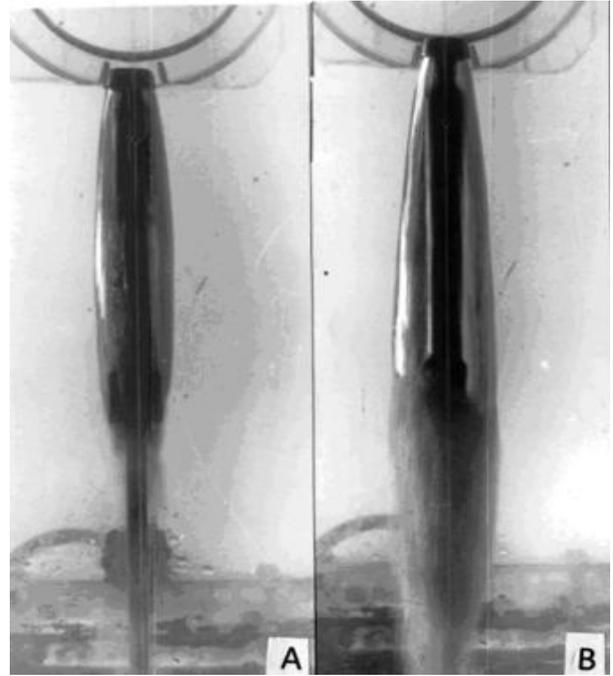


Figure 6 - Vertical cavities for the vehicle models:
A - $C_g = 0.15, Fr(d_w) = 12,5$;
B - $C_g = 0.23, Fr(d_w) = 16,5$

Figure 7 also shows two photo of the supercavities formed by the ring wings at the models with large aspect ratio ($\lambda = 20$).

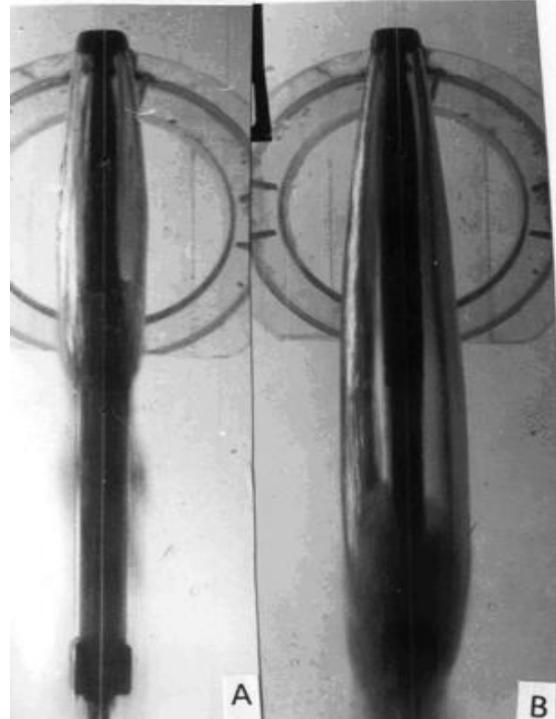


Figure 7 - Vertical cavities at the vehicle models with large aspect ratio and various gas rate:
A - $C_g = 0.12, Fr(d_w) = 12,5$;
B - $C_g = 0.26, Fr(d_w) = 16,5$

The present experimental data shows what the aspect ratio of the vertical cavity formed by the ring wing more simple vertical cavity [8, 9] to 2 - 3 dimension for equal conditions.

Vertical cavity flows formed by the ring wings being investigated first by author.

Conclusions

The presented method of modeling cavity flows in horizontal and vertical streams applied earlier by Vladimir Shushpanov gives possibility to form the controlled supercavities flows in real water for real vehicle with determinate the cavity shape and length.

The experiments showed the most important characteristic of the supercavitation formed by the ring wing – it is the possibility to make the closing flow with very small energy loss.

Some theoretical and experimental results related to this problem were published in [4 – 7].

Literature:

1. Lighthill M.J. A note on cusped cavity/ARC R&M №2328; London, GB; 1949.
2. Makhrov V.P. Theoretically investigations of the cavities with negative numbers. // Aerospace MAI Journal, V8, №2, 2001. pp. 30-39 (In Russian).
3. Makhrov V.P., Kerin N.V., Pushkarev A.A. The using of supercavitation with negative numbers of cavity for motion with high-speed moving under water. Proceedings of Conferens: The Problems of the Body

Motion in Liquid with High Velocity. Moscow: TsAGI-REGION, 2002. pp. 140-150 (In Russian).

4. Makhrov V.P. Hydrodynamic of control flows has shaped free boundaries using of external hydrodynamic singularity – the ring wing. Aerospace MAI J. 2009, 16(5), Moscow: MAI-Print, pp. 264-273 (In Russian).

5. Makhrov V.P. Controlled Supercavitation Formed By A Ring Type Wing //Proceeding of the 7th International Symposium on Cavitation (CAV2009), V1, pp.576-581. Ann Arbor, Michigan, USA, 2009.

6. Makhrov V.P. Hydromechanics of cavity flows, Formed by The Outside Hydrodynamic Singularities. Moscow: MAI Publishers; 2011(In Russian).

7. V. Makhrov Controlled Supercavitation Formed by a Ring Type Wing. // “Supercavitation. Advances and Perspectives” (Ed. I. Nesteruk). 2012, Springer-Verlag, Berlin , pp 65-77.

8. Gulnev S.I., Kapankin E.N. The peculiarity of the cavitation flow-around body in vertical stream of a liquid //Scien. Notes TsAGI, 1975, VI №2, pp. 56-62 (In Russian).

9. Makhrov V.P. The Hydrodynamical Design of the High-speed Underwater Vehicles. Moscow, MAI Publishers; 1998 (In Russian).

10. Knapp R., Daily J., Hammitt F . Cavitation. Moscow: Mir Publishers; 1974 (In Russian).

SOME ASPECTS OF SUITABILITY OF THE PACKAGE OF THE ENGINEERING ASSAYING STARCCM + FOR DEFINITION OF THE CHARACTERISTICS OF THE VAPOR BUBBLE COLLAPSE

Nikolay Ovchinnikov, Sergey Chalov

Krylov State Research Centre (KSRC)

44, MoskovskoeShosse, St.Petersburg, 196158, Russia
krylov@krylov.spb.ru

Abstract

The problem of use of a package of the engineering analysis of STARCCM+ for definition of hydrodynamic characteristics of a collapsing vapor bubble is considered. The choice of hydrodynamics models is reasonable and meshes' parameters grids are determined. Characteristics of a flow are calculated for cases of existence of a wall near a bubble and without wall. Comparison with the relevant experimental data is presented. Vapor condensation influence from a bubble in surrounding liquid is considered. In relation to a case of existence of a wall calculations are executed for the bubble spherical and lost sphericity. Approximate calculation of dependence of pressure operating on a wall from time is executed.

Introduction

Using of high-performance computer systems allows to carry out definition of hydrodynamic characteristics of different objects. According to article [1] materials as a result of this process there is an erosion, i.e. destruction of details of devices and mechanisms which are exposed to a cavitation flow. The phenomenon of a cavitation erosion was observed and is described about a century ago but still the problem of prevention of erosive damages is solved on the basis of results of specially carried out experiments and the relevant statistical data. Too most it is possible to tell about a quantitative assessment of erosive damages. Data on influence of liquid on a wall at collapse of a steam bubble near it will be undoubtedly useful at specification of the solution of the called task if that is required in the future. The purpose of the present article is demonstration of opportunities of a package of the engineering assaying of STARCCM+ and justifications of its suitability for definition of hydrodynamic characteristics of the steam bubble collapsing in boundless liquid and near a wall. Used RANS method to the two-phase environment water-steam taking into account forces of a surface tension is used. The position of limits of the section was defined by a method of the accounting of volume of liquid (VOF method). Mass transfer between phases paid off with the help of the field functions, which were set on the basis of the materials published in [2,3].

Determination of parameters of the computational scheme in relation to a case of boundless liquid

For calculations of a collapse of a spherical bubble the hybrid grid consisting of unstructured and structured parts was used. The unstructured part represented the sphere with polyhedral cells. Sphere radius is equal 0.5 of the sphere radius. The structured part of a grid consisted of prismatic layers. From the above-mentioned sphere to edge of external area the grid condensation with coefficient 1.2 in the radial direction to an interface steam-water and a growing of the cell size in the direction of external area was appointed. Radius of external area by eight times exceeded bubble radius in an initial

timepoint. The timestep changed automatically, at reduction of radius of a bubble the vapor-water boundary passed from one cell to another for 4 timestep. At withdrawal of an interface of environments from an initial condensation more than on 5 prismatic layers the grid was reconstructed anew for ensuring compliance of area of a condensation of prismatic layers to bubble radius. As a result the quantity of cells necessary for the correct description of process of a collapse of a bubble, was rather small and acceptable time of calculation was provided. This fact allowed to carry out a big series of calculations with various parameters, as net for an assessment of net convergence, and physical models for an assessment of adequacy of representation of physical processes.

The assessment of the received results was carried out by comparison of calculated dependence of radius of a bubble from time with the relevant experimental data given in [2]. Section of calculation area the plane passing through the center of a bubble in an initial timepoint, is given in figure 1.

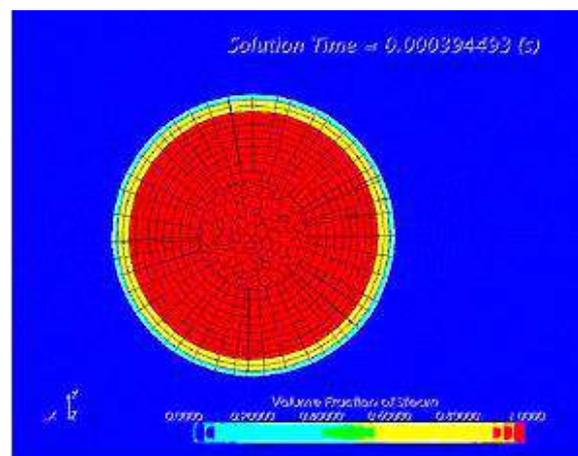


Figure 1 - Initial version of a calculation grid. Section the plane passing through the center of a bubble in an initial timepoint.

However it doesn't suit for calculations of characteristics of the bubble which has lost sphericity, such approach. For this reason the second specified option

of a calculation grid which is shown in figure 2 was developed. The space is divided into the areas which borders are invariable, and the size of cells is constant within area. Upon transition of border of area the size of a cell changes, it decreases as approaching the bubble center. The sizes of cells in each area are determined on the basis of results of the calculations executed by means of a grid, shown in figure 1.

The specified option of a settlement grid will demand much more machine time, than the first. Specified option is used for working off of parameters of the grid used at calculations of a collapse of a bubble near a wall.

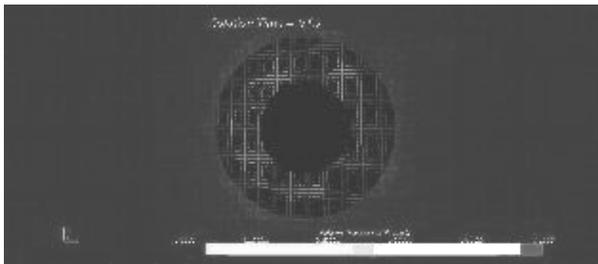


Figure 2 - The specified option of a calculation grid. Section the plane passing through the center of a bubble in an initial timepoint.

Results of calculations of collapse of a bubble in boundless liquid

Dependences of pressure of liquid surrounding a bubble on radial coordinate were firstly calculated at various compression of a bubble. They are given in fig. 3.

The type of dependences presented in figure 3 and tendency of their change coincide with the corresponding results of the calculations of a collapse of a steam spherical bubble executed analytically. The called results are given in [3]. Calculations of compression of a bubble without concentration of steam were executed in relation to the initial and specified options of calculation grids.

At calculations influence of vapor condensation on its pressure was as follows considered. Dependence of speed of vapor condensation on its pressure and temperature is given in the book [2]. STARCCM+ allows to consider change of weight of vapor in a bubble at its compression. The formula for calculation of speed of condensation is taken from [2] and looks like:

$$G = \frac{AP}{\sqrt{2\pi BT}} \quad (1)$$

were: G – speed of condensation; A – the accommodation coefficient according to data from [2] is equal 0.04; P – vapor pressure; B – specific vapor constant; T – absolute temperature of vapor.

The mass of the condensed vapor was defined as product of speed of condensation on a step by time and bubble surface area. According to data [2] at a speed of condensation, smaller product of density of vapor and compression speed, condensation has no influence on compression process.

Comparison of dependences of radius of a bubble from time, received at calculation and at experiment, is given in figure 4. Increasing of external pressure is set according to experimental conditions.

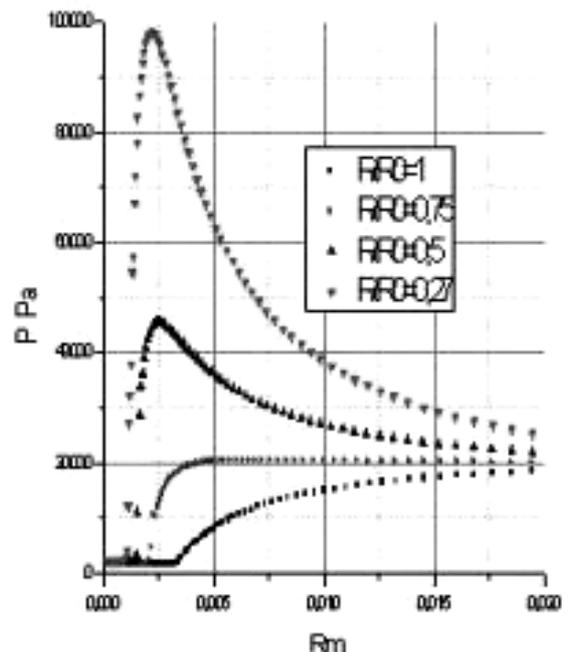


Figure 3 - Dependences of pressure of liquid surrounding a bubble on radial coordinate at various compression of a bubble.

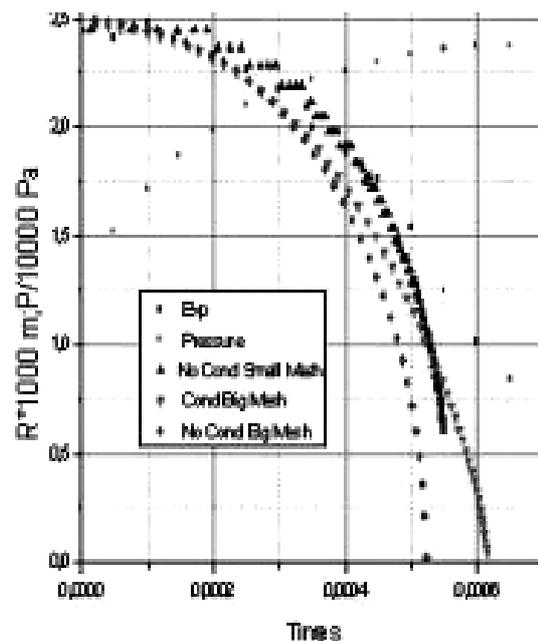


Figure 4 - Dependences of radius of a vapor bubble on time.

Comparison of calculated and experimental dependences of diameter of a bubble from time allows to make a conclusion that on rather their good coincidence at big radiuses. Influence of various grids thus insignificantly. At compression the bubble keeps sphericity.

It is visible that at radius reduction to about 1.75 mm results of calculations with use of a specified grid are rather close in relation to account and neglect cases condensation. Its influence grows at increase in extent of compression of a bubble.

The received results allow to make a conclusion about suitability chosen models of a flow and key parameters of grids for calculation of a collapse of a vapor bubble.

Also paradoxical result: the initial grid gives the best coincidence of calculated and experimental data, than specified the second option, in the range of radius from about 1.75 mm to about 2.25 mm. The monotonous increase in a difference in relation to a case of the specified grid is observed.

Determination of parameters of the computational scheme in relation to a case of existence of a wall

In the presence of a wall the flow ceases to be spherically symmetric. For this reason the calculation grid is under construction uniform on the volume of considered area with a condensation in the bubble location. On the basis of given in [1] data of high-speed filming of a collapse of a bubble near a wall it is possible to make conclusions about a form and the sizes of the called area and the demanded sizes of cells. In the present paper at loss sphericity by a bubble the sizes of cells are defined on the basis of data of high-speed filming of the bubble which has lost sphericity. The called data are provided in article [4]. Figure 5 gives an idea of a calculation grid used in this case.

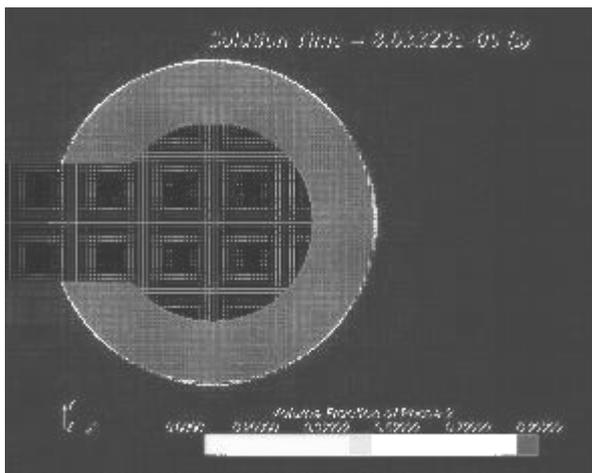


Figure 5 - Third option of a calculation grid. Section the plane passing through the center of a bubble in an initial timepoint and a perpendicular of the wall.

Expenses of machine time and demanded resources are near to values of the corresponding parameters for the specified option of a grid.

In case of absence of experimental data determination of the sizes of cells has to become a subject of special researches. The configuration of areas in which the size of cells is constant, should select similar considered in the present work.

Results of calculations of a collapse of a bubble near a wall

Comparison of dependences of radius of a vapor bubble from time, received at calculation and at experiment, is given in figure 6.

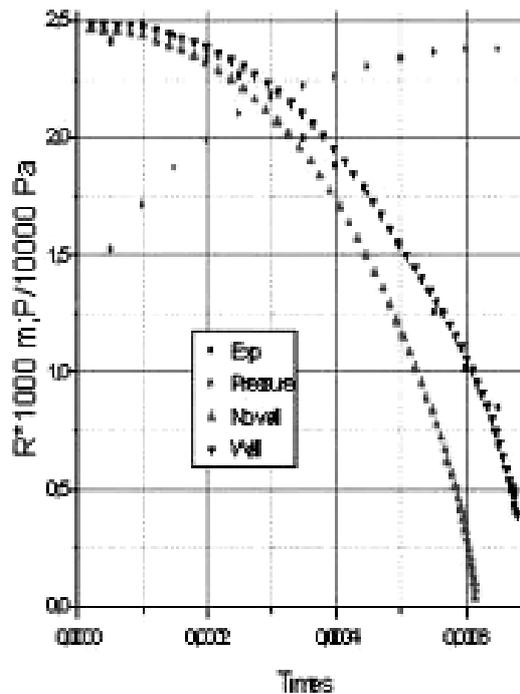


Figure 6 - Dependences of radius of a vapor bubble on time.

Comparison of calculated and experimental dependences of radius of a bubble from time allows to make a conclusion about rather their good coincidence.

Influence of a wall causes increase in radius of a bubble in relation to the radius of the bubble in boundless liquid.

The applied method allows to define a bubble form in various timepoints. Section of the bubble which has lost sphericity is given in figure 7.

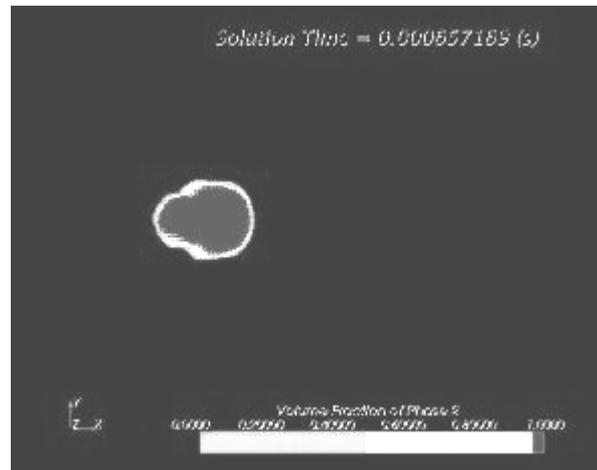


Figure 7 - Section of the bubble which has lost sphericity.

Dependence on time of pressure of liquid operating on a wall is of interest, which reaches a maximum after a bubble collapse. At calculations of a collapse of a bubble for the flow description it is enough to define movements of particles of liquid. In process of reduction of volume of a bubble originally condensation provides a constant vapor pressure in it. At achievement by a bubble of some volume

condensation doesn't provide the decrease of vapor demanded for maintenance of constant pressure, and it starts increasing. Thus the increase in condensation caused by vapor pressure growth is still not enough for noticeable braking of a collapse of a bubble, but further the speed of a collapse starts decreasing with a vapor pressure growth.

Apparently from a formula 1, the speed of condensation depends on a vapor pressure in the first degree, and reduction of surface area of a bubble leads to reduction of weight of the condensed steam in process of a collapse. As a result further development of process leads to vapor pressure growth up to the sizes which are much exceeding pressure of surrounding liquid. Thus the speed of movement of particles of liquid it is essential (about in order) less maximum of the speeds observed at previous stages of process. As a result instead of a task about movement of particles of liquid at a collapse of a steam bubble it is necessary to formulate and solve a problem about behavior of a bubble with a high pressure of steam in it.

The formulation and the solution of this problem is beyond this work. Here the results of approximate calculations confirming suitability of the STARCCM+ for further researches are presented only. In figure 8 approximate dependence on time of the average pressure operating on the nearest to a bubble part of a wall is presented. The area of this site is some orders less than the area of diametrical section of a bubble in an initial timepoint.

The results given on figure 8, testify to suitability of the chosen approach for approximate determination of pressure of liquid operating on a wall at a collapse of a vapor bubble near it. The section of a bubble, corresponding to a timepoint at which pressure operating on a wall is maximum, shown in figure 9.

Further according to the received results there is a reduction of pressure operating on a wall at simultaneous reduction of volume of a bubble. As pressure in a bubble too is very great, such situation can be caused by vapor condensation influence.

Conclusions

The main result of work is the conclusion about suitability of a STARCCM+ package for definition of hydrodynamic characteristics of a collapsing vapor bubble. The choice of models of a flow is reasonable and parameters of calculation grids are determined. Characteristics of a flow are calculated for cases of existence and absence of a wall near a bubble, comparison with the relevant experimental data is presented. Vapor condensation influence from a bubble in surrounding liquid is considered. In relation to a case of existence of a wall calculations are executed for the bubble spherical and lost sphericity. Approximate calculation of dependence of pressure operating on a wall from time is executed at a bubble collapse near it.

It is necessary to notice that the received results are approximate and process of a collapse demands further more detailed study. For this purpose it is necessary as

improvement of models and grids when using a package STARCCM+ and improvement of the experimental equipment for obtaining detailed data on a flow and carrying out the corresponding experiments.

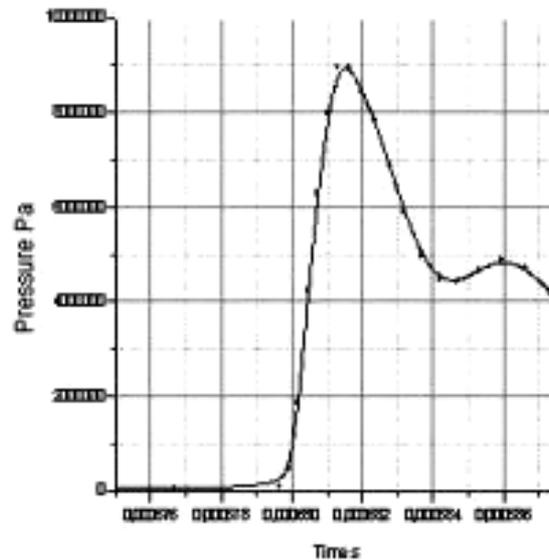


Figure 8 - Dependence of pressure operating on a wall on time.

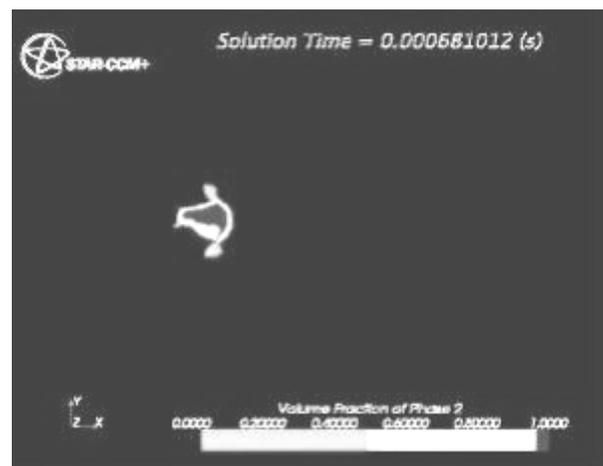


Figure 9 - Bubble section in a timepoint corresponding to a maximum of pressure operating on a wall.

References

1. Georgievskaya E.P., Zavadovsky N.Yu. Hydrodynamic erosion and principles of design of the ship designs subject to an erosion. In collection «Sudostroenie zarubezhom», issue.3(87), 1974, pages 76-88, In Russian.
2. Levkovsky Yu.L. Structure of cavitation flows. Leningrad. «Sudostroenie», 1978, in Russian.
3. Pernik A.D. Problems of the cavitation. «Sudpromgiz», 1963, in Russian.
4. Lauterborn W. Kavitation durch laserlicht. Acustica, 1974, v. 31, N 2, s. 51-58

ASYMPTOTIC SOLUTIONS AND DEPENDENCES FOR ENGINEERING CALCULATION OF CAVITATION FLOWS BEHIND SLENDER AXISYMMETRIC BODIES

Vladimir V Serebryakov

Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine

8/4 Zhelyabov Str., 03057, Kyiv, Ukraine
serebryakov_vladimir@yahoo.com

Abstract

An attempt is made to elaborate different variants of asymptotic solutions to one of the problems, which are critical for practical applications, - determination of the shape of slender supercavities behind extended axisymmetric bodies. This study is aimed at development of simple engineering equations based on asymptotic solutions for the reliable shape estimation of cavities behind extended axisymmetric cavitators of quite arbitrary shapes.

Problems of reliable calculation, in case of cavities with very big elongations, appear to be very topical for a number of applications. However, considerable elongation of supercavities combined with a complex singular structure of solutions provides an essential hindrance for elaboration of quite reliable numerical solutions of these problems. Therefore, reliable nonlinear numerical solutions are currently available only for separate stationary test problems. At the same time, applications require quite simple methods of calculation, which are in some cases essentially distinct from test solutions. On the other hand, slenderness appeared to be a considerable simplifying factor, which allows one to construct quite simple asymptotic solutions.

These solutions are very convenient as the basis for elaboration of simple and reliable methods of engineering calculations in the majority of applications. The critical role of slender cavitators is attributed to their specific properties, which are used for motion control, compensation of gravity effect on the cavity shape, as well as are widely applied in various technologic processes of treatment of various materials and liquids, etc. The scheme of cavity formation cavity behind a slender cone is shown in Fig. 1.

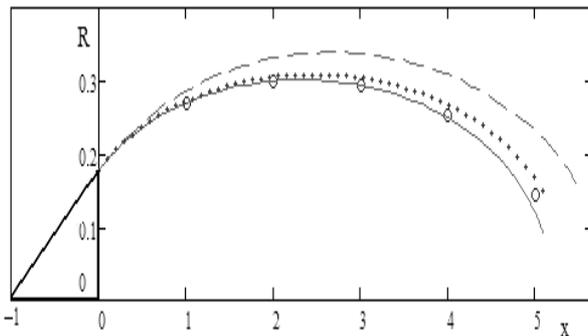


Figure 1 - A slender cavity behind a slender cone

$\sigma=0.04, \gamma=10^\circ, l=1$

----- 1st approximation – ellipsoid cavity,

————— 2nd approximation - $M=0$,

□ □ □ □ 2nd approximation - $M \sim 0.35$ via solution (4);

○ ○ ○ ○ nonlinear numerical calculation [5]

Problem Statement

The basics of hydrodynamics of supercavitation is presented in monograph [1]. Within framework of the model of potential flow of ideal compressible liquid, the problem of determination of subsonic supercavitating flow within the limits of hydrodynamics of slender bodies is reduced to the solution of the integro-differential equation for the cavity shape $r=R(x)$ behind a cavitator $r=r_n(x)$ [2, 3] for the initial conditions in the flow separation cross section and the condition for cavity length assessment (1a-1d):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4x(L-x)} - \\ & \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \\ & - \int_0^{x_s} \frac{d^2r_n^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \frac{d^2R^2}{dx^2} dx_1 - \int_{x_s}^L \frac{d^2R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \frac{d^2R^2}{dx^2} dx_1 - \\ & \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \\ & - \frac{dr_n^2}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L} = 2\sigma(x), \quad (1) \\ & \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{a) } [R = r_n(x)]_{x=x_s}, \text{ b) } \left[\frac{dR^2}{dx} = \frac{dr_n^2}{dx} \right]_{x=x_s}, \\ & \text{c) } [R^2 = 0]_{x=L}, \text{ d) } \left[\frac{d^2R^2}{dx^2} = \frac{dr_n^2}{dx^2} \right]_{x=x_s}. \end{aligned}$$

Here $x=x_s$ is flow separation cross section coordinate, $\sigma = 2(P_\infty - P_c) / \rho U_\infty^2$ is the cavitation number, where $P_\infty - P_c$ is the difference of hydrostatical pressure and pressure in a cavity, ρ is mass density of the liquid, and U_∞ is inflow velocity. $\beta = \sqrt{1 - M^2}$, $M = U_\infty / a$, $a \sim 1500 \text{ m/s}$ - sonic speed for water. The parameter $\delta_* = 2R_m / (l + L_c)$ defines the order of magnitude of the ratio between the maximal diameter of a cavity $2R_m$ and the total length $l + L_c$ of the cavitator - cavity system and is assumed to be a small parameter. Below each term of equation (1) there is indication of the order of its smallness at $\delta_* \rightarrow 0$. The solution of the

limiting equation implies a blunt shape of the cavity rear edge at $\sigma=\text{const}$. Proceeding from this, the last term in equation (1) can be treated as a pointed equivalent of the cavity rear edge closure of the Ryabushinsky type. This closure is controlled by a pressure sourced, which models the elevated pressure near small-sized cavitators of disk type, a blunt cone, etc. Within the limits of accuracy, the cavity closure shape is not essential, unlike the fact of presence of cavity closure, which provides a universal effect on the cavity.

Regular Solutions

The direct solution method for preset cavitator length: The Asymptotic solution of problem (1) is obtained for the preset values of: the length $l=1$ of quite arbitrarily shaped cavitator $r_n = r_n(x) = \tilde{r}_n(x)$ and cavitation number $\sigma(x) = (\delta^2 \ln 1 / \beta^2 \delta^2) \hat{\sigma}(x)$, $\hat{\sigma}(x) = O(1)$ under condition that $\varepsilon / \delta = O(1)$ and for the preset number of various alternatives $\delta = O(\varepsilon)$. In case of a cone, $\varepsilon = \tan \gamma$, where γ is the cone semi-opening angle. The flow separation cross section is assumed to be fixed (Fig. 1). The solution for the cavity shape and length L_c is derived in the form of expansions:

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= \delta^2 \left[\tilde{R}_0^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \tilde{R}_1^2 + \dots \right], \\ \text{b) } L_c &= \tilde{L}_{c0} + \frac{\tilde{L}_{c1}}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

and is further reduced to the sequence of boundary problems:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} &= -2\hat{\sigma}(x) \left[\frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} = \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \right]_{x=0}, \quad [\tilde{R}_0^2 = \tilde{r}_n^2]_{x=0}; \\ \frac{d^2 \tilde{R}_1^2}{dx^2} &= \frac{1}{2\tilde{R}_0^2} \left(\frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \ln \left(\frac{\tilde{R}_0^2}{4(1+x)(1-L_{c0})} \right) - \\ & - \int_{-1}^0 \frac{\frac{d^2 \tilde{r}_n^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2}}{|x_1 - x|} dx_1 - \int_0^{L_{c0}} \frac{\frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2}}{|x_1 - x|} dx - \\ & - \int_0^{L_{c0}} \frac{\frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2}}{|x_1 - x|} dx_1 - \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \Big|_{x=L_{c0}} \\ & \frac{d\tilde{R}_1^2}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{R}_1^2 \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

The solution in the form of two terms of a series is generally derived in quadratures:

$$\begin{aligned} R^2 &= R_0^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} R_1^2 = [\varepsilon^2 + 2m\varepsilon^2 x] - \\ & - \left[\int_0^x \frac{(x-x_1)2\sigma(x_1)}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} dx_1 \right] + \\ & + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \left[\int_0^x (x-x_1) \frac{d^2 R_1^2}{dx_1^2} dx_1 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

The solution for a cone $m=1$ is derived in an analytical form [3], but calculation on the basis of solution (4) is more convenient. Fig. 1 illustrates accuracy of

the solution (4) for a cone with $\sigma=0.04$, $\gamma=10^\circ$, and $l=1$ in comparison with the nonlinear numerical calculation [5].

Semi-inverse solution method. Equations of problem (1) are written in the coordinate system with $x=0$ in the cavity mid-section. The solution is derived for the preset length $L_c = 1$ of the cavity rear part, which adjoins its mid-section by the slenderness parameter of this part of cavity, provided the condition $\varepsilon / \delta = O(1)$ is satisfied, in the form of expansions similar to (2) for the initial conditions (5a):

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2(x) \Big|_{x=0} &= \delta^2 \frac{dR^2(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \\ R^2(x) \Big|_{x=1} &= 0, \\ \text{b) } \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L_m} &= 2R_n \tan \gamma R^2 \Big|_{x=L_m} = R_n^2, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\delta = 1/\lambda = R_m / L_c$, R_m being the maximal radius of a cavity. Conditions (5b) are thus set, which control the cavity radius R_n , the inclination angle of its meridian γ in the flow separation cross section, as well as location of the flow separation cross section $x=L_m$. When the problem solution was derived, it became possible to find dependence (6a) between the cavitation number and parameter λ of its rear part, in case of a cavity behind a cone.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma &= \frac{\ln \lambda^2 / \beta^2}{\lambda^2} \left[1 - 2 \left(1 + \varepsilon \lambda \sqrt{1 + (\varepsilon \lambda)^2} \ln \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{1 + (\varepsilon \lambda)^2}} \right) \frac{1}{\ln \lambda^2 / \beta^2} \right] \\ & \varepsilon = \tan \gamma \\ \text{b) } \sigma &= \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\beta e}, \quad \text{c) } \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\beta \sqrt{e}} \end{aligned} \quad (6)$$

Expression (6a) turned out to be more universal, yielding in the limiting cases the dependence for λ of a cavity behind a cylinder (6b) and the earlier derived dependence from elongation, in case of a small disk-type cavitator (6c) [3]. Results of calculations via dependence (6a) are depicted in Fig. 2. For the same cavitation numbers, according to dependences (6b, 6c), a cavity behind a cylinder appears essentially shorter than the rear part of a cavity behind a disk.

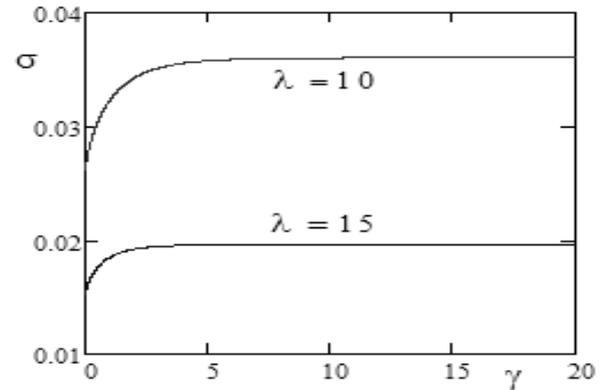


Figure 2 - Cavitation number σ in dependence (6a) from cone semi-opening angle γ for the fixed elongation values $\lambda=10$ and $\lambda=15$ of the rear part of a cavity behind its mid-section.

Engineering method of calculation of cavities behind slender axisymmetric cavitators

The refined variant of the system of equations [2], which is suitable for calculation of cavities behind slender cavitators, has the following form:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_c \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \sigma(x) &= 0, \\ \text{b) } \left. \frac{dR^2}{dx} \right|_{x=0} &= R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}}, \text{ c) } R^2 \Big|_{x=0} = R_n^2, \end{aligned} \quad (7)$$

The basic idea of deriving of these equations implies that the solution for the cavity shape is based on the differential equation (3), which is the first approximation of the integro-differential equation (1). However, the characteristic factors available in the problem solution are defined on the basis of solving more exact integro-differential equation (1). The main advantage of equations (7), in addition to their simplicity, is the exclusive universality of their applicability for calculations that imply both conditions $\varepsilon/\delta = O(1)$, and $\varepsilon/\delta \rightarrow 0$ for quite arbitrary shapes of cavitators and dependences from the cavitation number. A very weak dependence of factors in these equations from deformation of cavitators and cavities is observed, which is confirmed experimentally by the well-known principle of independence of expansion of a cavity [1]. This allows one to use values factors derived for the basic form of a cavitator and a cavity in calculations of other forms, which are not too distinct from the basic one. Equations (7) contain two characteristic parameters μ and k , which have a clear physical meaning. Value μ characterizes the inertia properties of the expanding cavity cross section, being a certain inertia factor. This value in the form of dependence (8b) is assessed on the basis of the second-order solution for cavity elongation λ and the second approximation of the problem solution (8a) for the case of $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ [3]. The same dependence in form (8g) is also obtained at $\lambda \rightarrow \infty$ for regular $\delta/\varepsilon = O(1)$ asymptotic solution (6a).

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma &= \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\beta\sqrt{e}} = \frac{2\mu}{\lambda^2}, \text{ b) } \mu = \ln \frac{\lambda}{\beta\sqrt{e}} \rightarrow \\ \text{c) } \mu &\square \ln \sqrt{\frac{\ln 2 / \beta^2 \sigma}{\beta^2 e \sigma}}, \text{ d) } \mu_c = \mu \frac{0.82}{(0.82 - k\sigma)}; \\ M &= 0: \\ \text{e) } \mu &= \frac{\ln \lambda^2}{\lambda^2} \left[1 - 2 \left(1 + \varepsilon \lambda \sqrt{1 + \varepsilon^2 \lambda^2} \ln \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \lambda^2}} \right) \frac{1}{\ln \lambda^2} \right], \\ \text{f) } \mu_{\varepsilon \rightarrow 0} &\rightarrow \ln \frac{\lambda}{e}, \text{ g) } \mu_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow \ln \frac{\lambda}{\sqrt{e}} \end{aligned} \quad (8)$$

Results of calculation of factors μ depending on λ for a cavity behind a cone with $\gamma = 10^\circ$ (8e) and a cylinder (8f) at $\beta = 1$ are depicted in Fig. 3.

$$\begin{aligned} \text{a) } k(\lambda) &= 1 - 2 \frac{\ln 2 / \sqrt{e}}{\ln \lambda^2 / \beta^2} \rightarrow \\ k(\sigma) &= 1 - \frac{2 \ln 2 / \sqrt{e}}{\ln 4 / \beta^2 \sigma} \Big|_{\sigma=0.04+0.01, \beta=1} \sim 0.92 - 0.94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } c_{d0} &= 2 \left[1 - (1 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \ln \frac{4}{\varepsilon^2} \right)^2 \right], \\ \text{c) } c_d &\sim c_{d0} + \frac{\sigma}{3}, \text{ d) } c_d = c_{d0} + \sigma \end{aligned} \quad (9)$$

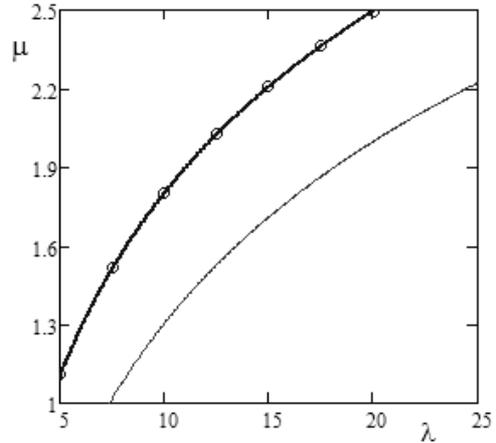


Figure 3 - Dependence (8e) for the inertia factor $\mu = \mu(\gamma, \lambda)$, $\beta = 1$, in case of a cavity behind a cone — a cone $\gamma = 10^\circ$, — — a cylinder
 ○ ○ ○ ○ Numerical calculation $\mu = \sigma \lambda^2$, [5]

As the first initial condition (7b) of the problem (7), the equation of conservation of energy transferred from cavitator to cavity cross sections at the initial moment is used. This condition is the equivalent of merging and it simulates a small intermediate area in the cavitator's vicinity by a jump in the cavity meridian inclination angle. Value $k \sim 0.93 - 1$ in dependence (9a) characterizes a small-scale longitudinal transfer of energy along cavity cross sections. This value is calculated on the basis of the second approximation of the solution at $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$. Correction (8d) is applied for not small enough values of σ .

A formal solution (10) at $\sigma = \text{const}$ of the first approximation of the regular problem of type (2-4), in case of equality of the inclination angles of cavitator and cavity meridians in the form of an ellipsoidal cavity is obtained as follows:

$$R^2 = R_n^2 + \left(\left. \frac{dr_n^2}{dx} \right|_{x=0} \right) x - \frac{\sigma}{\ln(1/\delta^2)} x^2, \quad (10)$$

At $\sigma = \text{const}$ the equation for engineering calculation (7a) also controls an ellipsoidal cavity (11) which, however, at the corrected inclination angle of cavity meridian in the flow separation cross section takes the following form:

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} x - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2 \\ \text{b) } R_m &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \\ \text{c) } L_c &= \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c}{k} (\sqrt{c_d - k\sigma} + \sqrt{c_d})} \end{aligned} \quad (11)$$

This equation allows one to derive dependences for the cavity maximal radius R_m (11b) and length L_c (11c). Results of calculation of the solution (11a) for a

cavity behind a cone at $\gamma=10^\circ$ $\sigma=0.04, 0.02$, $R_n=1$, in comparison with the results of nonlinear numerical calculation [5], are depicted in Fig. 4.

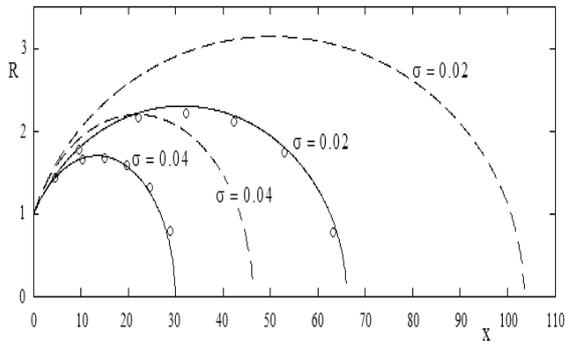


Figure 4 - Results of calculation for a cavity behind a cone $\gamma=10^\circ$ $\sigma=0.04, 0.02$, $R_n=1$ on the basis of the equations for engineering calculation (7).
 ——— Solution (11a) on the basis of the equations for engineering calculation (7)
 ○ ○ ○ Nonlinear numerical calculation [5]
 - - - - - The formal wrong solution of the first approximation (10) in the form of an ellipsoidal cavity by parameter $\delta_* = 2R_m / (l + L_c)$ in case of equality of the inclination angles of cavitator and cavity meridians in the flow separation cross section.

For comparative analysis, results of calculation of the formal regular solution (10) are also provided for the slenderness parameter $\delta_* = 2R_m / (l + L_c)$. As follows from comparison of results in Fig. 1 this solution (10) is suitable for deriving the second-order solutions. However, as is seen from results of calculation in Fig. 4, this formal solution appears completely unsuitable even for qualitative assessment.

In the calculation results in Fig. 4, which have been based on the equations for engineering calculation (7) via solution (11), the drag coefficient value was determined via dependence (9c) using the nonlinear asymptotic dependence for c_{d0} (9b), which has been developed in [6]. Application of formula (9c) for c_d together with depend-

ence (9a) for kand (8b-8c) is valid for the range of cone semi-opening angles $\gamma > 5-7^\circ$. Less accurate, but universally applicable results for $\gamma < 5-7^\circ$ can be derived, if the value $k=1$ and dependences (8e,9d) are used in equations (7).

Conclusions:

- Calculations of cavities formed behind extended cavitators of quite arbitrary shapes can be conducted using simple engineering equations.
- Calculations should take into account a singular character of the problem by correction of the initial inclination angle of the cavity surface in the flow separation cross section, which does not coincide with that of cavitator surface.

References

1. Logvinovich G.V., Hydrodynamics of Flows with Free Boundaries [In Russian], Naukova dumka, Kiev (1969).
2. Logvinovich G. V. and Serebryakov V.V. "On methods of calculation of slender axisymmetric-shaped cavities," Hydromechanics, No. 32, pp. 47-54. (1975).
3. Serebryakov V. V. "Asymptotic solution of the problem on slender axisymmetric cavity," Proc. DAN of Ukraine SSR, ser. A [In Russian], No.12, pp.1119 - 1122 (1973).
4. Serebryakov V.V. "Asymptotic solution of the problem on the shape of a slender axisymmetric cavity behind a slender body," J. Hydromechanics, No. 34, pp. 48-52(1976).
5. Krasnov V. K. and Kuznetsov Yu. V. "Application of boundary integral equations to the calculation of plane and axisymmetric cavitation flows," In: Actual problems of Hydrodynamics – 1989 [In Russian], Chuvash Univ. Cheboksary, pp. 71-75. (1989)
6. Taic O. G. "Axisymmetric cavities," J. Bionics, No. 19, pp.73-80. (1985)
7. Putilin S.I. "On drag of cones in cavitation flow," J. Hydromechanics, No. 44, pp. 94-96(1981).

DITCHING HYDRODYNAMICS OF LAND-BASED AIRPLANES

Shorygin O.P., Gontzova L.G., Belyaevsky A.N., Arilin A.V.

Central Aerohydrodynamic institute named after prof. N.Ye. Zhukowsky (TsAGI)

Town of Zhukowsky, Russia
gontsova@mktsagi.ru

Summary

The land-based airplanes' glissading on water surface hydrodynamics aspects were considered while forced water-landing.

The theory of cylinder-shaped body glissading with constant angle of attack and constant dipped transom cross-section was developed. The hydrodynamic forces were defined, based on the flat cross-sections hypothesis, minding the finite cylinder's surface, contacting with water. The experiments undertaken had shown very good coincidence of theoretic and experimental data.

Introduction

For some years in TsAGI the hydrodynamic and dynamic studies are underway, dealing with forced civil land-based airliners' water landing. In course of these studies, the experiments of ditching modeling using the dynamically-similar models were undertaken. The powerful scale effect was discovered, changing the flow mode of the fuselage in comparison with the real one, while modeling using the Froude criterion. The effective measures were developed to evade this. The massive efforts to develop the calculation methods of ditching dynamics investigation also took place. The final purpose of these works was the shortening of experimental studies cycle, as well as creating the reliable calculation programs, needed for the simulators to study pilots the ditching process. One of the key moments of these studies is creation of rather simple theoretic model of fuselages and, possibly, other airframe elements of land-based airplane glissading on water surface.

1. Statement Of The Problem And Free Surface Cinematics

While creating the mathematic model of ditching process, first of all the hydrodynamic forces, acting upon the airframe after its contact with water, are to be defined. For simplicity, we take the case of only the fuselage's contact with water, which represents the round cross-section cylinder in its middle section, ant fore and aft sections have nearly ogival shape. These limitations narrow the class of flying vehicles which can be considered by the method applied, but they also simplify the problem and give the capability to obtain general results and dependences, which subsequently may serve as the starting point to investigate the ditching of wider airplanes' class.

Studies of the flat-surfaced bodies glissading [1] depict that while ditching of the real airplane with such geometry parameters, the water flow separation occurs in its tail section.

During the hydrodynamic forces calculation, the flat cross-sections method was used, perpendicular to the fuselage axis and fixed in the absolute coordinates system. It is stated that the liquid flow takes place only

in the layers' plane, while the longitude flow is absent. Then, in every flat layer, when it is entered by the airplane's fuselage, the flow will arise, similar to that one, which arises while the cylinder's submerging into the liquid with free surface. Total hydrodynamic load can be defined by integrating along all the elementary sections in every fixed moment of time. Elementary hydrodynamic force, acting in the flat sections, is defined only by instant meanings of cinematic airplane's motion parameters, i.e., its vertical and horizontal velocity meanings, angular velocity and linear and angular acceleration.

Let's consider the forces, acting upon the cylinder, being submerged into the liquid with constant velocity along the perpendicular to the free surface. To define the kinematics of free surface motion towards the body and the size of wetted width of the body, $2c$, which coincides with every meaning of submerging h relatively to the free surface, the velocity potential of the latitude wrap of the widening plate with variable width $2c$ is used. As the result of the counter rising of the liquid, the $2c$ width becomes higher then the geometric segment's width, cut by the non-disturbed free surface. Dependence between $2c$ and h is defined by well known Wagner's equation [2], the solution of which is represented by expression, developed by G.K. Koloskov[3]:

$$h = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{y(x)}{\sqrt{c^2 - x^2}} dx, \quad (1)$$

where $y = y(x)$ is the cross-section's equation in the coordinates system of body.

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad (2)$$

In this case, the (1) may be represented in the shape of the power series:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \frac{3}{64} \left(\frac{c}{r}\right)^4 + \frac{5}{256} \left(\frac{c}{r}\right)^6 + \dots, \quad (3)$$

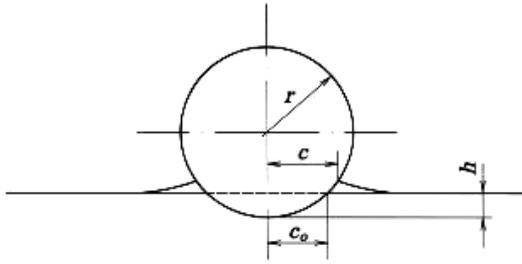


Figure 1 - For round cross-section cylinder with r for a radius (Fig. 1), this equation takes the following form:

The power series is useful to estimate the c/r function behavior, as well as that of the hydrodynamic power at low h/r meanings. But, for the latter ditching stages, these series become inconvenient due to the bad series convergence. Instead, the (1) integral is quite usable, which can be driven to the full elliptic integral of the second mode:

$$\frac{h}{r} = 1 - \frac{2}{\pi} E\left(\frac{c}{r}\right), \quad (4)$$

Using (1) – (3), it's easy to imagine the wetted border of the cylinder behavior using the function of its submerging. In the Fig. 2, the calculated dependence between c/r and h/r is represented.

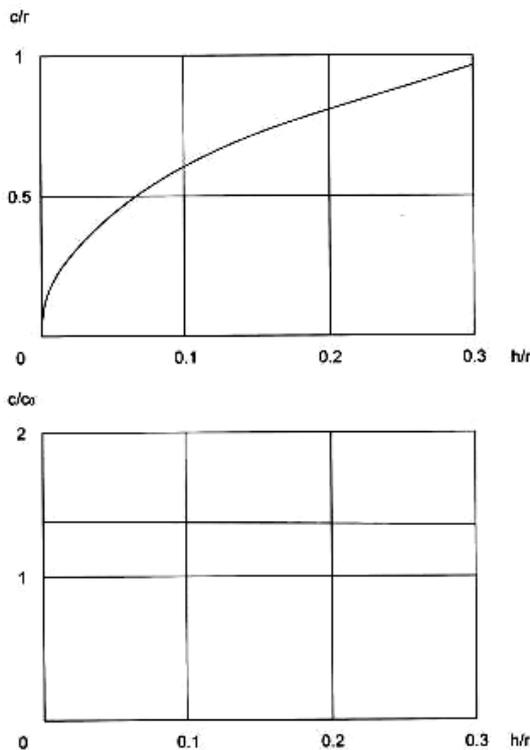


Figure 2

Taking the (4) for a basis, at $c/r \rightarrow 1$ and $h/r \rightarrow 0,33$, i.e, the $h/r = 0,36$ is a limit. Of particular interest is the dependence of wetted half-width to geometric width, which makes the half of a segment, being formed as a result of crossing by a cylinder's surface of the undisturbed water surface c_0 . It's obvious, that at low h/r meanings, the c/c_0 level is quite close to $\sqrt{2}$, which comes from the (2) and (3). With h/r growth, the

c/c_0 ratio varies only a little, and while h/r reaches 0,36, it lessens to 1,34.

It must be noted that for the submerging wedge, the c/c_0 ratio equals to $\pi/2$ at low deadrise angles, and as the latter rises, it lowers.

When the submerging $h \approx 0,36r$, the wetted width $2c$ is equal to the cylinder's diameter $2r$. This approach gives the reliable solution only for $h < 0,36r$. At higher h meanings, the flows separation from the cylinder's surfaces occurs and its wrap picture transfers into cavitations stage.

2. Hydrodynamic Forces In 2-D Interpretation

Minding the fact that during the constant body submerging into the liquid the important role is played by the free borders behavior, in particular, formation of jets, the fluid motion amount, found by solving the 'strike' task, not in all cases coincides with the real flows. The error grows with body's inclining angle in the zone where spray jets are formed. G. V. Logvinovich [4] proposed instead of force representation in the shape of impulse derivative, to define the force using Koschi – Lagrange integral, but slightly changed the velocity potential form on the plate's surface, which was representing the wetted body's surface, and the integrating limits, actual only in the positive pressure zones on the plate.

As the result, the following expression for hydrodynamic force appeared:

$$f = \pi \rho V_n^2 c \frac{dc}{dh} \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{dh}{dc} \left(1 + \ln 4 \frac{dc}{dh} \right) \right], \quad (5)$$

Defining c and $\frac{dh}{dc}$ with the help of (3) or (4) and putting the found meanings into (5), we obtain the dependence of f force from the cylinder's submerging depth. This dependence is illustrated in Fig. 3 in dimensionless form, as $\bar{f} = \frac{2f}{\rho V_n^2 r}$. Due to the complexi-

ty of defining the $f\left(\frac{h}{r}\right)$, its direct use in the numeric ditching model creation on the base of flat cross-section method is inconvenient.

Instead of this, in the current work, using the results of $\bar{f}\left(\frac{h}{r}\right)$ curve calculation, the simple approximation dependence was built

$$\bar{f} = 4\pi \left(1 - 1.58 \sqrt{\frac{h}{r}} \right), \quad (6)$$

This dependence coincides with the initial curve so well that it couldn't be represented as a separate line, and it was marked with separate points. Only at $\frac{h}{r} > 0,25$ both curves start to differ a bit, but this takes place at too low force meanings.

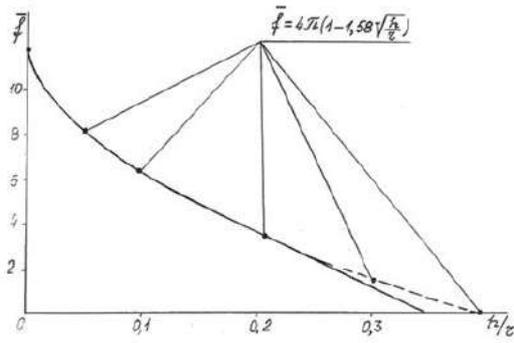


Figure 3

3. Forces At Glissading

Now, let's consider the case of stationary cylinder's glissading along the liquid surface, at constant angle of attack α , which, in this particular case, is equal to the pitch angle ϑ , and its transom being submerged to the constant depth h relatively to the undisturbed free surface level (see Fig. 4) In analogue with the glissading theory of the deadrisen bodies, the flat cross-section method for lift definition is applicable.

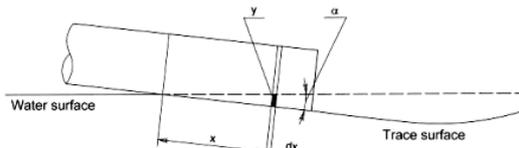


Figure 4

We'll take the consideration that the liquid motion takes place in the layers' plane, perpendicular to the cylinder's axis, while longitude liquid's motion in direction, perpendicular to the layers, is absent. It must be stressed that, to be strict, such a flow picture is actual in the frames of narrow body theory, only if some particular conditions are fulfilled, dealing with geometric parameters of body – to – liquid contact zone. In our case, these conditions are not fulfilled in the fore section of contact zone, as there the presence of sharpening point is needed. But, in case of cylinder's glissading, the contact zone's plan form is quite close to the elliptic one. Nevertheless, despite the disruption of mathematic conditions of the problem, as it will be depicted later, the flat cross-sections method gives quite applicable exactness level to be used in practice, while defining the glissading cylinder's lift.

Firstly, let us consider the glissading case with small submerging, lesser then 0,36 from the cylinder's radius, i.e., prior to the moment when the width of wetted surface $2c$ at the cylinder's transom will reach the cylinder's diameter. Elementary force in the layer's plane of dx thickness (Fig. 4) will count:

$$dF = 2\pi\rho V_n^2 r \left(1 - 1.58 \sqrt{\frac{y}{r}}\right) dx, \quad (7)$$

where y – cylinder's submerging in the given cross-section, $V_n = V\alpha$ – velocity perpendicular to the cylinder's axis, V – glissading speed, $\alpha = \vartheta$. It's obvious that out of geometry parameters, the submerging mean-

ing y is equal to $x\alpha$, and, though, the lift, acting on the submerged cylinder's portion at $\bar{y} = \frac{y}{r} \leq 0,36$, will count

$$F = 2\pi\rho V^2 \alpha r^2 \int_0^{\bar{y}} \left(1 - 1.58 \sqrt{\frac{y}{r}}\right) d\frac{y}{r} =, \quad (8)$$

$$= 2\pi\rho V^2 r^2 \bar{y} \left(1 - 1.05 \sqrt{\bar{y}}\right) \alpha$$

As the result, the lift at $y \leq 0,36$ is a linear function of the angle of attack α . At $\bar{y} = 0,36$ the expression (8) gives the meaning

$$F \approx 0,836\rho V^2 r^2 \alpha.$$

If the transom submerging meaning is bigger then 0,36r, we can approximately accept that in the corresponding cross-sections the non-stationary cylinder's submerging relatively to the free surface has ended, and the cavitations flow started to form, with the speed $V_n = V\alpha$ (Fig.5), which drives to the arising of the force, acting upon the unit of the cylinder's length

$$f_k = C_k \frac{\rho V_n^2}{2} 2r = C_k \rho V^2 r \alpha^2, \quad (9)$$

where C_k – cavitations resistance factor of the cylinder.

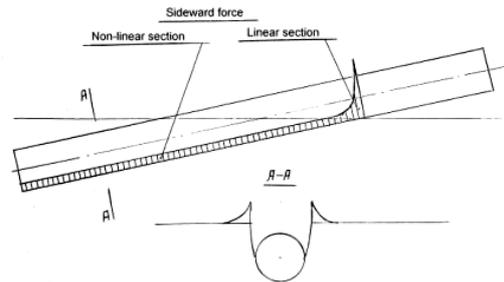


Figure 5

In every flat cross-section, at $\bar{y} > 0,36$ the force will be acting

$$dF = C_k \rho V^2 r \alpha^2 dx, \quad (10)$$

There are strong suppositions that the C_k weakly depends upon the cylinder's ditching level. In this case, at the stationary glissading, the force's spreading along the cylinder's length may be accounted uniform. The C_k factor is roughly equal to 0,5. At Fig. 5 the scheme of sideward loadings spreading along the cylinder's length is shown.

The expression (8), which was developed using the method of flat cross-sections, considers only the case of ultra small elongation of the wetted surface $\lambda = \frac{4c^2}{S}$, where $2c$ is the width of wetted surface at the transom, and S is the wetted surface's square.

In cases of finite λ meanings, the use of correction factors is needed, which minds the fluctuations of longitude loadings spreading with λ meaning growth. The data needed can be obtained using the finite chord

to span ratio wing theory. For instance, the method of discrete vortexes, developed by S.M. Belotserkowsky, permits to calculate the levels and spread of loadings on the wings of different plan form, including the delta and elliptic ones. From the other side, this method is rather labor-demanding, especially in the glissading case, where the λ meaning may fluctuate in the widest range, depending of angle of attack and submerging. Due to this, the Jones theory [5] was used to define lift. Jones proposed the simple formula, dealing with the wings of small chord/span ratio with sharp wingtips, for instance, the delta wings. In case of glissading, the Jones theory gives the correction factor for (8) in the following shape:

$$\mu = \frac{4}{p\lambda + 2}, \quad (11)$$

where p is the half-perimeter of the horizontal wetted projection to its span $2c$ ratio.

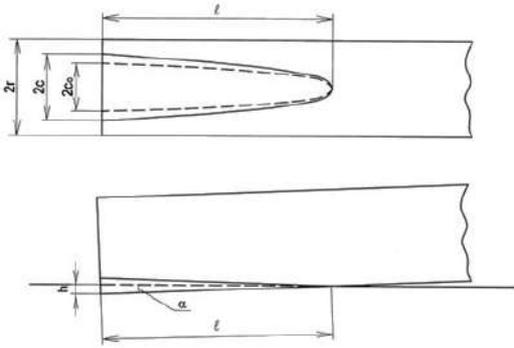


Figure 6

To define lift, the λ and p expressions must be found in the relative submerging function $\bar{h} = \frac{h}{r}$ and of the angle of attack α .

The wetted surface projection to the horizontal plane, formed while the cylinder's glissading, has a shape, close to half-elliptic one.

At Fig. 6, the line of intersection between undisturbed free surface and the cylinder, having the r radius and inclined at some α angle of attack.

Earlier it was shown that due to the free surface's rising towards the submerging in the fixed flat cross-section cylinder, the wetted width grows approximately $\sqrt{2}$ times. If at the transom, the geometric wetted width (see Fig. 1) was equal to $2c_0$, then, due to the effect described, while the λ meaning, the width of the wetted surface is to be estimated as $2c_0\sqrt{2}$. At Fig. 6, the appearance of such a flow in the sideward view is shown.

It's obvious, that out of geometric parameters

$$c_0 = \sqrt{2rh - h^2}, \quad (12)$$

And though, the glissading surface span is defined as

$$c = \sqrt{2}\sqrt{2rh - h^2}, \quad (13)$$

To define the chord of this surface l let us take that its fore point is defined by intersection of undisturbed free surface and the lower cylinder's portion. At low α angles,

$$l = \frac{h}{\alpha}.$$

Now, the $\lambda = \frac{4c^2}{S}$ is to be found in \bar{h} function and α . To simplify the estimating calculations, we'll take the fact that the wetted surface square S differs only a little from that of the triangle with base equal to $2c$, and height is equal to l . Then, $S = lc$,

$$\begin{aligned} \lambda &= 4\frac{c}{l} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{2rh - h^2}}{h}\alpha = \\ &= 4\sqrt{2}\alpha\sqrt{\frac{2}{\bar{h}} - 1} \end{aligned}, \quad (15)$$

The p meaning is easily expressed through λ , and though, to represent it as the function of \bar{h} and α :

$$p = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\lambda} \right)^2} \right], \quad (16)$$

As a conclusion, the hydrodynamic force, arising while the cylinder's glissading is calculated in the following way, using (8), (15) and (16):

$$\begin{aligned} F &= 2\pi\rho V^2 r^2 \bar{h} \left(1 - 1,05\sqrt{\bar{h}} \right) \mu \alpha = \\ &= \frac{8\pi\rho V^2 r^2 \bar{h} \left(1 - 1,05\sqrt{\bar{h}} \right)}{\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\lambda} \right)^2} \right] \lambda + 2} \alpha \end{aligned} \quad (17)$$

where $\lambda = 4\sqrt{2}\alpha\sqrt{\frac{2}{\bar{h}} - 1}$.

We may represent this force in dimensionless form, as a factor:

$$\begin{aligned} C_B &= \frac{F}{\frac{\rho V^2}{2} 4r^2} \\ C_B &= \frac{4\pi\bar{h} \left(1 - 1,05\sqrt{\bar{h}} \right) \alpha}{\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\lambda} \right)^2} \right] \lambda + 2} \\ \lambda &= 4\sqrt{2}\alpha\sqrt{\frac{2}{\bar{h}} - 1}, \end{aligned} \quad (18)$$

4. Results Of Experiments

Several times, the studies were undertaken in TsAGI dealing with the cylinders' glissading. Lift measurements, conducted in different studies, give very close results. In A.D. Vasin's work [6] the wide experiments results data base is present, dealing with

the stationary cylinder's glissading in $2^0 \leq \alpha \leq 8^0$ angles of attack range with submerging $\bar{h} \leq 0,36$ [6].

In the work [6], the lift F was represented as a factor

$$\bar{F} = \frac{F}{\frac{\rho V^2}{2} \alpha}, \quad (19)$$

In order to compare the experimental and calculated in shape of C_B factors, that will be enough to define the conformity of these two dimensionless meanings. It's readily seen that

$$C_B = \bar{F} \frac{\alpha}{4}, \quad (20)$$

At Fig. 7 the theoretic dependence between C_B and \bar{h} at $\alpha = 2^0 = 0,035$, $4^0 = 0,0697$, $6^0 = 0,105$, $8^0 = 0,139$. Also, the experimental meanings from the work [6] are marked, re-calculated in coincidence with (20).

The good correspondence between the theoretic and experimental data is observed at all the angle of attack and relative submerging meanings considered.

It's interesting to note that in A.D. Vasin's work, the method of calculating the lift is also proposed while the cylinder's glissading. His approach is based upon the flat cross-sections method with other correction for finite chord to span ratio. This correction is based on the theory of G.V. Logvinovich, dealing with the accounting of longitude liquid transportation, which takes place in frames of 'flat cross-sections hypotheses'. This viewpoint arises serious objections, as it not only disrupts the whole flat cross-sections idea, but brings also to the incorrect result, correction meaning counts around α^2 , whilst the theory considered is created upon the prerequisites, linear towards α . A.D. Vasin's calculations results considerably differ from his own experiments.

The cylinder glissading theory, built upon the Johns theory, gives the correction of around the α meaning.

Conclusion

The approximate theory of the round cross-section cylinder's glissading was worked out, together with the method of hydrodynamic forces calculation, the latter based upon the simultaneous use of cylinder submerging into liquid theory, thin body theory and low aspect wing theory. Comparison of calculations data and experimental results, including the ones, un-

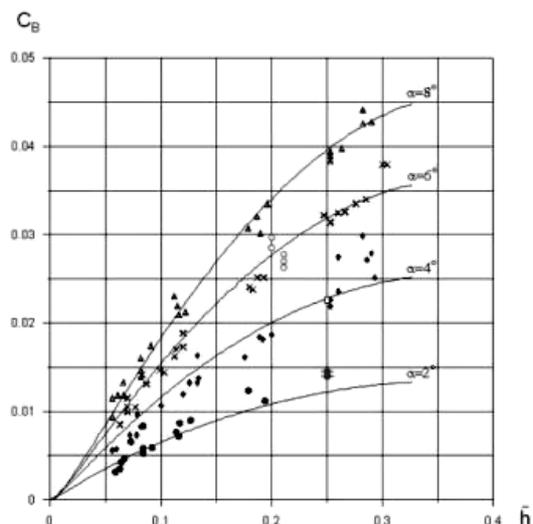
dertaken by other authors, had shown their very good coincidence. The data obtained give the capability to calculate the hydrodynamic forces, which arise during the passenger planes' emergency ditching, and their dynamics in the process of water landing.

Results of light measurements
on the drained model, made
in the work present

● - 2^0
□ - 4^0
○ - 6^0

Results of Vasin's
experiments

● - 2^0
◆ - 4^0
× - 6^0
△ - 8^0



Literature

- 1 Shorygin O.P., Gontsova L.G., Belyaevsky A.N. Surface forces impact upon the smooth-shaped bodies glissading hydrodynamics. TsAGI works, 1999, issue 2634.
- 2 Wagner H, Über Stass und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. ZAMM №4, 1932
- 3 Kolosov G.K.. Concerning the theory of non-stationary glissading and motion of low aspect ratio wing. TsAGI works, issue 806, 1960
- 4 Logvinovich G.V. Free boundaries flow hydrodynamics. Scientific Thought, Kiev, 1969.
- 5 Jones R.T. Correction of the lifting line theory for the effect of the chord, NACA, TN817, 1941 г.
- 6 Vasin A.D. Non-stationary glissading of the bodies of revolution along the liquid suface. TsAGI works, issue 2496, 1993.

SOME ASPECTS OF SUBMERSION OF THE CYLINDRICAL SOLID OF REVOLUTION WITH CURVED NOSE AT SMALL ATTACK AND TRIM ANGLES

Bragin S.L., Grumondz V.T.

Moscow Aviation Institute (State University)

125993, Moscow, A-80, ГСII-3, Volokolamskoye ch., 4

Abstract

In some cases during submersion of cylindrical solid of revolution with curved nose at small attack and trim angles a significant increase of the angle velocities in longitudinal plane at the initial moment of submersion has been spotted. It is followed by rotation towards the direction of the nose submersion. причем с вращением, направленным в сторону погружения носовой части. Current analytical methods do not provide an explanation for this effect.

The article below suggests the way to explain this effect and the method which allows to estimate the disturbances generated by this effect. At the stage when the curved nose of the cylindrical solid of revolution crosses the surface of the water, a cavern is being formed. Moreover, at certain angles of attack the cavern forms only at one of the solid sides. The method described below allows to estimate the surface load alongside the longitudinal axis of symmetry. Also two models of the surface load are compared.

Let's analyse the moment when the cylindrical solid of revolution with curved nose crosses the water surface. The solid has a certain speed and certain angles of attack and trim, as well as the angle velocity against the axis OZ. Figure 1 shows the experiment scheme.

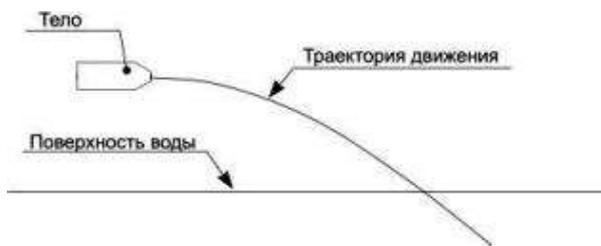


Figure 1 – Experiment scheme

There are different scenarios how the solid could cross the surface. First one is when the cavern forms around the solid (Figure 2 a), when most part of the solid is covered by the cavern and the solid contacts the water only at the nose and tail parts. Second scenario is when the cavern forms only at one side of the solid. (Figure 2b). Third scenario is when the solid ricochets from the surface (Figure 2c).

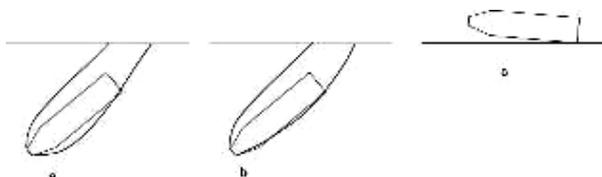


Figure 2 – Scenarios of water landing

In some cases during the water landing the of cylindrical solid of revolution with curved nose with small attack and trim angles it was noticed that the angle velocities increase significantly both in longitudinal and horizontal planes at the first moment of submersion, and on top of that the solid starts to rotate in the direction of the nose part submersion. We shall use the equations of a solid body space motion to identify the mathematical model [1]. We shall define the forces

acting at the solid according to [2]. The geometry of the resulting cavern shall be calculated based on the principle of independent cavern enlargement suggested by G.V. Logvinovich [3] and method suggested in [4]. The results are shown at Figure 3.

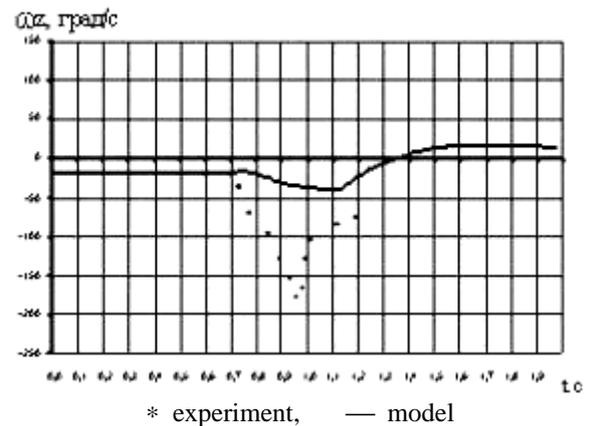


Figure 3 – comparison of model №1 and experiment.

The Figure shows a significant difference between the model and experiment results. The reason is that the model from [2] assumes that the cavern covers the solid according to the first scenario of water landing. On top of that, in [2] a disk is used instead of the curved nose.

Figure 4 analyses the mutual positioning between the solid and the cavern at the moment of crossing the eater surface. These positions identified through experiments. We can see that the lower part of the cavern passes “through” the solid at its nose part.. Let's assume that the lower cavity of the cavern does not form, and that the cavern at its lower part is formed by section of the solid by the plane OX and OZ. If we shall consider the separate section of the solid in lateral plane, then the submersion of this section will correspond of the round solid submersion shown on the photograph (Figure 5).

We shall consider the mutual positioning of the cavern and solid as follows – Figure 6.

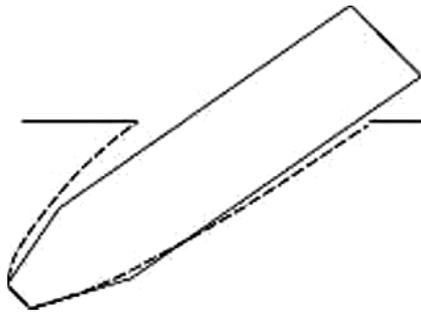


Figure 4 – Mutual positioning of the solid and the cavern.

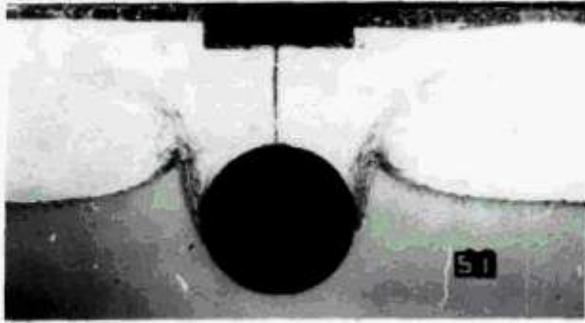


Figure 5 – Submersion of the round solid.

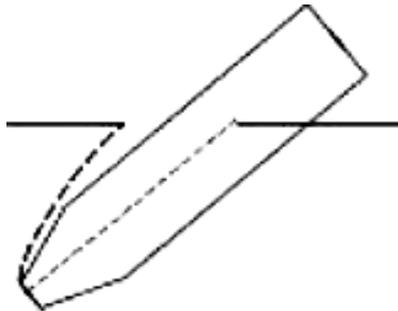


Figure 6 – Mutual positioning of the cavern and solid to calculate the loads on the solid.

We shall use the results from [5], which are the results from TsAGI identified for the gliding motion of a cylinder over the water

$$\frac{dF_u}{dx} = 2\pi \cdot \rho V_n'^2 R_T(x) \left(1 - 1.58 \sqrt{\frac{h(x)}{R_T(x)}} \right), \quad (1)$$

at $h(x) \leq 0.33R_m(x)$,
 where $R_m(x)$ – section radius of the solid at distance x from the nose; $h(x)$ – submersion depth of the section at distance x from the nose; V_n' – submersion velocity; F_u , - load on the solid.

Figure 7 shows the submersion scheme.

At each section the velocity will be:

$$V_n' = V_y + (x - x_c)\omega_z, \quad (2)$$

where V_y - submersion velocity of the solid alongside axis OY; x_c – centre of masses position against the nose; ω_z – angle velocity against axis OZ.

For $h(x) > 0.33R_m(x)$ the equation will be

$$\frac{dF_u}{dx} = C_k \cdot \rho V_n'^2 R_T(x), \quad (3)$$

where C_k - hydro dynamical coefficient ($C_k = 0.5$).

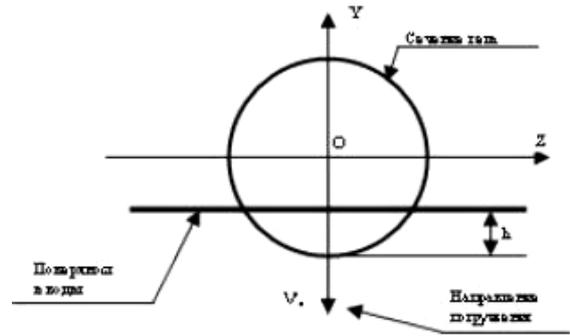


Figure 7 – Section submersion scheme

Will be zero if the solid is not submerging.

Basing on the above we can identify the load at the direction of axis OY.

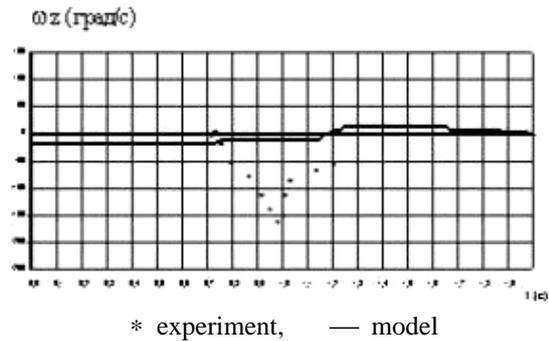
$$F_{yu} = \int_0^L \frac{dF_u}{dx} dx, \quad (4)$$

where L – is the length of the solid.

Momentum of the load will be

$$M_{yu} = \int_0^L \frac{dF_u}{dx} (x_c - x) dx \quad (5)$$

Calculation results are shown at figure 8.



* experiment, — model
 Figure 8 – Comparison of model № 2 and experiment.

Figure 8 shows a significant discrepancy between the model and the experiment results which can be explained by extra load not included into the model. Let's make the corrections for the model(1-5) with respect to acting forces. Usually the pressure decreases at the nose part under the current flow. This effect is defined by \bar{P} . Its dispersion over the solid is shown on Figure9.

$$\bar{P} = \frac{P - P_h}{\rho V_n'^2} \quad (6)$$

where P – pressure at the lower part of the solid at distance x from the nose; P_h – static pressure at certain depth.

We will concentrate on the water crossing by the nose part of the solid, so we shall examine the \bar{P} dispersion over the solid as per Figure 10. Figure 9 shows that at the curved surface of the lower part of the solid there is a zone of lower pressure. According to Figure 6 there is an air cavity on the upper side of the solid with pressure $P_{амм}$. This cavity exists till the moment of permanent flow or formation of water layer between

the atmosphere and the cavern. Pressure on the lower part of the solid is P . Difference between those pressure figures will be F_{yp} .

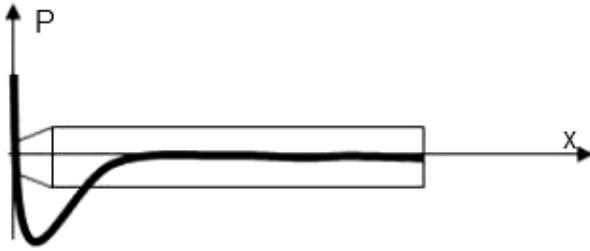


Figure 9 – Pressure dispersion over the solid

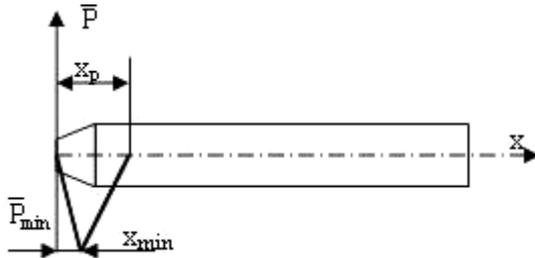
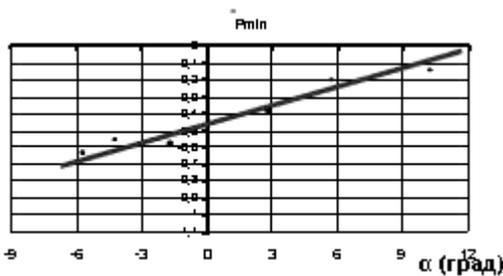


Figure 10 – Model of pressure dispersion

Dependence of \bar{P}_{min} from the angle of attack is shown on Figure 11. We shall approximate the experimental curve by the line (Fig. 11). The function will be

$$\bar{P}_{min} = a * \alpha - b, \quad (7)$$



* experiment, — approximation

Figure 11 – Estimation of \bar{P}_{min}

Depending on the solid position x the pressure on its surface will be 8 (Figure 10).

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\bar{P}_{min} x}{x_{min}} \frac{\rho V^2}{2} + P_h, \\ x \leq x_{min} \\ P = \left(\bar{P}_{min} - \bar{P}_{min} \frac{(x - x_{min})}{(x_p - x_{min})} \right) \frac{\rho V^2}{2} + P_h, \\ x_{min} < x < x_p \\ P = P_h, \\ x \geq x_p \end{array} \right. \quad (8)$$

Flow stall from the solid surface direction is opposite to submersion. In this case the load from pres-

sure difference is directed alongside the submersion for each section and will be

$$\frac{dF_p}{dx} = 2R_m (P - P_{atm}) \bar{P} \quad (9)$$

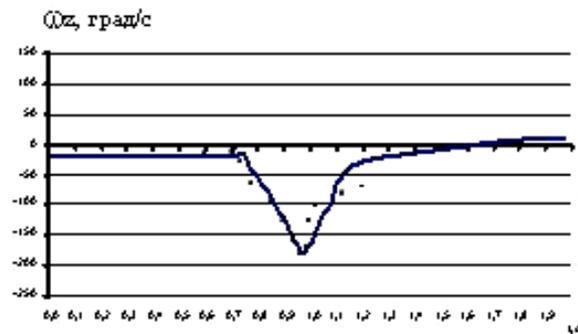
Load on the axis OY will be

$$F_{yp} = \int_0^L \frac{dF_p}{dx} dx \quad (10)$$

Momentum of this load will be

$$M_{yp} = \int_0^L \frac{dF_p}{dx} (x_c - x) dx \quad (11)$$

The results of the calculation are shown at Figure 12. We can see that the suggested mathematical model for the submersion of cylindrical solid of revolution with curved nose at small attack and trim angles corresponds to the experiment outcome. Further analysis requires additional experiments with more parameters included.



* experiment, — model

Figure 12 – Comparison of model №3 and experiment

List Of Literature

1. V.T. Grumondz, G.A. Yakovlev. Algorithms for aerohydroballistic design. – M.; MAI Editorial, 1994 г.
2. V.T. Grumondz, G.A. Yakovlev. Motion of bi-medium vehicle in unstable cavern after water landing. – M.; MAI Editorial, 1999 г.
3. G.V. Logvinovich. Hydro dynamics of currents with free borders. – Kiev.; Naukova Dumka, 1969 г.
4. S.L. Bragin. Quantitative method for the unstable cavern at the High-speed Underwater Vehicle acceleration stage, VINITI №1406-B2005, 2005 г.
5. O.P. Shorygin, S.A. Zherebyatiev, L.G. Gontsova, A.N. Belyaevsky. Mathematical model for the passenger aircraft water landing. – M.; TsAGI N2685; Articles on «Hidro dynamics of high-speed bi-medium vehicles, TsAGI Editorial, 2009 г.

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

Маклаков Д.В.¹, Петров А.Г.²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет

²Институт проблем механики РАН

dmaklak@kpfu.ru, petrovipmech@gmail.com

Аннотация

В работе получены аналитические формулы, выражающие волновое сопротивление тела, движущегося поступательно в канале конечной глубины, через параметры образовавшихся за телом нелинейных прогрессивных волн. Установлено, что генерация волн за телом возможна лишь для докритической скорости перемещения тела. Построены точные асимптотические разложения интегральных характеристик волн, включая создаваемое ими волновое сопротивление, по степеням безразмерной амплитуды.

Введение

Рассматривается тело, движущееся поступательно над плоским горизонтальным дном с постоянной скоростью c . Предполагается, что в системе отсчета, связанной с телом, движение установившееся. Вдали от тела, впереди него, жидкость покоится и имеет постоянную глубину h , а позади тела устанавливаются волны длины λ , движущиеся со скоростью тела. Картина течения в системе координат, связанной с телом, изображена ниже. Пусть форма свободной поверхности в установившемся движении задается уравнением $y = y_s(x)$, где ось x направлена по дну.

Обозначим через $\varphi(x, y)$ потенциал установившегося течения, тогда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ – компоненты скорости,}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \text{ – модуль скорости. В области}$$

периодических волн далеко вниз по потоку введем следующие характеристики: приращение потенциала

$$\Delta \varphi = \varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y);$$

среднюю горизонтальную скорость частиц жидкости:

$$c_a = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} v_x(x, y) dx = \frac{\Delta \varphi}{\lambda},$$

где интегрирование ведется по любому горизонтальному отрезку, целиком погруженному в жидкость; среднеквадратичную скорость частиц жидкости на дне

$$c_b^2 = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} v_x^2(x, 0) dx; \quad (1)$$

среднюю глубину волн

$$D = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} y_s(x) dx.$$

Обычно в теории нелинейных волн конечной глубины предполагается, что волны перемещаются с фазовой скоростью, равной средней горизонтальной скорости c_a частиц жидкости в установившемся движении [1-3]. При этом в неустановившемся движении средняя горизонтальная скорость частиц жидкости будет равна нулю. В данной работе доказывается что для волн, генерируемых движущимся телом, эта гипотеза не является верной, то есть $c \neq c_a$. Кроме того, устанавливается что средние уровни жидкости впереди и позади тела также различны, то есть имеется дефект уровней $\Delta h = h - D \neq 0$.

Предположим, что волны перемещаются с фазовой скоростью c_w , тогда среднеквадратичная скорость частиц жидкости на дне в нестационарном движении определяется формулой

$$\sigma^2(c_w) = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} [v_x(x, 0) - c_w]^2 dx, \quad (2)$$

а удельная кинетическая энергия волн (на единицу длины) будет

$$T(c_w) = \frac{\rho}{2\lambda} \int_x^{x+\lambda} dx \int_0^{y_s(x)} [(v_x - c_w)^2 + v_y^2] dy, \quad (3)$$

где ρ – плотность жидкости.

Введем функцию

$$\Pi(h_w) = \frac{\rho g}{2\lambda} \int_x^{x+\lambda} [y_s(x) - h_w]^2 dx,$$

где h_w – некоторая произвольная глубина, g – ускорение силы тяжести. Ясно, что при $h_w = D$ величина $\Pi(G)$ есть удельная потенциальная энергия волн. Если же $h_w = h$, то

$$\Pi(h) = \Pi(D) + \frac{\rho g}{2} \Delta h^2. \quad (4)$$

Отсюда вытекает, что величина $\Pi(h)$ имеет следующий физический смысл: $\Pi(h)$ – это сумма удельной потенциальной энергии волн относительно их среднего уровня D позади тела и удельной

потенциальной энергии равномерного потока глубины h впереди тела также относительно уровня D .

В работе доказываемся

Теорема 1. Волновое сопротивление R_x любого тела может быть найдено по любой из трех эквивалентных формул:

$$R_x = 3\Pi(h) - \rho(gh - c^2)\Delta h, \quad (5)$$

$$R_x = 3\Pi(D) - \frac{3\rho g}{2}\Delta h^2 - \rho(gD - c_b^2)\Delta h, \quad (6)$$

$$R_x = 3\Pi(h) - 2T(c) - \frac{\rho}{2}\sigma^2(c)h. \quad (7)$$

Отметим, что первая из этих формул была приведена без доказательства в статье [4].

Хорошо известно, что установившиеся периодические нелинейные волны в системе координат, движущейся вместе с волнами, определяются двумя безразмерными параметрами. В качестве одного из этих параметров можно взять безразмерную амплитуду $a = (h_c - h_t)/(2\lambda)$, где h_c – высота горба, а h_t – высота впадины над дном. В качестве второго обычно выбирают величину $r_0 = \exp(-2\pi q/\Delta\phi)$, где q – расход жидкости в системе координат, движущейся вместе с волнами (см. [1-3]). Параметр r_0 – это внутренний радиус кольца, на которое конформно отображается один период области, занятой волнами. Если $r_0 = 0$, то волны имеют бесконечную глубину, если $r_0 = 1$, то волны вырождаются в уединенные. Для неустановившегося движения имеется третий параметр – фазовая скорость волн, для определения которой, как уже отмечалось, необходима дополнительная гипотеза. В данной статье фазовая скорость и глубина жидкости h впереди тела определяются из системы уравнений, вытекающей из граничных условий задачи:

$$ch = q, \quad (8)$$

$$c^2 + 2gh = C. \quad (9)$$

Первое уравнение – это условие сохранения расхода в волне и перед телом, а второе следует из уравнения Бернулли и условия постоянства давления на свободной поверхности. В системе (9) постоянная Бернулли C – однозначно определяется через λ , g , a и r_0 . Таким образом, в задаче о волнах, возникших за движущимся телом, фазовая скорость находится из системы (8, 9) без привлечения дополнительных гипотез.

В теории обтекания тел под свободной поверхностью весомой жидкости одним из основных безразмерных параметров является число Фруда,

$$Fr = \frac{c}{\sqrt{gh}}. \text{ Если } Fr < 1, \text{ то поток называется}$$

докритическим, если $Fr > 1$, то поток сверхкритический. Согласно линейной теории волн (см., например, [5]), если $Fr > 1$, то волны на свободной поверхности позади тела отсутствуют, если же $Fr < 1$, то позади тела появляются волны. Возникает вопрос: верно ли это утверждение для нелинейной теории? Этот вопрос неоднократно дискутировался в научной литературе. Например, Л.К.

Forbes и L.W. Schwartz в статье [6] высказали гипотезу, что волновые решения могут существовать и для сверхкритических режимов при $Fr \leq Fr^* \approx 1.29$, где Fr^* – число Фруда для предельной уединенной волны с углом в 120° при вершине. Однако численно им подобных решений получить не удалось, как, впрочем, и никому в последующих исследованиях.

В настоящей работе доказываемся

Теорема 2. Для всякой стационарной системы периодических волн, у которых гребни и впадины находятся на осях симметрии система уравнений (8, 9), имеет ровно два решения относительно неизвестных c и h . Для первого решения выполняются неравенства

$$h_t < D < h < h_c, \quad Fr < 1, \quad (10)$$

а для второго – неравенства

$$h < h_t, \quad Fr > 1 \quad (11)$$

Из теоремы следует, что для первого решения системы (8, 9) прямая невозмущенного уровня $y = h$ пересекает поверхность волн, дефект уровней $\Delta h > 0$, а число Фруда всегда меньше единицы (рис. 1).

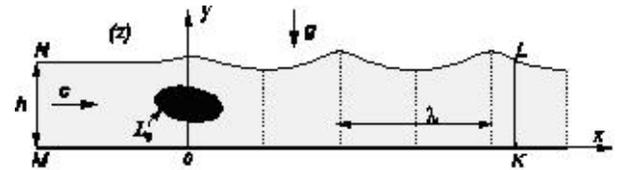


Рисунок 1 - Схема установившегося течения

Для второго решения волны находятся выше невозмущенного уровня $y = h$. Картина обтекания тела схематично показана на рис. 2.

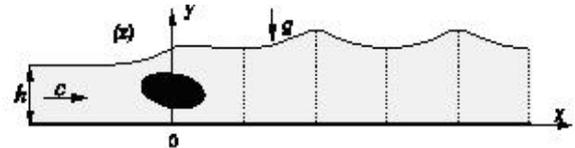


Рисунок 2 - Схема установившегося течения для второго решения системы (8, 9).

Расчеты по формулам (5-7) показывают, что для первого решения волновое сопротивление $R_x > 0$, а для второго $R_x < 0$, то есть вместо сопротивления получаем «волновую тягу». Последнее физически нереально, поэтому необходимо принимать во внимание лишь первое решение, когда $R_x > 0$ и $Fr < 1$. Отсюда вытекает, что гипотеза Форбса и Шварца неверна, и волновые решения в задаче об обтекании тела под свободной поверхностью могут существовать, только если поток докритический.

На основе методов, разработанных в монографии [7], в настоящей работе получены точные асимптотические разложения интегральных характеристик волн по степеням амплитуды a при фиксированных значениях r_0 . В этих разложениях коэффициенты при степенях a являются функциями от r_0 . После решения системы (8, 9) правые части формул (5-7) становятся функциями параметров a и r_0 . Это дает возможность построения асимптотиче-

ских формул для волнового сопротивления. Вычисления по этим формулам сравниваются с результатами высокоточного численного метода расчёта периодических прогрессивных волн конечной глубины, предложенного в [8].

Предварительные леммы

Введем в физической плоскости комплексную переменную

$$z = x + iy.$$

Лемма 1. Пусть KL и PQ – два вертикальных отрезка, выделяющие один период в области периодических волн (рис.3), а $F(z)$ – любая λ -периодическая, аналитическая функция в этой области. Тогда

$$\int_{LQ} F(z)dz = \int_{KP} F(z)dz, \quad (12)$$

$$\int_{KL} F(z)dz = \frac{1}{\lambda} \left[\int_{LQ} (z-A)F(z)dz - \int_{KP} (z-A)F(z)dz \right], \quad (13)$$

где A – произвольная действительная постоянная.

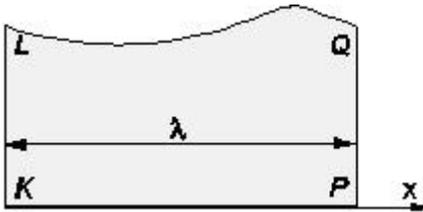


Рисунок 3 – Один период в области периодических волн

Для доказательства формулы (12) необходимо проинтегрировать функцию $F(z)$ по замкнутому контуру $KPQLK$, приравнять по теореме Коши интеграл к нулю и воспользоваться λ -периодичностью $F(z)$: $F(z+\lambda) = F(z)$. Формула (12) получается интегрированием функции $(z-A)F(z)$ по тому же замкнутому контуру.

Лемма 2. Для волн, перемещающихся с фазовой скоростью c_w , их кинетическая энергия $T(c_w)$ вычисляется по формуле

$$T(c_w) = \frac{\rho}{2} (c_a q + c_w^2 D - 2c_w q), \quad (14)$$

а среднеквадратичная скорость по формуле

$$\sigma^2(c_w) = c_b^2 - 2c_w c_a + c_w^2. \quad (15)$$

Доказательство. Согласно формуле (3) представим кинетическую энергию в виде

$$T(c_w) = T(0) + \frac{\rho}{2\lambda} \int_x^{x+\lambda} dx \int_0^{y_s(x)} (c_w^2 - 2c_w v_x) dy,$$

где $T(0) = \frac{\rho}{2\lambda} \iint_S (v_x^2 + v_y^2) dx dy,$

и интегрирование ведется по области S , занятой одним периодом волн. Так как

$$\int_0^{y_s(x)} v_x(x, y) dy = q, \quad (16)$$

то получаем, что

$$T(c_w) = T(0) + \frac{\rho}{2} (c_w^2 D - 2c_w q).$$

С помощью формулы Гаусса–Остроградского находим

$$\begin{aligned} T(0) &= \frac{\rho}{2\lambda} \iint_S \operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) dx dy = \\ &= \frac{\rho}{2\lambda} \oint_{KPQLK} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \\ &= \frac{\rho}{2\lambda} \left[\int_{PQ} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \int_{KL} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \right]. \end{aligned}$$

Здесь dl – элемент длины контура $KPQLK$, $\partial \varphi / \partial n$ – производная потенциала φ по направлению внешней нормали. Поскольку $\partial \varphi / \partial n = v_x$ есть функция λ -периодическая, а расход q в установившемся течении определяется формулой (16), то

$$T(0) = \frac{\rho}{2\lambda} \Delta \varphi q = \frac{\rho}{2} c_a q.$$

Подставив $T(0)$ в последнее выражение для $T(c_w)$, приходим к формуле (14). Формула (15) непосредственно следует из (2).

Лемма 3. В области стационарных периодических волн средний квадрат скорости на свободной поверхности LQ равен среднему квадрату скорости на дне

$$\frac{1}{\lambda} \int_{LQ} v^2(x) dx = c_b^2. \quad (17)$$

В точках пересечения свободной поверхности со средним уровнем $y = D$ скорость жидкости совпадает со скоростью c_b , и следовательно, на свободной поверхности выполняется уравнение

$$v^2(x) + 2gy_s(x) = v_b^2 + 2gD. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $w(z)$ – комплексный потенциал течения в области установившихся волн, тогда комплексно сопряженная скорость dw/dz есть λ -периодическая аналитическая функция. Рассмотрим функцию $F(z) = (dw/dz)^2$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 1. Согласно формулам (1) и (12)

$$c_b^2 = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} \int_{KP} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Re} \int_{LQ} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Замечаем, что вдоль линии тока

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = v^2 e^{-i\theta} dl = v^2 (dx - idy), \quad (19)$$

где θ – угол наклона вектора скорости, dl – элемент дуги. Отсюда следует первое утверждение леммы (17). Для доказательства второго утверждения достаточно проинтегрировать условие постоянства давлений на свободной поверхности

$$v^2(x) + 2gy_s(x) = C = \text{const} \quad (20)$$

в пределах от x до $x + \lambda$ и воспользоваться первым утверждением. Тогда $C = v_b^2 + 2gD$ и лемма доказана.

Лемма 4. *Справедлива формула*

$$2T(c) + \frac{\rho}{2} h \sigma^2(c) = \rho(gh - c^2) \Delta h. \quad (21)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммами 2 и 3. Учтем, что $q = ch$ и по формуле (14) найдем

$$T(c) = \frac{\rho}{2} (cc_a h + c^2 D - 2c^2 h).$$

В формуле (15) учтем, что согласно лемме 3 величина $c_b^2 = c^2 + 2g\Delta h$. Тогда

$$\sigma^2(c) = 2(c^2 + g\Delta h - cc_a).$$

Теперь вычисляем

$$2T(c) + \frac{\rho}{2} h \sigma^2(c) = \rho(c^2 D - c^2 h + gh\Delta h).$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Согласно формуле Чаплыгина сила сопротивления

$$R_x = -\frac{\rho}{2} \text{Im} \oint_{L_0} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

где L_0 – контур, ограничивающий тело, а интегрирование ведется против часовой стрелки. Деформируем контур L_0 в контур $MKLN$ (рис. 1), где MN – вертикальный отрезок далеко перед телом, KL – вертикальный отрезок далеко позади тела, причем эти отрезки расположены настолько далеко, что MN – находится в области равномерного потока, а KL – в области периодических волн. Так как на дне $\text{Im} dw/dz = 0$ то

$$\frac{2}{\rho} D = c^2 h + I_1 - I_2, \quad (22)$$

$$\text{где } I_1 = \text{Im} \int_{NL} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad I_2 = \text{Im} \int_{KL} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Для вычисления интегралов I_1 и I_2 учтем, что вдоль свободной поверхности LQ выполняется уравнение Бернулли $v^2 = c^2 - 2g(y - h)$ и, кроме того, согласно (19)

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz = [c^2 - 2g(y - h)](dx - idy). \quad (23)$$

Для первого интеграла I_1 легко выводим, что

$$I_1 = g(y_L - h)^2 - c^2(y_L - h), \quad (24)$$

где y_L – ордината точки L .

Для вычисления второго интеграла воспользуемся тем, что отрезок KL лежит в области периодических волн, а функция dw/dz является λ -периодической. Положим, что $A = x_L$, где x_L – абсцисса точки L . С помощью формул (13) и (23) получим, что

$$I_2 = \frac{1}{\lambda} \text{Im} \int_{LQ} v^2(x - x_L + iy)(dx - idy) = I_3 - I_4,$$

$$\text{где } I_3 = \frac{1}{\lambda} \int_{LQ} [c^2 - 2g(y - h)](y - h + h) dx,$$

$$I_4 = \frac{1}{\lambda} \int_{LQ} [c^2 - 2g(y - h)](x - x_L) dy.$$

Для интеграла I_3 выводим:

$$I_3 = c^2 h + (c^2 - 2gh)\Delta h - \frac{4}{\rho} \Pi(h).$$

Для вычисления I_4 проводим интегрирование по частям, положив, что $u = x - x_L$, $dv = [c^2 - 2g(y - h)] dy$. Тогда $du = dx$, $v = c^2(y - h) - g(y - h)^2$. Получим

$$I_4 = \frac{1}{\lambda} (x - x_L) [c^2(y - h) - g(y - h)^2] \Big|_L^Q - \frac{1}{\lambda} \int_{LQ} [c^2(y - h) - g(y - h)^2] dx.$$

Учтя, что интеграл I_4 вычисляется в области периодических волн, найдем

$$I_4 = c^2 \Delta h + \frac{2}{\rho} \Pi(h) - I_1.$$

Поэтому

$$I_2 = c^2 h - 2(c^2 - gh)\Delta h - \frac{6}{\rho} \Pi(h) + I_1. \quad (25)$$

Из формул (22, 24, 25) следует формула (5) теоремы 1. Для доказательства формулы (6) достаточно заметить, что согласно лемме 3

$$gh - c^2 = 3\Delta h + gD - v_b^2.$$

Если теперь воспользуемся формулой (4), то из (5) получим (6). Формула (7) следует из (5) и утверждения леммы 4.

Доказательство теоремы 2. Область периодических волн получается в результате распространения волн справа на бесконечности влево на весь поток. Верхняя граница области определяется формулой

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_s(x + n\lambda).$$

Обозначим эту область через G_z . Функция комплексного потенциала $w(z)$ конформно отображает область G_z на полосу $0 < \psi < q$ в плоскости $w = \varphi + i\psi$, поэтому комплексно-сопряженная скорость $f(z) = \frac{dw}{dz}$ нигде внутри G_z в нуль не об-

ращается. На горизонтальном дне выполняется условие $\text{Im} f(z) = 0$, которое позволяет аналитически продолжить функцию $f(z)$ через горизонтальное дно по правилу

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in \tilde{G}_z,$$

где черта означает комплексно-сопряженную величину, а \tilde{G}_z – область, полученная в результате симметричного отражения области G_z относи-

тельно дна. Функция $f(z)$ теперь определена в области $G_z \cup \tilde{G}_z$.

Согласно принципу максимума модуля **Ошибка! Источник ссылки не найден.** функция

$$v(x, y) = |f(x + iy)|$$

достигает максимума и минимума на границе области $G_z \cup \tilde{G}_z$, то есть на свободной поверхности волн.

Обозначим через v_c и v_t скорости в горбах и впадинах волн, соответственно. Так как h_c и h_t есть максимальное и минимальное возвышения свободной поверхности над уровнем дна, то из условия постоянства давления на свободной поверхности (20) находим, что v_c и v_t есть, соответственно, минимальная и максимальная скорости на свободной поверхности, а, следовательно, и во всей области G_z . Рассмотрим точку C на любом горбе волны и пусть x_c – абсцисса этой точки. Так как по условию теоремы 2 точка C находится на оси симметрии волны, то

$$v_x(x_c, y) = v(x_c, y), \quad 0 < y < h_c.$$

Но $v > v_c$. Следовательно,

$$v_x(x_c, y) > v_c, \quad 0 < y < h_c.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до h_c , с учетом соотношения

$$q = \int_0^{h_c} v_x(x_c, y) dy$$

находим

$$q > v_c h_c. \quad (26)$$

Совершенно аналогично, рассмотрев точку T во впадине волны, найдем, что

$$q < v_t h_t. \quad (27)$$

Пусть константа Бернулли $C = 2gh_m$, где h_m – уровень нулевой скорости по уравнению (20).

Введем функцию

$$\Omega(y) = q^2 - v^2(y)y^2,$$

где $v(y)$ – скорость на свободной поверхности. Согласно (26) и (27) имеем

$$\Omega(h_c) > 0, \quad \Omega(h_t) < 0. \quad (28)$$

Из уравнения Бернулли (20) найдем, что

$$\Omega(y) = q^2 - 2g(h_m - y)y^2,$$

причем $\Omega(0) = q^2 > 0$. Разрешимость системы (8), (9) эквивалента разрешимости уравнения $\Omega(y) = 0$ при $y > 0$.

Производная $\Omega'(y) = 6gy(y - 2h_m/3)$. Отсюда вытекает, что функция $\Omega(y)$ убывает на интервале $(0, 2h_m/3)$ и возрастает на интервале

$(2h_m/3, +\infty)$. Следовательно при $y > 0$ функция $\Omega(y)$ либо вообще не имеет корней, либо имеет один кратный корень, либо два простых корня. Согласно (28) у этой функции имеется один корень на интервале (h_t, h_c) . Второй корень не может находиться на этом же интервале, так как тогда будет $\Omega(h_t) > 0$. По этой же причине корень на интервале (h_t, h_c) не может быть кратным. Отсюда заключаем (см. рис.4), что функция $\Omega(y)$ имеет ровно два строго положительных корня h_1 и h_2 , расположенных так, что

$$h_t < h_1 < h_c, \quad h_1 > 2h_m/3,$$

$$h_2 < h_t, \quad h_2 < 2h_m/3.$$

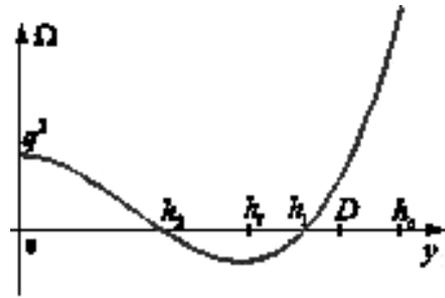


Рисунок 4 - Функция $\Omega(y) = q^2 - v^2(y)y^2$.

Этим корням соответствуют скорости $c_1 = \sqrt{2g(h_m - h_1)}$, $c_2 = \sqrt{2g(h_m - h_2)}$.

Рассмотрим корень $h_1 > 2h_m/3$. Для него

$$gh_1 > \frac{2}{3}gh_m = \frac{B}{3} = \frac{c_1^2 + 2gh_1}{3}.$$

Отсюда

$$3gh_1 > c_1^2 + 2gh_1 \Rightarrow \frac{c_1}{\sqrt{gh_1}} < 1.$$

Аналогично для корня h_2 устанавливаем, что

$$c_2/\sqrt{gh_2} > 1.$$

Из этих рассуждений следуют оба утверждения теоремы 2, за исключением неравенства $D < h_1$. Для доказательства неравенства рассмотрим равенство (21) леммы 4. Положим в этом равенстве, что $c = c_1$, $h = h_1$. Левая часть (21) строго положительная. Согласно уже доказанному $gh_1 - c_1^2 > 0$. Но тогда

$$\Delta h > 0 \Rightarrow D < h_1.$$

Теорема 2 доказана.

Таким образом, для точного вычисления волнового сопротивления необходимо знать параметры установившейся волны за телом, а именно потенциальную и кинетическую энергии волны и её скорость. Перейдём к решению этой задачи.

Метод Стокса расчета прогрессивных волн

В последующих разделах за начало отсчёта оси y примем средний уровень периодических волн. Тогда форма волны задается уравнением $y = Y(x) = y_s(x) - D$. Конформно отображим бесконечнолистное кольцо параметрической плоскости ζ на область G_z периодических волн. Общий вид такого отображения будет

$$z(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi} \left[i \ln \zeta + x_0 + iy_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n \zeta^n + \bar{z}_n \frac{r_0^{2n}}{\zeta^n} \right) \right], \quad (29)$$

где коэффициенты ряда Лорана z_n называются коэффициентами Стокса.

Внешняя окружность $|\zeta| = 1$ отображается на поверхность волны

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[x_0 + i \ln \zeta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (z_n \zeta^n + \bar{z}_n \zeta^{-n}) \alpha_n \right], \\ Y &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[y_0 + \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} (z_n \zeta^n - \bar{z}_n \zeta^{-n}) \beta_n \right], \\ \alpha_n &= 1 + r_0^{2n}, \quad \beta_n = 1 - r_0^{2n}, \end{aligned} \quad (30)$$

а внутренняя $|\zeta| = r_0$ отображается на поверхность дна

$$y = -D = \frac{\lambda}{2\pi} [\ln r_0 + y_0]. \quad (31)$$

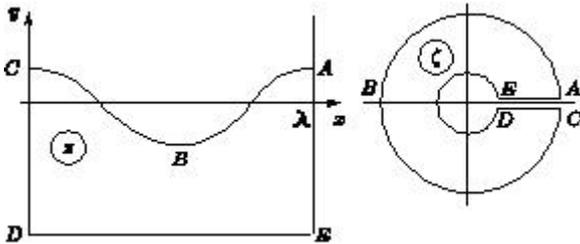


Рисунок 5 - Иллюстрация к методу Стокса

Если предположить, что гребни и впадины волн находятся на осях симметрии и этим осям в плоскости ζ соответствуют отрезки $[-1, -r_0]$ и $[1, r_0]$ действительного диаметра кольца, то коэффициенты Стокса z_n прогрессивной волны – чисто мнимые числа $z_n = iy_n, n = 0, 1, 2, \dots$. Проведем в плоскости ζ разрез по отрезку $[1, r_0]$. Тогда функция (29) отображает кольцо с разрезом на один период области G_z (см. рис.5).

Комплексный потенциал течения в системе координат, движущейся вместе с волнами имеет вид

$$w = \varphi + i\psi = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} i \ln \zeta = \frac{\lambda c_a}{2\pi} i \ln \zeta. \quad (32)$$

Отсюда вытекает, что расход жидкости в этой системе координат будет

$$q = -\frac{\lambda c_a}{2\pi} \ln r_0. \quad (33)$$

Интегральные характеристики волн

В дальнейшем все линейные размеры относим к $\lambda / (2\pi)$, а все скорости к $c_s = \sqrt{g\lambda / (2\pi)}$.

Величина c_s – это скорость распространения прогрессивных волн бесконечно малой амплитуды в жидкости бесконечной глубины. Безразмерные аналоги интегральных характеристик волн будем обозначать «крышкой». Например, безразмерная длина волны $\hat{\lambda} = 2\pi$, безразмерная горизонтальная скорость частиц жидкости $\hat{c}_a = \sqrt{2\pi} c_a / \sqrt{g\lambda}$, безразмерный расход

$$\hat{q} = \frac{2\pi q}{\lambda c_s} = -\hat{c}_a \ln r_0.$$

Из уравнения для среднего уровня поверхности волны

$$\int_0^{\hat{\lambda}} Y(x) dx = 0$$

получим

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{1}{2} S, \\ S &= \sum_{n=1}^{\infty} n \gamma_n |y_n|^2, \\ \gamma_n &= 1 - r_0^{4n}. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, коэффициент y_0 выражается через коэффициенты $y_i, i = 1, 2, \dots$.

Подсчитаем безразмерную удельную потенциальную энергию

$$\hat{\Pi} = \frac{(2\pi)^2 \Pi(D)}{\rho g \lambda^2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \hat{Y}(\hat{x}) d\hat{x}.$$

Имеем

$$2\pi \hat{\Pi} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \hat{Y}^2 d\hat{x} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\hat{Y} - y_0)^2 d\hat{x} - \pi y_0^2.$$

Первое слагаемое правой части приводится к интегралу по окружности и вычисляется по теореме вычетов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\hat{Y} - y_0)^2 d\hat{x} = \\ & = \frac{1}{16} \left[\int_{|\zeta|=1} \sum_{n=1}^{\infty} (z_n \zeta^n - \bar{z}_n \zeta^{-n}) \times \right. \\ & \times \beta_n \sum_{m=1}^{\infty} (z_m \zeta^m - \bar{z}_m \zeta^{-m}) \beta_m \times \\ & \times \left(i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (z_k \zeta^k - \bar{z}_k \zeta^{-k}) k \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ & = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 |z_n|^2 + \\ & + \operatorname{Re} e \frac{\pi i}{4} \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k z_k \times \\ & \times \left(\sum_{n+m=k} \beta_n \beta_m \bar{z}_n \bar{z}_m - 2 \sum_{n-m=k} \beta_n \beta_m \bar{z}_n z_m \right). \end{aligned}$$

С помощью формулы

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k z_k \sum_{n-m=k} \beta_n \beta_m \bar{z}_n z_m = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n \sum_{m+k=n} k \alpha_k \beta_n \beta_m z_k z_m = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k \sum_{m+n=k} n \alpha_n \beta_k \beta_m z_n z_m \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\hat{Y} - y_0)^2 d\hat{x} = \\ & = \frac{\pi}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 |z_n|^2 + \right. \\ & \left. + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k \sum_{n+m=k} \left(\frac{1}{2} k \alpha_k \beta_n + n \alpha_n \beta_k \right) \beta_m z_n z_m \right). \end{aligned}$$

Собирая полученные формулы и подставляя $z_n = iy_n$, приходим к следующему выражению

$$2\pi \hat{\Pi} = \frac{\pi}{2} \left(-S^2 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 y_n^2 + \operatorname{Im} G \right).$$

В сумме, через которую выражается функция G , проведём симметризацию по индексам n, m . После симметризации получим

$$\begin{aligned} G &= \sum_{k=2}^{\infty} \bar{z}_k \sum_{n=1}^{k-1} \mathcal{E}_{k-nn} z_n z_{k-n}, \\ \mathcal{E}_{mn} &= m(1 - r_0^{2n})(1 - r_0^{4m+2n}) + n(1 - r_0^{2m})(1 - r_0^{2m+4n}). \end{aligned}$$

С учетом того, что $z_n = iy_n$, окончательное выражение для безразмерной удельной потенциальной энергии будет таким

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{4} (-S^2 / 2 + S_1 + G_1), \quad (35)$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 y_n^2, \quad G_1 = \sum_{k=2}^{\infty} y_k \sum_{n=1}^{k-1} \mathcal{E}_{k-nn} y_n y_{k-n},$$

а величина S вычисляется по второй формуле в (34).

Введем безразмерную удельную кинетическую энергию волн, фазовая скорость которых равна средней горизонтальной скорости частиц жидкости

$$\hat{T} = \frac{(2\pi)^2 T(c_a)}{\rho g \lambda^2}.$$

С помощью формулы (14) при $c_w = c_a$ найдем $\hat{T} = -\hat{c}_a^2 y_0 / 2$. Отсюда и (34) получим

$$\hat{T} = \frac{1}{4} \hat{c}_a^2 S. \quad (36)$$

Вычислим безразмерный средний квадрат скорости частиц жидкости на дне: $\hat{c}_b^2 = 2\pi c_b^2 / (g\lambda)$. Для элементов $d\hat{z}$ и $d\hat{w}$ на

дне при $\zeta = r_0 e^{i\alpha}$ получим

$$\begin{aligned} d\hat{z} &= i \frac{d\zeta}{\zeta} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} n y_n (\zeta^n + r_0^{2n} \zeta^{-n}) \right] = \\ &= - \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n y_n r_0^n \cos n\alpha \right) d\alpha, \end{aligned}$$

$$d\hat{w} = d \left(\frac{2\pi w}{\lambda c_s} \right) = \hat{c}_a i \frac{d\zeta}{\zeta} = -\hat{c}_a d\alpha.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} c_b^2 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v^2(x, -D) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(\frac{dw}{dz} \right) dz = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{[w'(\alpha)]^2}{z'(\alpha)} d\alpha = -\frac{c_s^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\hat{w}'(\alpha)]^2}{\hat{z}'(\alpha)} d\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\hat{c}_b^2 = \frac{\hat{c}_a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n y_n r_0^n \cos n\alpha}. \quad (37)$$

Разложив интеграл по степеням r_0 , получим

$$\hat{c}_b^2 = B \hat{c}_a^2,$$

где

$$\begin{aligned} B &= 1 + 2r_0^2 y_1^2 + \\ &+ r_0^4 (6y_1^4 - 12y_1^2 y_2 + 8y_2^2) + \\ &+ r_0^6 \left(20y_1^6 - 80y_1^4 y_2 + \right. \\ &\left. + 24y_1^3 y_3 + 96y_1^2 y_2^2 - r_0^8 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

**Функция Лагранжа
и коэффициенты Стокса**

Будем считать, что фазовая скорость волны равна c_a . Коэффициенты Стокса y_1, y_2, \dots определяются из условий экстремума функции Лагранжа $\hat{T} - \hat{\Pi}$ при условии сохранения среднего уровня в волне (сохранение массы)

$$\left(\hat{D} - \frac{1}{2}S + \frac{\ln R}{2} \right) = 0. \quad (38)$$

Здесь $\hat{D} = 2\pi D / \lambda$ – безразмерная глубина, $R = r_0^2$.

Задача на условный экстремум методом множителей Лагранжа сводится к экстремуму функции

$$L(y_i, R, \mu) = \hat{T} - \hat{\Pi} + \mu \left(D - \frac{1}{2}S + \frac{\ln R}{2} \right).$$

Из уравнения $\partial L / \partial R = 0$ находим множитель Лагранжа μ

$$\mu = \frac{\partial \langle T - \Pi \rangle}{\partial R} / \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial R} - \frac{1}{2R} \right),$$

а из уравнений $\partial L / \partial y_i = 0, i = 1, 2, \dots$ ищем \hat{c}_a^2 и коэффициенты Стокса y_1, y_2, y_3, \dots в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} y_1 &= b, y_2 = y_{20}b^2 + y_{22}b^4, \dots, y_n = \\ &= y_{n0}b^n + y_{n2}b^{n+2} + \dots, \\ c_a^2 &= c_0 + c_2b^2 + \dots \end{aligned}$$

Подставляя эти ряды в уравнение $\partial L / \partial y_k = 0$, получаем соотношения вида

$$a_{k0}b^k + a_{k2}b^{k+2} + a_{k4}b^{k+4} + \dots = 0.$$

Из уравнений $a_{1,0} = 0$ и $a_{2,0} = 0$ находим

$$c_0 = \frac{1-R}{R+1}, \quad y_{20} = \frac{R^2 + R + 1}{(R-1)^2}.$$

Из уравнений, содержащих коэффициенты при b^3 : $a_{1,2} = 0, a_{3,0} = 0$ находим

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{R^4 + 2R^3 + 12R^2 + 2R + 1}{1 - R^2}, \\ y_{30} &= \frac{3R^4 + 4R^3 + 4R^2 + 4R + 3}{2(R-1)^4}. \end{aligned}$$

Замечательно, что зависимости от параметра $R = r_0^2$ выражаются через возвратные полиномы $\sum_{k=0}^n a_k R^k$, у которых коэффициенты симметричны: $a_k = a_{n-k}$ и, кроме того, они являются целыми числами. Для сокращения записи возвратные полиномы удобно записывать, приведя степень полинома и значения его первых $[n/2]$ коэффициентов, например,

$$P_4[1, 2, 3] = 1 + 2R + 3R^2 + 2R^3 + R^4,$$

$$P_5[1, 2, 3] = 1 + 2R + 3R^2 + 3R^3 + 2R^4 + R^5.$$

Условия равенства нулю коэффициентов при b^4 : $a_{2,2} = 0, a_{4,0} = 0$ определяют

$$\begin{aligned} y_{22} &= \frac{P_8[1, 0, -16, -24, -30]}{2(-1+R)^6}, \\ y_{40} &= \frac{P_8[16, 47, 74, 87, 92]}{2(-1+R)^6(3+4R+3R^2)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогично определяются и все последующие коэффициенты.

Параметр b можно выразить через амплитуду волны $a = (\hat{Y}_{max} - \hat{Y}_{min}) / 2$. С помощью (30) получаем

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} y_{2n-1} (1 - R^{2n-1}).$$

В итоге все характеристики волны можно представить в виде рядов по амплитуде a , коэффициенты которых будут зависеть от параметра $R = r_0^2$.

Приведём первые члены рядов для потенциальной энергии $\hat{\Pi}$, квадрата скорости волны \hat{c}_a^2 и коэффициента B формулы

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \Pi_2 a^2 + \Pi_4 a^4 + \Pi_6 a^6, \\ \Pi_2 &= 1/4, \\ \Pi_4 &= -\frac{P_6[1, 4, 5, 16]}{8(-1+R)^6}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$P_{16}[-19, 11, 486, 2209, 5592,$$

$$10567, 15698, 19709, 21094]$$

$$\Pi_6 = \frac{8(-1+R)^{12}(2+R+2R^2)(3+4R+3R^2)}{8(-1+R)^{12}(2+R+2R^2)(3+4R+3R^2)}.$$

$$c_a^2 = c_0 + c_2 a^2 + c_4 a^4 + c_6 a^6, \quad c_0 = \frac{1-R}{R+1},$$

$$c_2 = \frac{P_4[-1, -2, -12]}{(-1+R)^3(1+R)},$$

$$c_4 = \frac{P_{10}[-1, 3, 83, 248, 290, 374]}{2(-1+R)^9(1+R)}$$

$$c_6 = \frac{P_{20} \left[\begin{array}{l} 3, 28, 274, 8352, 48601, \\ 157896, 362580, 654512, \\ 971148, 1221428, 1315268 \end{array} \right]}{2(1-R)^{15}(1+R)(2+R+2R^2) \times} \quad (40)$$

$$\times (3+4R+3R^2)$$

$$B = 1 + B_2 a^2 + B_4 a^4 + B_6 a^6, \quad (41)$$

$$B_2 = \frac{2R}{(1-R)^2}, \quad B_4 = \frac{6RP_6[-1, -2, -3, 6]}{(1-R)^8},$$

$$6RP_{16}[52, 967, 6086, 15149, 24028,$$

$$B_6 = \frac{22267, 26018, 21185, 27696]}{2(1-R)^{14}(2+R+2R^2)(3+4R+3R^2)}.$$

Для кинетической энергии T получаем следующие разложения

$$T = \frac{S}{4} \dot{x}_0^2,$$

$$S(R, a) = S_2(R)a^2 + S_4(R)a^4 + S_6(R)a^6$$

$$S_2 = \frac{1+R}{1-R},$$

$$S_4 = -\frac{(1+R+R^2)P_5[1,3,2]}{1-R^7},$$

$$P_{17}[-13, 75, 927, 3745, 9332, 17412, 26287, 33793, 38042]$$

$$S_6 = \frac{2(1-R)^{13}(2+R+2R^2)(3+4R+3R^2)}{2(1-R)^{13}(2+R+2R^2)(3+4R+3R^2)}.$$

Первый член разложения для скорости волны точно соответствует результату линейной теории.

Волновое сопротивление

Воспользуемся точной формулой для волнового сопротивления (6). С учетом (38) в безразмерной форме она принимает вид

$$\hat{R}_x = 3\hat{\Pi} - \frac{3}{2}(\Delta\hat{h})^2 - \left(\frac{1}{2}(S - \ln R) - \hat{c}_a^2 B\right)\Delta\hat{h},$$

где $\hat{R}_x = (2\pi)^2 / (\rho g \lambda^2)$, $\Delta\hat{h} = 2\pi\Delta h / \lambda$ – безразмерный дефект уровней. В формуле (42) необходимо выразить $\Delta\hat{h}$ через параметры волны.

Расход жидкости перед телом определяется равномерным потоком со скоростью c и высотой $D + \Delta h$. Позади тела для расхода жидкости в волне получена формула (33). С помощью (38) получим безразмерный аналог уравнения сохранения расхода (8)

$$-\hat{c}(S - \ln R + 2\Delta\hat{h}) = \hat{c}_a \ln R. \quad (46)$$

На поверхности жидкости впереди тела и позади тела интеграл Бернулли даёт

$$2\Delta\hat{h} + \hat{c}^2 = B\hat{c}_a^2. \quad (43)$$

Чтобы вычислить по формуле (42) силу сопротивления, достаточно задать два параметра, например, параметр R и амплитуду a . Затем необходимо решить систему (43) относительно неизвестных $\Delta\hat{h}$ и \hat{c}^2 . Подставляя найденные значения $\Delta\hat{h}$ и \hat{c}^2 в (42), получаем силу сопротивления R_x . Решения можно искать в виде рядов по степеням a . Если ограничиться квадратичным приближением, то из формулы (42) получим известную формулу первого приближения

$$\hat{R}_x = a^2 \frac{1 - R^2 + 2R \ln(R)}{4 - 4R^2}, \quad (44)$$

а для квадрата скорости тела

$$c^2 = c_0 + a^2 c'_2,$$

$$c'_2 = \frac{\left[(1-R)(4(1-R)(1+R+R^2)^2 + \right. \\ \left. + P_5(1,3,14) \ln R \right]}{(1-R)^4(1+R)(2-2R+(1+R) \ln R)}.$$

Видно, что коэффициенты c'_2 разложений для скоростей \hat{c}^2 и \hat{c}_a^2 существенно отличаются.

Для разности уровней впереди и позади тела получаем

$$\Delta\hat{h} = a^2 \frac{-1 + R^2 + R \ln R}{(1-R)(2-2R+(1+R) \ln R)}.$$

Коэффициенты разложений представляются рациональными функциями от R и $\ln R$ и выглядят весьма громоздко. Поэтому для вычисления силы удобно определить \hat{c} точно, как корень кубического уравнения

$$\hat{c}^3 + \hat{c}P + Q = 0, \quad \text{где}$$

$$P = -(S - \ln R + \hat{c}_a^2 B), \quad Q = -\hat{c}_a \ln R,$$

по формуле

$$\hat{c} = 2\sqrt{-\frac{P}{3}} \cos \frac{\pi + \beta}{3}, \quad \beta = \arctg \frac{2\sqrt{D}}{Q},$$

$$D = -\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27},$$

а затем найти

$$\Delta\hat{h} = (B\hat{c}_0^2 - \hat{c}^2) / 2.$$

Сравнения точных характеристик волны с их асимптотическими разложениями

Для бесконечной глубины разность уровней равна нулю, а скорости волны и тела совпадают. В пределе точная формула для волнового сопротивления (7) переходит в следующее компактное выражение

$$\hat{R}_x = 3\hat{\Pi} - 2\hat{T}.$$

Разложение сопротивления по амплитуде до десятой степени имеет вид

$$R(a) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{8}a^4 - \frac{19}{48}a^6 + \frac{2597}{2880}a^8 - \frac{559733}{201600}a^{10} + O(a^{12}). \quad (45)$$

На рис. 6 приведено сравнение формулы для сопротивления (45) с точным численным расчётом по методу работы [8]. Черная линия – точный расчёт, штриховая – формула (45) и штрихпунктирная – приближение (44).

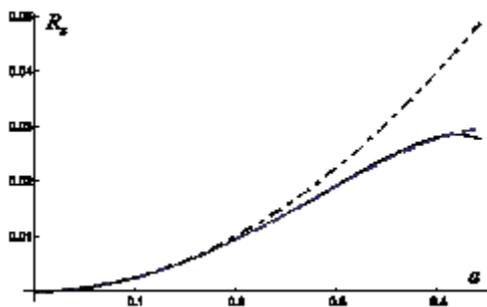


Рисунок 6 - Сопротивление при бесконечной глубине

На рис. 7 приведено аналогичное сравнение для волн конечной глубины.

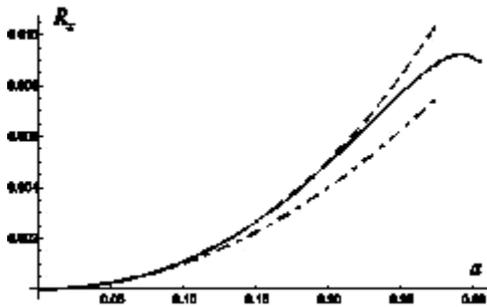


Рисунок 7 - Сопротивление при конечной глубине, $r_0 = 0.4$

Работа получила финансовую поддержку РФФИ, проекты 11-01-00535, 12-01-00996.

Литература

1. Schwartz, L. W. 1974 Computer extension and analytic continuation of the Stokes expansion for gravity waves. *J. Fluid Mech.* 62, 553–578.
2. Longuet-Higgins, M. S. 1975 Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A342, 157–174.
3. Cokelet, E. D. 1977 Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond.* A286, 183–230.
4. Маклаков Д.В.// Об установившихся волнах, генерируемых движущимся телом, и волновом сопротивлении// Доклады РАН. 2001. Т. 379(4). С. 479-483.
5. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.:Мир. 1964. 655 с.
6. Forbes L.K., Schwartz L.W. Free-surface flow over a semi-circular obstruction// *J. Fluid Mech.* – 1982. – V. 114. – P. 299.
7. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009г. 519 с.
8. Maklakov D.V. Almost highest gravity waves on water of finite depth. *Euro. Jnl of Applied Mathematics* (2002), vol. 13, pp. 67-93.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М: Наука, 1965. 716 с.

О НАТЕКАНИИ СТРУИ НА ПОЛИГОНАЛЬНУЮ СТЕНКУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Маклаков Д.В., Сулейманов С.З.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

420008 Казань, Кремлевская, 18
dmaklak@kpfu.ru

Реферат

В работе исследуется задача о натекании струи на полигональную стенку произвольной конфигурации. Предлагается метод, основанный на классическом подходе Н.Е. Жуковского и Дж.Х. Мичелла и позволяющий рассчитывать натекание струи на полигон с большим числом звеньев. Установлено, что при определенной конфигурации стенки задача может иметь два решения, одно из которых - неоднолистно. Выявлены предельные режимы течения, характеризующиеся полным исчезновением одной из струй, образующихся после разделения основной натекающей струи. Сделана попытка смоделировать известный опыт об устойчивом положении лежащего на горизонтальном дне шарика при падении на него сверху тонкой струи воды. При моделировании шарик заменяется круговым цилиндром, обтекаемым безотрывно. Численно показано, что любое смещение струи вправо или влево от положения действующей на цилиндр нулевой горизонтальной силы приводит к возникновению неравной нулю силы противоположного направления, что говорит об абсолютной неустойчивости цилиндра в струе при безотрывном обтекании.

Ключевые слова: струйное обтекание, идеальная жидкость, потенциальные течения, аналитическое решение.

Введение

Общие методы построения аналитических решений плоских струйных задач обтекания полигональных препятствий были предложены Н.Е. Жуковским [1] и Дж.Х. Мичеллом [2]. В этих двух фундаментальных работах излагается, по сути дела, один и тот же метод, в котором область течения конформно отображается на верхнюю полуплоскость, а основной искомой функцией является функция Жуковского-Мичелла – логарифм комплексно сопряженной скорости. С.А. Чаплыгиным был разработан метод особых точек [3], который значительно упростил процесс построения аналитических решений. Подробную библиографию работ, посвященных развитию идей Н.Е. Жуковского, Дж.Х. Мичелла и С.А. Чаплыгина, можно найти в монографиях [3-5].

Классический подход Жуковского и Мичелла может быть применен и для исследования струйного обтекания криволинейных препятствий посредством аппроксимации криволинейных стенок полигональными. Однако здесь возникает проблема определения большого числа граничных точек параметрической плоскости, являющихся образами угловых точек полигонов. Эти образы необходимо определить из решения сложной системы трансцендентных уравнений. Попытка решения этой проблемы (так называемой проблемы параметров) была сделана в статьях [6, 7]. В первой из них исследуется классическая задача о струйном обтекании полигонального препятствия по схеме Гельмгольца-Кирхгоффа. Помимо полигонов достаточно простой конфигурации с небольшим числом звень-

ев авторы [6] приводят весьма экзотический пример расчета 13-звенного полигона, главная цель которого показать, что проблема параметров может быть ими эффективно разрешена. В работе [7] решается задача об истечении струи из канала с полигональными стенками. В одном из примеров, рассчитанных в [7], рассматривается истечение струи из воронки, одна из стенок которой заканчивается дугой окружности с прямым центральным углом. Авторы аппроксимируют дугу полигоном с пятнадцатью углами, но не рекомендуют применять такой подход как общую процедуру исследования струйного обтекания криволинейных препятствий, поскольку, с их точки зрения, она является весьма дорогой по затратам времени вычислений. Действительно, для расчета обтекания криволинейных препятствий существуют гораздо более эффективные методы, наиболее известным из которых является метод Леви-Чивиты [8, 3]. Этот метод не утратил своей актуальности и на современном «компьютерном» этапе развития гидродинамики (см., например, [9]).

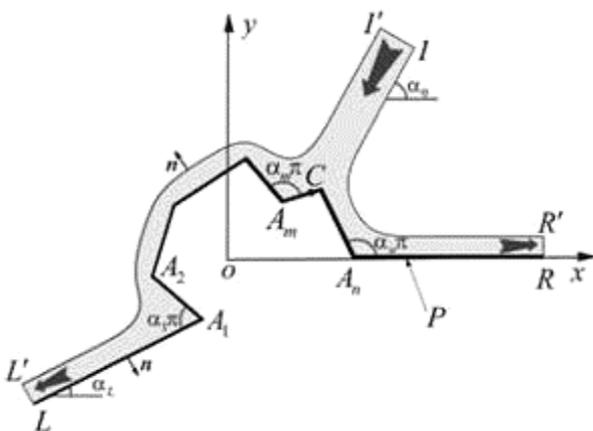
Методы расчета натекания струи на криволинейную стенку предложены в работах [10, 11]. Авторы статьи [11] при сравнении полученных ими результатов с результатами [10] отмечают, что в случае несимметричного натекания в работе [10] нарушается закон сохранения массы: расход в основной натекающей струе не совпадает с суммарным расходом струй, образующихся после разделения основной. Следует отметить также, что в статьях [10, 11] приведены лишь примеры расчетов без подробного параметрического анализа влияния положения струи.

В настоящей работе исследуется задача о натекании струи на полигональную стенку произвольной конфигурации. Предлагается метод, осно-

ванный на классическом подходе и позволяющий рассчитывать натекание струи на полигон с большим числом звеньев. Установлено, что при определенной конфигурации стенки задача может иметь два решения, одно из которых – неоднолистно. Выявлены предельные режимы течения, характеризующиеся полным исчезновением одной из струй, образующихся после разделения основной натекающей струи. Сделана попытка смоделировать известный опыт об устойчивом положении лежащего на горизонтальном дне шарика при падении на него сверху тонкой струи воды. Предполагается, что плоская струя при натекании на круговой цилиндр также должна приводить к устойчивому положению цилиндра. Круговой цилиндр заменяется на вписанную в него прямоугольную призму, в основании которой лежит правильный многоугольник с достаточно большим числом сторон. Установлено, что при любом угле наклона струи существует ее нейтральное положение, при котором действующая на цилиндр горизонтальная сила будет равна нулю. Однако любое смещение струи вправо или влево от этого положения приводит к возникновению горизонтальной силы, действующей в противоположном направлении, что говорит об абсолютной неустойчивости цилиндра в струе при безотрывном обтекании.

1. Постановка задачи. Сила и момент, действующие на стенку

Плоская струя идеальной несжимаемой жидкости, наклоненная по углом α_0 к оси Ox , натекает на полигональную стенку $LA_1A_mA_nR$. Контур стенки P состоит из ломаной $A_1A_mA_n$ и продолжающих ее лучей A_1L и A_nR . Не теряя общности, считаем, что луч A_nR направлен по оси Ox . Струя разделяется в точке торможения C и растекается по стенке. Область течения содержит три бесконечно удаленных точки: L , L' и R' (фиг. 1). На свободных линиях тока LI и IR' скорость постоянна и равна v_0 .



Фигура 1 - Схема натекания струи на стенку.

Ширина струи на бесконечности L является заданной и равна h . Положение натекающей струи по отношению к стенке определяется углом α_0 и параметром s_h , равным расстоянию от оси струи до начала координат. Это расстояние считаем положи-

тельным, если вектор скорости $v_L = -v_0 e^{i\alpha_0}$, направленный по оси струи и рассматриваемый как сила, стремится повернуть стенку по отношению к началу координат против часовой стрелки. Отсюда следует, что знак s_h совпадает со знаком алгебраического момента вектора v_L по отношению к началу координат O . В частности, на фиг. 1 параметр $s_h < 0$. Таким образом, форма стенки и параметры v_0 , α_0 , h и s_h заданы, все остальные характеристики, включая форму свободных линий тока LI и IR' , подлежат определению.

Пусть h_L и h_R – ширины струй в бесконечно удаленных точка L и R , соответственно, α_L – угол наклона луча LA_1 , s_L – расстояние от LA_1 до начала координат. Знак s_L определяется также, как и знак s_h , то есть считается положительным, если вектор скорости $v_L = -v_0 e^{i\alpha_L}$, направленный по лучу A_1L и рассматриваемый как сила, стремится повернуть стенку по отношению к началу координат против часовой стрелки. На фиг. 1 параметр $s_L > 0$. Гидродинамическая сила R и момент M , действующие на стенку, определяются формулами

$$\mathbf{R} = \int_P (p - p_0) \mathbf{n} dl,$$

$$M = \int_P m_o [(p - p_0) \mathbf{n}] dl,$$

где P – контур стенки, p и p_0 – давления в жидкости и окружающей среде, соответственно, \mathbf{n} – единичный вектор нормали, внешней по отношению к области, занятой жидкостью, dl – элемент длины контура P , m_o – алгебраический момент вектора относительно начала координат.

Проведем в области течения удаленные сечения LL' , II' , RR' и выделим в жидкости контрольный объем, ограниченный этими сечениями (фиг. 1). Применение теорем об изменении количества движений и момента количества движений (7) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_x + i R_y = \\ &= \rho v_0^2 h \left(\frac{h_L}{h} e^{i\alpha_L} - \frac{h_R}{h} - e^{i\alpha_0} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

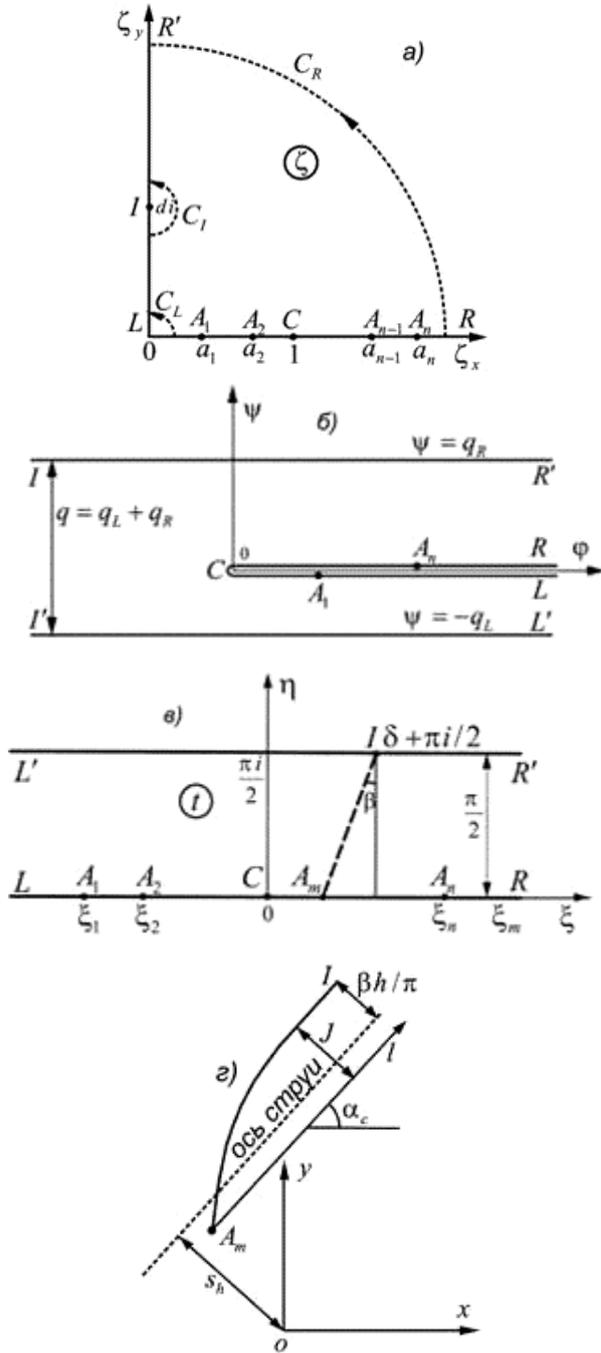
$$M = \rho v_0^2 h^2 \left[\frac{s_h}{h} + \frac{h_R^2}{2h^2} - \frac{h_L(2s_L + h_L)}{2h^2} \right], \quad (1.2)$$

где ρ – плотность жидкости. Отметим, что формулы (1.1, 1.2) справедливы и в случае, когда стенка представляет собой любую кривую, имеющую горизонтальную асимптоту справа и асимптоту, наклоненную под углом α_L , слева. Следует также указать, что в формулах (1.1, 1.2) величины h_L и h_R неизвестны и должны определиться в ходе решения задачи.

2. Параметризация

Область течения в физической плоскости $z = x + iy$ конформно отображим на верхний правый квадрант параметрической плоскости $\zeta = \zeta_x + i\zeta_y$, так чтобы полигональная стенка перешла в действительную ось этой плоскости, свободная поверхность во мнимую ось, критическая точка C

единицу действительной оси, бесконечно удаленная точка I в точку di (фиг. 2 а). Через a_1, a_2, \dots, a_n обозначим образы вершин полигональной стенки и пусть $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения. Область изменения комплексного потенциала w показана на фиг. 2 б.



Фигура 2:

- а) Параметрическая плоскость ζ .
- б) Область изменения комплексного потенциала w .
- в) Пара-метрическая плоскость t .
- г) К вычислению расстояния s_h оси струи до начала координат.

Методом особых точек найдем производную комплексного потенциала

$$\frac{dw}{d\zeta} = \varphi_0 \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta(z^2 + d^2)}, \quad (2.1)$$

где $\varphi_0 > 0$ – постоянная, имеющая размерность потенциала скорости. Обозначим через $q = hv_0$, $q_L = h_L v_0$ и $q_R = h_R v_0$ расходы жидкости в бесконечно удаленных сечениях II' , LL' и RR' соответственно. Ясно, что $q_I = q_L + q_R$ и $h = h_L + h_R$. Выразим толщины струй h , h_L и h_R через параметры φ_0 и d . Для этого проинтегрируем функцию $dw/d\zeta$ по полуокружности C_I бесконечно малого радиуса, четверти окружности C_R бесконечно большого радиуса и четверти окружности C_L бесконечно малого радиуса. Направление интегрирования – против часовой стрелки (фиг. 2 а). Контурам интегрирования соответствуют удаленные сечения $I'I$, RR' и LL' в плоскости w . Поэтому

$$iq = \int_{C_I} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta, \quad iq_R = \int_{C_R} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta, \\ -iq_L = \int_{C_L} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta.$$

С помощью (2.1) и теории вычетов найдем

$$h = \frac{\varphi_0 \pi}{v_0} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{d^2}\right), \quad h_R = \frac{\varphi_0 \pi}{v_0} \frac{\pi}{2}, \\ h_L = \frac{\varphi_0 \pi}{v_0} \frac{1}{2d^2} \quad (2.2)$$

Обозначим через $\pi\alpha_k$, $k = \overline{1, n}$ – внутренние по отношению к жидкости углы в вершинах полигона. Применив для построения функции $\frac{v_0 dz}{dw}$ метод особых точек С.А. Чаплыгина, получим

$$\frac{v_0 dz}{dw} = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta - a_k}{\zeta + a_k} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad (2.3)$$

причем здесь учтено, что $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{v_0 dz}{dw} = 1$.

Параметрическая плоскость ζ удобна для применения метода особых точек и вывода формул (2.1-2.3). Однако в этой «удобной» плоскости появляются вычислительные трудности для случаев, когда одна из струй, растекающихся по стенке, становится очень тонкой. Если, например, очень тонкой становится левая струя, то параметр $a_1 \rightarrow 0$, причем, как мы увидим в дальнейшем, при расчетах со стандартной двойной точностью (8-байтные десятичные числа) a_1 становится меньше минимального числа, которое компьютер может отличить от нуля. Аналогично, если тонкой становится

правая струя, то $a_n \rightarrow \infty$, причем a_n может превзойти максимально возможное число компьютера. Чтобы расширить возможности численного метода перейдем в плоскость $t = \ln \zeta$. Областью изменения новой параметрической переменной $t = \xi + i\eta$ является полоса ширины $\pi/2$ (фиг. 2 в). При этом

$$\delta = \ln d, \quad \xi_k = \ln a_k, \quad k = \overline{1, n},$$

а формулы (2.1), (2.3) приобретают вид

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\varphi_0 \operatorname{sh} t}{e^\delta \operatorname{ch}(t-\delta)}, \quad (2.4)$$

$$\frac{v_0 dz}{dw} = \operatorname{cth} \frac{t}{2} \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{th} \frac{t-\xi_k}{2} \right)^{\alpha_k-1}. \quad (2.5)$$

Вторая из формул (2.2) остается неизменной, а первая и третья преобразуются следующим образом:

$$h = \frac{\varphi_0}{v_0} \pi e^{-\delta} \operatorname{ch} \delta, \quad h_L = \frac{\varphi_0}{v_0} \frac{\pi}{2} e^{-2\delta}, \quad (2.6)$$

С помощью первого равенства в (2.6) и соотношения

$$\frac{dz}{h dt} = \frac{1}{v_0 h} \frac{dz}{dw} \frac{dw}{dt}$$

найдем производную отображающей функции $z = z(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{h dt} &= \\ &= \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \delta \operatorname{ch}(t-\delta)} \prod_{k=1}^n \times \\ &\times \left(\operatorname{th} \frac{t-\xi_k}{2} \right)^{\alpha_k-1} = \\ &= F(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В формулах (2.5 и 2.7) неизвестными являются образы вершин полигона ξ_k , $k = \overline{1, n}$ и параметр δ – образ бесконечно удаленной точки I . Для определения этих неизвестных необходимо получить $n+1$ уравнение. Обозначим через l_j , $j = \overline{1, n-1}$ длины сторон $A_j A_{j+1}$ полигональной стенки. С помощью соотношения (2.7) получим

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi \operatorname{ch} \delta} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\operatorname{ch}^2(\xi/2)}{\operatorname{ch}(\xi-\delta)} \times \\ &\times \prod_{k=1}^n \left(\operatorname{th} \frac{|\xi-\xi_k|}{2} \right)^{\alpha_k-1} d\xi = \frac{l_j}{h}, \quad (2.8) \\ &j = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

Так как угол наклона натекающей струи задан, то должно выполняться условие

$$\arg \frac{v_0 dz}{dw} = \alpha_0 - \pi \quad \text{при } t = \delta + \pi/2 i. \quad \text{Отсюда с}$$

помощью формулы (2.5) получим еще одно уравнение

$$G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \delta) = \alpha_0, \quad (2.9)$$

где G – функция зависящая от параметров ξ_k и δ :

$$G = 2 \operatorname{arctg} e^\delta + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \left(\pi - 2 \operatorname{arctg} e^{\delta-\xi_k} \right)$$

Чтобы построить последнее $(n+1)$ -ое уравнение необходимо выразить расстояние s_h от начала координат до оси струи через параметры ξ_k и δ . Заметим, что любому набору этих параметров соответствует некоторая струя, натекающая на полигональную стенку с углами в вершинах $\alpha_k \pi$.

Обозначим угол наклона этой струи через α_c . Ясно, что $\alpha_c = G(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \delta)$. Выберем любую вершину A_m полигональной стенки и пусть x_m , y_m – координаты этой вершины в физической плоскости z . В плоскости t точки A_m и I соединим наклонным отрезком. Пусть

$\beta = \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\pi} (\delta - \xi_m) \right]$ есть угол отклонения этого отрезка от вертикали (фиг. 2в). Отрезку $A_m I$ в

плоскости t соответствует одноименная линия в плоскости z , имеющая асимптоту, наклоненную под углом α_c . Проведем в плоскости z из точки A_m луч с углом наклона α_c (см. фиг. 2г). Расстояние J этого луча до асимптоты линии $A_m I$ есть

$$J = \int_{A_m I} \operatorname{Im} \left[e^{-i\alpha_c} \frac{dz}{dt} dt \right],$$

где интегрирование ведется по отрезку $A_m I$ в плоскости t . Расстояние асимптоты линии $A_m I$ до

оси струи равно $\frac{\beta}{\pi} h$, так как при рассмотрении фиктивного течения в плоскости t с комплексным потенциалом $w(t)$ из угла β жидкость истекает в

количестве $\frac{\beta}{\pi} q$. Расстояние d от луча l до начала координат будет $d = \cos \alpha_c y_m - \sin \alpha_c x_m$.

Отсюда следует, что $s_h = d + J - \frac{\pi}{2} \beta h$. Искомое уравнение для определения отклонения s_h струи запишется в виде

$$\int_0^1 \text{Im} \left[z_d e^{-i\alpha_c} F(\xi_m + z_d \sigma) \right] d\sigma + \cos \alpha_c \frac{y_m}{h} - \sin \alpha_c \frac{x_m}{h} - \frac{\pi}{2} \beta = \frac{s_h}{h}, \quad (2.10)$$

где $z_d = \delta + \pi i / 2 - \xi_m$, а функция $F(t)$ определена формулой (2.7).

Система (2.8)-(2.10) есть замкнутая система нелинейных трансцендентных уравнений для определения параметров ξ_k и δ . Кроме уравнений (2.8)-(2.10) параметры ξ_k должны удовлетворять условию упорядоченности:

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n. \quad (2.11)$$

Решение системы было получено методом Ньютона. Ограничения (2.11) в итерациях метода Ньютона выполнялись с помощью замены переменных

$$u_k = \ln \frac{w_k - w_{k-1}}{w_{k+1} - w_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

где $w_0 = -1, w_{n+1} = 1, w_k = \frac{2}{\pi} \arctg \xi_k, k = \overline{1, n}$.

Набор новых переменных $u_k, k = \overline{1, n}$ является неупорядоченным, причем все u_k удовлетворяют неравенству $-1 < u_k < 1$. Для обратного перехода к упорядоченным переменным ξ_k необходимо решить систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей относительно неизвестных $w_k, k = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} -2 \text{ch} \frac{u_1}{2} w_1 + e^{u_1/2} w_2 = e^{-u_1/2}, \\ e^{-u_k/2} w_{k-1} - 2 \text{ch} \frac{u_k}{2} w_k + e^{u_k/2} w_{k+1} = 0, \\ k = \overline{2, n-1}, \\ e^{-u_n/2} w_{n-1} - 2 \text{ch} \frac{u_n}{2} w_n = -e^{-u_n/2}, \end{cases}$$

и после определения w_k найти $\xi_k = \text{tg} \frac{\pi w_k}{2}$. Итерации метода Ньютона проводились относительно переменных u_k . Аналогичные замены переменных были сделаны и в работах [6, 7].

3. Вычислительные аспекты

Решение системы нелинейных уравнений (2.8-2.10) при больших значениях числа углов n в полигоне является непростой задачей даже для современной вычислительной техники. В работе (3) систему типа (2.8)-(2.11) удалось решить для $n = 15$ на компьютере Sun 3 workstation. В настоящей работе мы увеличиваем количество углов до $n = 100$ и при этом не ограничиваемся расчетом

примеров, а проводим параметрические исследования.

Для решения системы (2.8)-(2.10) была составлена программа на языке Fortran 90. В первоначальном варианте для вычисления интегралов в уравнениях (2.8), (2.10) использовалась программа *QDAGS* из популярной библиотеки *IMSL*, а для решения системы нелинейных уравнений программа *NEQNF* из той же библиотеки. Первоначальный вариант работал, но крайне нестабильно. Максимальное число углов для первоначального варианта также не превосходило $n = 15$. С целью увеличения работоспособности численного метода был проведен ряд мероприятий, описанных ниже.

Подынтегральные функции в левых частях уравнений (2.8), (2.10) имеют степенные особенности на концах. В данной работе при вычислении интегралов каждый интервал интегрирования разбивался пополам и получалось два интеграла вида

$$\begin{aligned} I_L &= \int_a^b g(\xi)(\xi - a)^\alpha d\xi, \\ I_R &= \int_a^b g(\xi)(b - \xi)^\alpha d\xi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\alpha > -1$, а $g(\xi)$ – функции, дифференцируемые бесконечное количество раз. Функции $g(\xi)$ аппроксимировались кубическими сплайнами, а затем интегралы вычислялись аналитически. Такой способ оказался более надежным, чем применение программы *QDAGS*, основанной на квадратурных формулах Гаусса-Кронрода. Приведем здесь без вывода аналитические формулы для вычисления интегралов (3.1) с помощью сплайн-аппроксимаций. Пусть $u_k, k = \overline{1, N}$ – сетка узлов нанесенная на отрезок $[a, b]$:

$$u_1 = a < u_2 < u_3 < \dots < u_N = b,$$

а $g_k(\xi), \xi \in [u_k, u_{k+1}], k = \overline{1, N-1}$ – кубические полиномы, составляющие кубический сплайн, аппроксимирующий функцию $g(\xi)$ на $[a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} I_L &= Q_L + \frac{1}{d(\alpha+1)} \sum_{k=2}^{N-1} \times \\ &\times [g_k'''(u_k) - g_{k-1}'''(u_k)] \times \\ &\times (u_k - a)^{\alpha+4}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} I_R &= Q_R + \frac{1}{d(\alpha+1)} \sum_{k=2}^{N-1} \times \\ &\times [g_k'''(u_k) - g_{k-1}'''(u_k)] \times \\ &\times (b - u_k)^{\alpha+4}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} Q_L &= \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{d} [(\alpha^2 + 8\alpha + 18)g_{N-1}(b) - \\ &- (\alpha + 6)(b-a)g'_{N-1}(b) + \\ &+ (b-a)^2 g''_{N-1}(b) + \frac{6g_{N-1}(a)}{\alpha+1}], \end{aligned}$$

$$Q_R = \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{d} [(\alpha^2 + 8\alpha + 18)g_1(a) + (\alpha + 6)(b-a)g_1'(a) + (b-a)^2 g_1''(a) + \frac{6g_1(b)}{\alpha+1}],$$

$$d = 6 + (\alpha+1)(\alpha^2 + 8\alpha + 18).$$

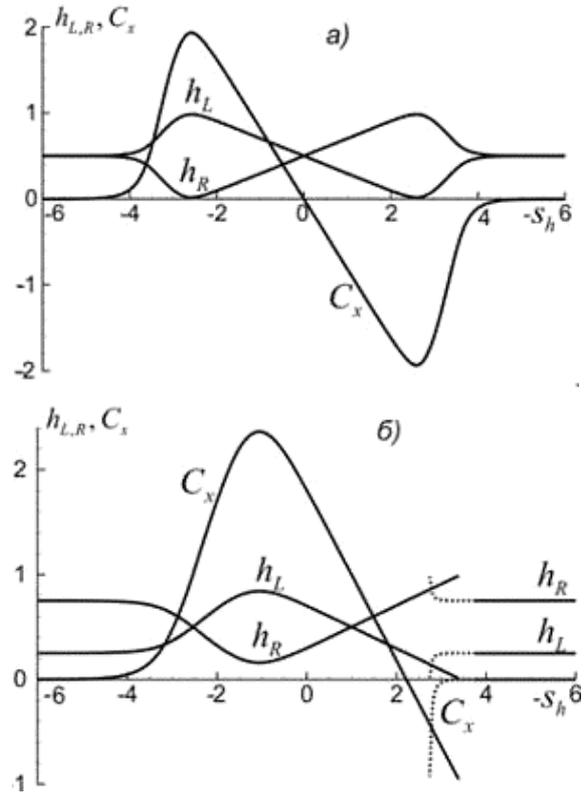
При вычислении по формуле (2.1) расстояния s_h начала координат от оси струи необходимо произвести выбор номера m угловой точки полигональной стенки A_m . Этот номер выбирался по следующему критерию. Среди точек ξ_k выбирались «хорошие» точки: точка считалась хорошей, если ее «соседи» – точки ξ_{k-1} и ξ_{k+1} лежат от ξ_k на расстоянии, превосходящем заданную величину ε . Такой выбор обусловлен тем обстоятельством, что если «соседи» находятся близко от ξ_m , то степенные особенности, которые имеет функция $dz/d\xi$ в этих соседних точках, усложняют ее поведение на интервале интегрирования. В расчетах принималось $\varepsilon = 0.5$. Если хороших точек нет, то просто полагалось $m = n/2$, хотя такой случай в расчетах не встретился ни разу. Среди хороших точек в качестве ξ_m бралась та, у которой значение модуля $|\xi_k - \delta|$ является наименьшим. Тем самым, мы избегаем длинного пути интегрирования по отрезку $A_m I$ в плоскости t (см. фиг. 2в).

В итерациях метода Ньютона Якобиан вычислялся по разностной формуле с использованием директив *OpenMP*, позволяющих эффективно распараллелить наиболее времязатратный процесс.

4. Числовые расчеты

Во всех приведенных ниже числовых примерах полагалось, что толщина основной натекающей струи $h = 1$, таким образом, все линейные размеры на графиках отнесены к h .

Пример 1. Попытаемся смоделировать известный опыт об устойчивом положении лежащего на горизонтальном дне шарика при падении на него сверху тонкой струи воды. Предполагается, что плоская струя при натекании на круговой цилиндр также должна приводить к устойчивому положению цилиндра. Круговой цилиндр заменяется на вписанную в него прямоугольную призму, в основании которой лежит правильный n -угольник, лежащий на горизонтальном дне на одной из граней. На фиг. 3а показаны зависимости толщин струй h_L и h_R слева и справа, а также коэффициента горизонтальной силы $C_x = R_x/(\rho v_0^2/2)$ от расстояния s_h оси струи до начала координат при угле наклона струи $\alpha_0 = 90^\circ$ и радиусе $R = 2$.



Фигура 3 - Зависимости параметров h_L , h_R и C_x от расстояния s_h для цилиндра радиуса $R = 2$.

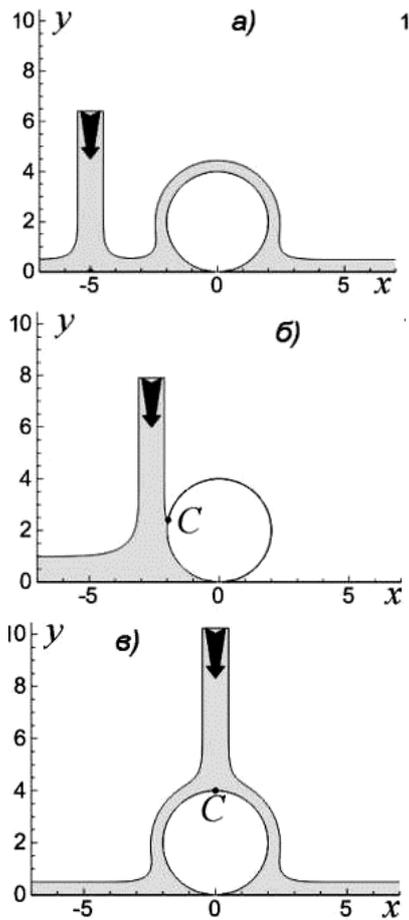
а) $\alpha_0 = 90^\circ$. б) $\alpha_0 = 120^\circ$.

Для большей наглядности параметр s_h отложен по оси абсцисс с обратным знаком, чтобы увеличение отложенной величины приводило к смещению струи вправо.

Расчеты были проведены при $n = 32$ и $n = 48$, и на фиг. 3а нанесены графики для обоих вариантов.

Визуально графики не различимы, следовательно, правильный 48-угольник достаточно точно аппроксимирует окружность. При $s_h = 0$ течение симметрично, и поэтому $C_x = 0$, горизонтальная сила на цилиндр не действует. Однако любое смещение оси струи вправо или влево приводит к возникновению горизонтальной силы, направленной в противоположную сторону. Отсюда вытекает, что при безотрывном обтекании цилиндра идеальной жидкостью он абсолютно неустойчив в струе. Картины течения для некоторых значений s_h показаны на фиг. 3.

Следует обратить особое внимание на фиг. 4б. Здесь при $s_h = 2.6$ мы получили почти предельный режим обтекания: правая струйка практически исчезла ($h_R = 0.016$), а левая имеет толщину $h_L = 0.984$, близкую к единице.

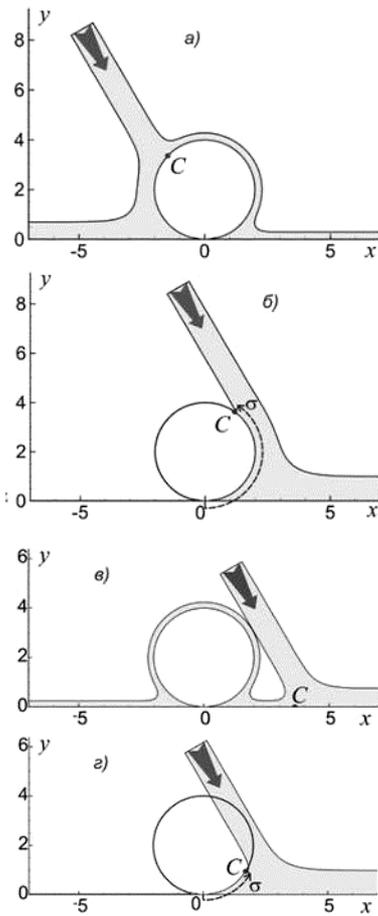


Фигура 4 - Картины натекания струи на цилиндр при $\alpha_0 = 90^\circ, R = 2$. а) $s_h = 5$. б) $s_h = 2.6$. в) $s_h = 0$.

Более сложная картина получается при угле наклона струи $\alpha_0 = 120^\circ$ (см. фиг. 3б, $n = 48$). Здесь $C_x = 0$ при $s_h \approx -2.22$, и любое смещение струи вправо или влево приводит к возникновению горизонтальной силы, выбрасывающей цилиндр из струи. Снова приходим к выводу об абсолютной неустойчивости цилиндра в струе.

Картины натекания струи на цилиндр показаны на фиг. 5.

Здесь мы смещали струю сначала слева направо до получения почти предельного режима, изображенного на фиг. 5б, а затем справа налево до почти предельного режима, показанного на фиг. 5д. Из фиг. 3б видно, что в диапазоне $s_h \in [-3.39, -2.74]$ решение задачи не единственно, однако одно из решений неоднолистно, и неоднолистные решения наблюдаются в диапазоне $s_h \in [-3.75, -2.74]$. Начальная стадия неоднолиственности, когда свободная поверхность IL начинает самопересекаться, показана на фиг. 5г. Кривые на фиг. 3б, соответствующие неоднолистным течениям, нарисованы пунктиром.

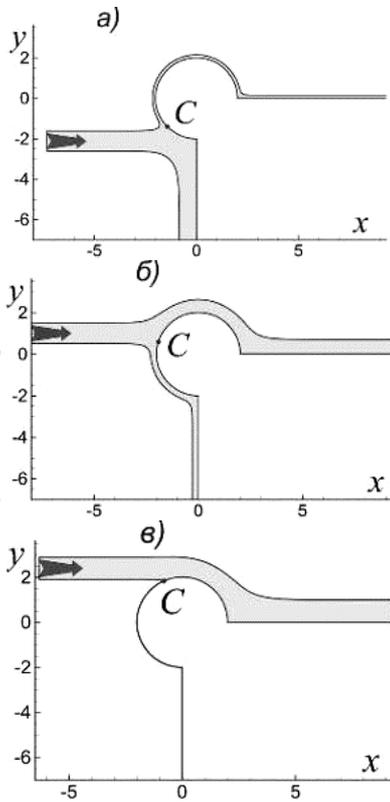


Фигура 5 - Картины натекания струи на цилиндр при $\alpha_0 = 120^\circ, R = 2$. а) $s_h = 0$. б) $s_h = -3.39$. в) $s_h = -3.75$. г) $s_h = -2.74$.

Отметим, что почти предельные режимы на фиг. 4б и фиг. 5 б, д невозможно рассчитать во введенной первоначально параметрической плоскости ζ . В самом деле, для течения, изображенного на фиг. 4б, параметр $\xi_n = 853.55$, а значит $a_n = \exp(\xi_n) = 4.92 \cdot 10^{370}$. Максимально возможное число компьютера при расчетах со стандартной двойной точностью $-1.80 \cdot 10^{308}$. Поэтому попытка провести аналогичный расчет в плоскости ζ приводит к неизбежному переполнению. Ситуация будет несколько иной для фиг. 5 б, д. Здесь $\xi_1 = -1024.8$ для фиг. 5б и $\xi_1 = -865.17$ для фиг. 5д. Значения $a_1 = \exp(\xi_1)$ будут, соответственно, $a_1 = 8.6 \cdot 10^{-466}$ и $a_1 = 1.83 \cdot 10^{-376}$, а минимально возможное число, которое компьютер может отличить от нуля равно $2.22 \cdot 10^{-16}$. Следовательно, параметр a_1 плоскости ζ сольется с нулем и расчет станет невозможным, так как у функции $d z/d \zeta = d z/d w \cdot d w/d \zeta$ появится неинтегрируемая особенность в точке $\zeta = a_1 = 0$. В связи со сказанным становится очевидной право-

мерность перехода от плоскости ζ к плоскости $t = \ln \zeta$.

Пример 2. Рассмотрим натекание струи на прямой угол, стороны которого соединены полигоном с числом угловых точек $n = 100$, равномерно распределенных по окружности радиуса $R = 2$. Угол наклона струи $\alpha_0 = 180^\circ$ (см. фиг. 6).



Фигура 6 - Картины натекания струи на прямой угол с круговым выступом при $\alpha_0 = 180^\circ$, $R = 2$.

а) $s_h = 2.12$. б) $s_h = -1$. в) $s_h = -2.39$.

Для этого примера $\alpha_L = \pi/2$, $s_L = 0$ и согласно формулам (1.1) и (1.2) в размерных переменных

$$R_x = R_y = \rho v_0^2 h_L,$$

$$M = \rho v_0^2 h [h_s + (h_R - h_L)/2],$$

причем эти формулы верны при любом способе соединения сторон угла.

Пусть

$$C_x = R_x / (\rho v_0^2 / 2h),$$

$$C_y = R_y / (\rho v_0^2 / 2h),$$

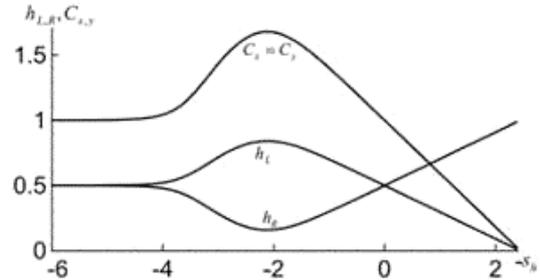
$$C_M = M / (\rho v_0^2 / 2h^2).$$

Тогда, если отнести все линейные размеры к ширине основной струи h , то

$$C_x = C_y = 2h_L, \quad C_M = 2h_s + h_R - h_L. \quad (4.1)$$

Таким образом, на стенку всегда действует сила, направленная вверх под углом 45° к оси OX .

Расчет проводился начиная от $s_h = 6$ с шагом по s_h равным -0.01 . Зависимости параметров h_L , h_R и $C_x = C_y$ от расстояния s_h показаны на фиг. 7, где по оси абсцисс отложен параметр s_h с обратным знаком.



Фигура 7 - Зависимости параметров h_L , h_R

и $C_x = C_y$ от расстояния s_h при натекании струи на прямой угол с круговым выступом

Картины течения показаны на фиг. 6. При $s_h = 2.12$ ширина $h_L = 0.84$ нижней струи максимальна и, соответственно, коэффициенты $C_x = C_y$ достигают максимальных значений (фиг. 6а). Режим, близкий к предельному, получился при $s_h = -2.39$ (фиг. 6в). Для этого режима нижняя струйка практически исчезла ($h_L = 0.011$), а сила, действующая на стенку почти нуль. Промежуточная картина при $s_h = -1$ показана на фиг. 6б.

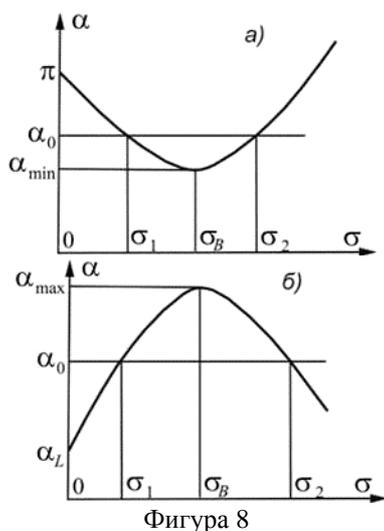
5. Об образовании предельных режимов

Предельные режимы натекания струи на стенку характеризуются полным исчезновением одной из струек, образующихся после разделения основной натекающей струи. Отметим, что графики на фиг. 3а и фиг. 3б имеют качественные отличия. На фиг. 3а функции непрерывны и однозначны, все соответствующие течения однолистные. На фиг. 3б у графиков имеется участок неоднозначности ($s_h \in [-3.39, -2.74]$) и участок, которому соответствуют неоднолистные режимы ($s_h \in [-3.75, -2.74]$). Следовательно, существует узкий интервал $s_h \in (-3.75, -3.39)$, на котором физически реализуемых однолистных решений не существует.

Возникает вопрос при каких формах стенки и углах наклона струи возможно образование предельных и неоднолистных режимов натекания. Чтобы на него ответить, рассмотрим течения на фиг. 5б, г. Предположим, что эти течения предельные ($h_L = 0$). В идеальной жидкости течения можно обратить, и тогда мы получим два режима обтекания лежащего на горизонтальном дне цилиндра струей конечной ширины h , набегающей на

цилиндр справа, с различными положениями точек отрыва C . Из теории струйного обтекания криволинейных препятствий хорошо известно, что точку отрыва можно расположить в любом месте на препятствии [3]. Будем характеризовать положение точки отрыва C длиной дуги σ омываемой части препятствия (фиг. 5б, г) и изменять σ . Каждому положению точки C соответствует некоторый угол α отклонения струи.

Рассмотрим функцию $\alpha = \alpha(\sigma)$. Ясно, что $\alpha(0) = \pi$ и с увеличением σ угол отклонения струи α будет убывать, достигнет минимума в некоторой точке $\sigma = \sigma_B$, а затем начнет возрастать. Схематично график функции $\alpha(\sigma)$ показан на фиг. 8а.



Фигура 8

Обозначим через $\alpha_{\min} = \alpha(\sigma_B)$ минимальное значение угла α . Тогда при $\alpha_0 < \alpha_{\min}$ уравнение $\alpha(\sigma) = \alpha_0$ не имеет корней, и режим с $h_L = 0$ невозможен. Если же $\alpha_0 > \alpha_{\min}$, то уравнение $\alpha(\sigma) = \alpha_0$ имеет два корня $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Следовательно, при некоторых s_h должны появиться два предельных режима с $h_L = 0$. Режимы, близкие к эти предельным, мы и видим на фиг. 5б,г.

О точке $\sigma = \sigma_B$, в которой функция $\alpha(\sigma)$ достигает минимума, следует сказать особо. В теории струйных и кавитационных течений известен недоказанный строго факт, впервые отмеченный Г.Ю. Степановым [13]: в точках гладкого отрыва Бриллюэна-Вилла [3] достигаются экстремумы гидродинамических характеристик. Этот факт был подтвержден и другими авторами [14-16]. Принимая его, приходим к выводу, что σ_B определяет точку гладкого отрыва, а α_{\min} – это угол отклонения струи для этой точки. Картины течений на фиг. 5б, г – это два классических режима обтекания криволинейного препятствия с отрывом струй. Для

режима б) точка отрыва находится выше точки гладкого отрыва Бриллюэна-Вилла (свободная поверхность не пересекает контур препятствия), а для режима г) – ниже (свободная поверхность пересекает контур препятствия).

Ситуация аналогична и для предельных режимов с $h_R = 0$ (фиг. 4б). Здесь функция $\alpha(\sigma)$ сначала растет до точки гладкого отрыва $\sigma = \sigma_B$, а затем начинает убывать (фиг. 8б). Максимальное значение угла α есть $\alpha_{\max} = \alpha(\sigma_B)$. Если $\alpha_0 > \alpha_{\max}$, то режим с $h_R = 0$ невозможен. Видимо, для течений фиг. 4 с $\alpha_0 = \pi/2$ величина α_{\min} близка к $\pi/2$, но все же $\alpha_{\min} > \alpha_0 = \pi/2$. В силу симметрии $\alpha_{\max} = \pi - \alpha_{\min} < \alpha_0 = \pi/2$. Поэтому неоднолистных решений для течений, соответствующих графикам фиг. 3а, не существует.

Заключение

В работе на основе классического подхода Н.Е. Жуковского и Дж.Х. Мичелла исследована задача о струйном натекании струи на полигональную стенку произвольной конфигурации. Успешно решена проблема параметров: число n угловых точек полигональной стенки в одном из примеров равно ста. Тем самым показано, что классический подход может успешно применяться и для исследования струйного обтекания криволинейных препятствий. Установлено, что при определенной конфигурации стенки задача может иметь два решения, одно из которых – неоднолистно. Выявлены предельные режимы течения, характеризующиеся полным исчезновением одной из струй, образующихся после разделения основной натекающей струи. Установлен критерий образования предельных и неоднолистных режимов натекания.

В рамках модели идеальной жидкости сделана попытка смоделировать известный опыт об устойчивом положении лежащего на горизонтальном дне шарика при падении на него сверху тонкой струи воды. При моделировании шарик заменяется круговым цилиндром, обтекаемым безотрывно. Численно показано, что любое смещение струи вправо или влево от положения действующей на цилиндр нулевой горизонтальной силы приводит к возникновению неравной нулю силы противоположного направления, что говорит об абсолютной неустойчивости цилиндра в струе при безотрывном обтекании. Отсюда можно сделать вывод, что для корректного математического моделирования условий опыта необходимо учитывать вязкость жидкости и вращение шарика при отклонении струи от положения нулевой горизонтальной силы.

Работа получила финансовую поддержку РФФИ, проекты 12-01-00996-а, 12-07-00007-а.

Литература

1. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в

двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока // Матем. сборник. 1890. Т. 15. Вып. 1. С. 121-278; см. также Собрание сочинений.

2. Michell J. H. On the theory of free streamlines // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1890. V. 181. P. 389-431.

3. Гуревич М. И. Теория струй идеально й жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.

4. Gilbarg D. Jets and cavities. *Encyclopedia of physics.* Berlin: Springer, 1960. Vol. 9. P. 311-445.

5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.

6. Elcrat A. R., Trethethen L. N. Classical free-streamline flow over a polygonal obstacle // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1986. V. 14. P. 251-265.

7. Dias F., Elcrat A. R., Trethethen L. N. Ideal jet flow in two dimensions // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 185. P. 275-288.

8. Levi-Civita T. *Scie e leggi di resistenza. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* 1907. V. 23. P. 1-37.

9. DeLillo T. K., Elcrat A. R., *Hu Ch. Computa-*

tion of the Helmholtz–Kirchhoff and reentrant jet flows using Fourier series. // *Applied Mathematics and Computation.* 2005. V. 163. P. 397–422.

10. Peng W., Parker D. F. An ideal fluid jet impinging on an uneven wall. // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 333. P. 231-255.

11. Yurbeau J., Weber R. Impinging free jets of ideal fluid. *J. Fluid Mech.* 1998. V. 372. P. 357-374.

12. Седов Л. И. *Механика сплошной среды.* Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.

13. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. М: Наука, 1990. 384 с.

14. Terentiev A.G., Dimitrieva N.A. Theoretical investigation of cavitating flows// *Proc. of 3rd Intern. Symp. on Cavitation.* Grenoble, France, 1998. V. 2. P. 275-280.

15. Маклаков Д.В., Наборова М.В. Кавитационное обтекание профиля произвольной формы// *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. No. 4. С. 86-90.

16. Маклаков Д.В., Фридман Г.М. Струйное обтекание пластины с интерцептором при наличии застойной зоны// *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. No. 4. С. 36-44.

IMMERSED INCLINED PLATE INTERACTION WITH INCOMING WATER WAVES

Ocheretyanny S.A., Prokofiev V.V., Takmazian A.K., Filatov E.V.

Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State university

1 Michurinsky ave, 119992, Moscow, Russia
prokof@imec.msu.ru, takmazian@gmail.com

Abstract

In the Research Institute of Mechanics of MSU proposed new type of wave propellers, which use the energy of breaking waves to propel vessel. As a model of such propeller we consider interaction of the incoming waves with immersed inclined rigid plate, which can move in horizontal direction perpendicular to the inclination axis and fixed in all other degrees of freedom. By lab and numerical tests there is shown presence of the effect of plate motion against waves. Average velocity of such motion for given wave properties is non-monotonically dependent on the plate immersion depth, inclination and the plate length. Two-dimensional non-stationary calculations were performed in XFlow™ package to simulate lab conditions. It was shown that with channel depth increase mean velocity is decreased. Glissade effect is discovered and studied: the plate when partially taken out of the water is speed up to definite constant velocity and moves in the direction of the waves above physically non-disturbed water surface. Numerically was shown independence of the average plate velocity on the plate mass. Lab and numerical test are in good agreement with each other.

Nomenclature

- A Wave amplitude
- F Plate drag force
- f Wave frequency
- H Channel depth
- h Plate upper edge excess over still water level
- L Plate length
- S Plate area
- V Plate average velocity
- ρ Water density
- ω Wave circular frequency = $2\pi f$

Introduction

Sea wave energy for long time is being used for human needs. One example is surf energy plants, which transform mechanical energy of the near-shore surf into electricity. In the first half of the 20th century, a way of direct wave energy usage was proposed, without any conversion from mechanical to any other type of energy [1]. The so-called wave propellers were represented by simple airfoils, pinned at its longitudinal axis to the forward part of the ship body below the waterline [2]. The airfoil could spin freely about the pin axis to certain positive degree and certain negative degree from horizontal position of its chord. The effect of thrust was produced because of the rolling motion of the ship and the resulting lift force emerging on the airfoil with horizontal component always directed forward, due to the attack angle limits.

Up to the end of the 20th century there was not known any devices that transformed wave water motion into motion of the ship without intermediate ship-rolling stage. In 1995 Yakimov & Yakimov [3] suggested simple mechanism, which used the elevation of the wave cusps to produce horizontal momentum to drag the ship. Yet they did not propose any proof that such idea will really work.

In 2010 by Prokofiev *et. al.* [4] this jet propeller was constructed and tested in the wave channel of the Institute of mechanics of MSU. The model consisted of an inclined plate, rigidly fixed on a trolley, which was able to move free in the direction of the plate incline (see Figs.1-2). The principle of work of such propeller was explained using both nonlinear wave theory (like theory of Gerstner waves) and the shallow water approach of higher degrees (the so-called Boussinesq approximation) derived by Nwogu in 1993 [5]. Later on the test were extended by numerical simulations, which allowed predicting the propeller behavior in wider range of parameters [6].



Figure 1 - General view of the experimental set-up: trolley with inclined plate in wave channel

In the present paper after quick review of the work done before on the topic by authors some new results are reported. They consist of analysis of an inclined plate behavior in tests compared to numerical simulations, and new laboratory tests with floating model of a catamaran in the wave channel with in-

clined plate installed between catamaran bodies to produce propelling effect.

1. Experiments With An Inclined Plate On A Trolley In The Wave Channel

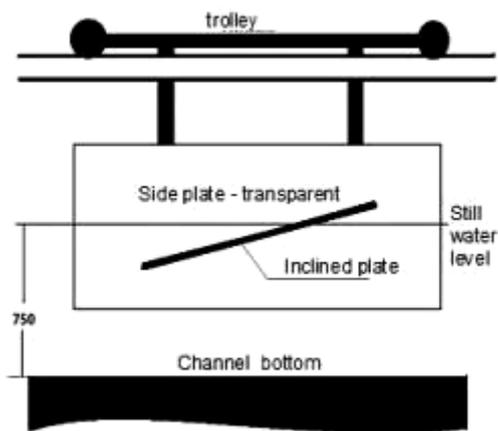


Figure 2 - Schematic side view of the trolley with inclined plate in wave channel

Very first experiments with inclined plate fixed on the rigid basement under the still water level in the wave channel demonstrated that wave behavior above the submerged plate is very much like the behavior of the surf wave over gradually sloping beach. Theoretical model from [5] of shallow water of high degree, known as Boussinesq approximation, was used in [4] to model 2D wave profiles, which coincide very closely to test ones, as seen in Fig.3, where plate of the length 1.25 m and incline of 10.5 degrees is shown in interaction with incoming wave of height 0.1m and frequency 1.14 Hz. Breaking wave energy and momentum were calculated from obtained profiles, using most simple breaking criterion: part of the calculated wave profile, where horizontal velocity exceeded wave peak celerity was considered involved in breaking process.

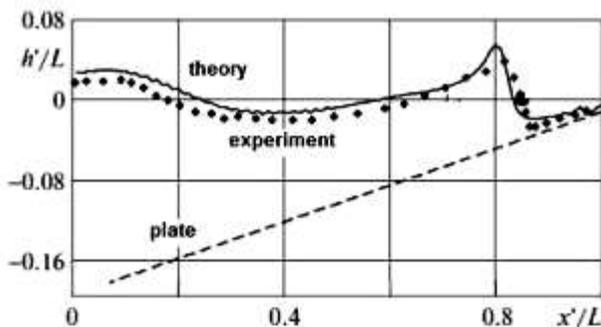


Figure 3 - Wave profiles above inclined plate: Boussinesq approximation and lab experiment

Though energy of wave breaking is one mechanism that produces momentum to drag the plate in direction opposite to the waves, there still exists another one. Let's consider non-linear wave in its most trivial form – Gerstner wave. For simplicity we will suppose its velocity field non-disturbed, what is not really true, but this level of accuracy is enough for the effect ex-

planation. Let's also suppose that the plate is vertical and its upper edge is at zero-level of the still water surface (Fig. 4).

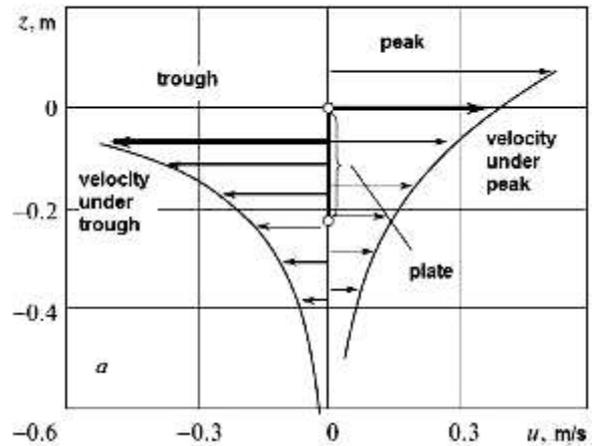


Figure 4 - Horizontal fluid velocity distribution in the wave: two opposite phases

Then, if we consider two opposite moments: when the plate is under wave peak and when it's under wave trough, we will find that, due to plate fixity in vertical direction, the total drag is greater in the latter case, when fastest particles, which always are on the water surface hit the plate. And, on the contrary, in the peak case the fastest particles miss the plate, going over it. Integrating over plate surface and calling forces F_{max} and F_{min} (with account for the sign) we can calculate the average plate velocity using formulae

$$V = k \sqrt{\frac{F_{avg}}{\frac{1}{2} C_x(\alpha) \rho S}}, \quad F_{avg} = \frac{|F_{max} + F_{min}|}{2},$$

where k is coefficient, responsible for non-steady motion.

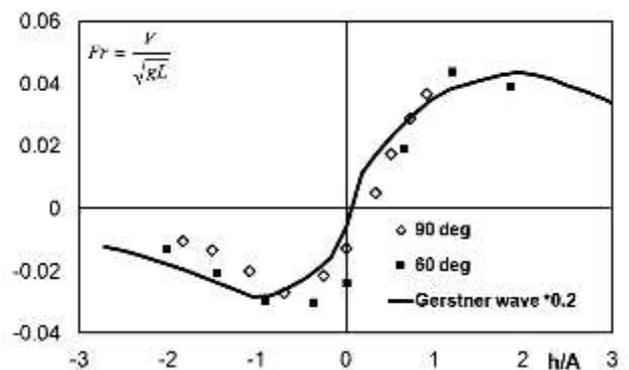


Figure 5 - Dimensionless plate velocity vs upper edge depth to wave amplitude ratio

Earlier in the wave-breaking approach this coefficient was found to be universal for different plates and equal 20%. If we substitute this value, we will obtain the curve shown in Fig.5, together with experimental data for plate for plate of 225 mm length and waves of 1.03 Hz and 110 mm height, with inclination angles of 60 and 90 degrees.

When the plate was partially up-drawn from the water, so its upper edge was higher than still water level, the plate totally changed its behavior and started to move in direction of the waves with almost constant velocity. The same would occur if one would have gradually decreased the inclination angle of the plate: the plate will change its motion from one against waves to one in direction of the waves. There can be detected a proportional dependency of plate velocity on particles with factor = 0.15, see Fig.6, where plate was $L = 1300$ mm long with 6.7° inclination angle and zero upper edge submersion. Channel depth was $H = 720$ mm. Note, that the curve $A \square$ is not straight line because of the amplitude dependence on frequency in experiments.

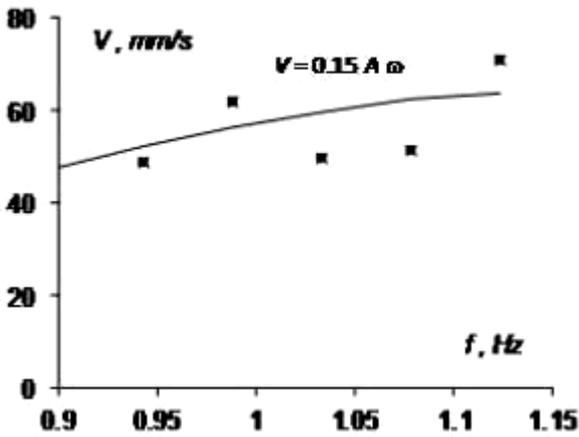


Figure 6 - Average plate velocity for motion in direction of waves

2. Numerical Simulations And Comparison To Test

To extend test results and validate the experimentally discovered effect the numerical calculations were performed, using test version of the XFlow™ package, produced by Next Limit Technologies® and used under test license distributed by MSC Software Corporation®. The package solver is based on the Lattice-Boltzmann method, which do not require any mesh, so it was able to simulate most complicated wave behavior including free surface self-touch and breaking. Also, numerical simulation allowed deeper insight into fluid-plate interaction, including measurements of bulk velocity and plate surface pressure distributions, total loads acting on the plate and total momentum flux across any control surface.

One of the main results obtained from the numerical simulation was independence of the plate motion effect existence on the wave channel depth and friction in the trolley wheels, which was impossible to establish by test. Another advantage of simulations was discovery of the independence of asymptotic (quasi-steady stage) plate velocity on the plate mass, which was as well hard to model in experiments. We varied plate mass by two orders of magnitude, seeing difference in the initial behavior only, as was expected by preliminary considerations.

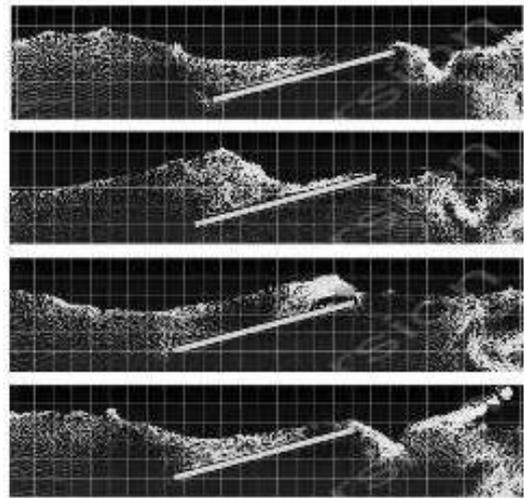


Figure 7 - Simulation in XFlow™: plate oscillate and gradually drifts against waves

Same as in the experiments, dependent on the plate submersion two different regimes of plate motion were detected in the simulations: 1) if totally submerged, the plate was moving against waves with oscillations about its average velocity (Figs.7-8), 2) if only partially submerged, the plate was gliding above almost non-disturbed water surface in the direction of the waves with velocity close to the wave celerity (Fig. 9).

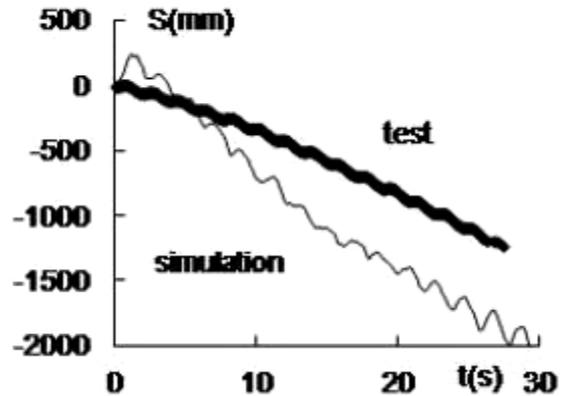


Figure 8 - Plate counter-wave motion law

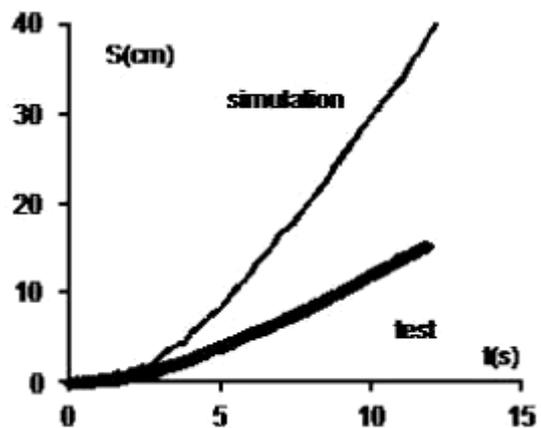


Figure 9 - Plate gliding-with-waves motion law

In the former case the plate was 1.3 m length, with incline 20° , plate upper edge exceed $h = 0$ mm, channel depth $H = 0.75$ m, wave frequency $f = 0.52$ Hz, wave amplitude $A = 35$ mm in the experiment, and wave frequency $f = 0.5$ Hz, and amplitude $A = 80$ mm in simulation. In the latter case plate was 1.3 m long, inclination angle was 7° , plate upper edge exceed $h = 36$ mm, channel depth $H = 0.75$ m, wave frequency $f = 0.8$ Hz, $A = 70$ mm in simulation, and $A = 62$ mm in test.

Considering the asymmetric driving mechanism described in section 1, one would expect that drag force will be proportional to particles velocity square, and, thus, the velocity of the plate – to just the particles velocity. Indeed, analyzing dependency of average plate velocity against waves on wave frequency (Fig. 10) we see that it is very close to proportionality law $V = 0.2 A \omega$, where $A \omega$ is velocity of the particles at the surface (in linear wave), and 0.2 is the same factor of proportionality, which was adopted to match experimental data with Gerstner wave analysis for vertical plate in section 1. On the Fig. 10 the plate and wave parameters were $L = 500$ mm, $H = 0.72$ m, $A = 80$ mm, $h = -32$ mm, inclination angle = 36° .

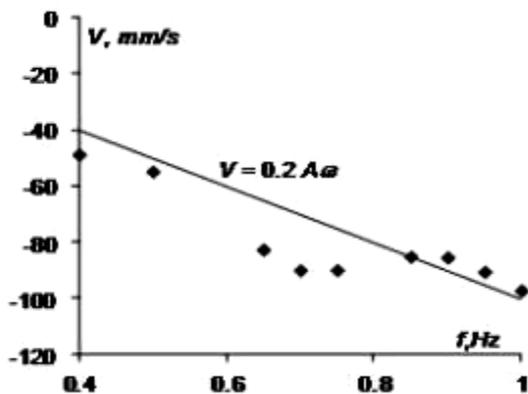


Figure 10 - Average plate velocity vs wave frequency compared to proportionality law

It is interesting to check how average plate velocity depends on frequency in simulation compared to tests. This is done in Fig. 11 for plate of $L = 1300$ mm, incline 20° , $h = 0$ mm, $H = 0.75$ m, waves of amplitude $A = 80$ mm in simulation, and variable A in experiments (since it was impossible to maintain constant amplitude with variable frequency in tests).

3. Catamaran With Inclined Plate In The Wave Channel

To test jet wave propelling effect on a really floating body, in Moscow Research Institute of Mechanics a catamaran model was constructed, see photo in Fig. 12. Catamaran bodies were made from foam plastic. Each body dimensions were $H \times W \times L = 0.247\text{m} \times 0.064 \text{ m} \times 6.111 \text{ m}$. As wave propeller between the catamaran bodies was installed a corrosion resistant 5 mm thick steel plate of length 0.5 m and width 1.0 m, inclined by angle 36° facing incoming waves.

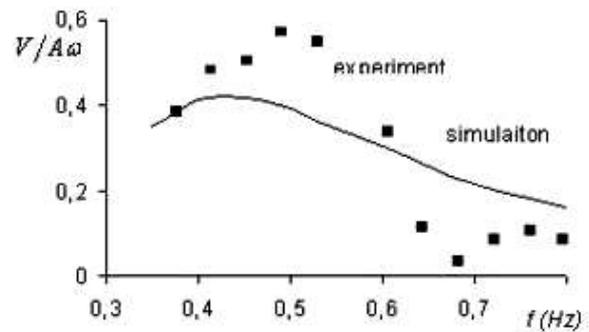


Figure 11 - Plate relative velocity in simulation and test



Figure 12 - Catamaran with jet-wave propeller is being lowered to the water surface in the channel

Comparison of the catamaran data (line) with the plate ones (circles in Fig. 13), for the same inclination angle of 36° and submersion of the upper edge of 32 mm for the plate and 20 mm for the catamaran shows close correspondence, especially in higher frequencies.

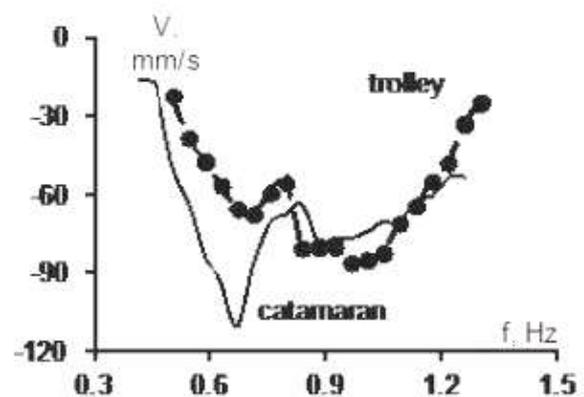


Figure 13 - Catamaran (line) and trolley (circles) average velocities comparison

Again, in lower frequencies, (that is if length of the plate is smaller than that of the waves, which is likely the case for sea waves), the catamaran tests showed that floating body equipped with plate jet-wave propeller is even more efficient than just rigidly fixed in vertical direction plate. The effect of increased functionality is generally due to catamaran

counter-phase vertical motion in respect to the wave. So, by this motion the vessel “automatically” reduces wave peak back-thrust and increases (when the plate is just slightly submerged, as usual) forward drag by wave trough, according to the scheme given in section 1.

Conclusions

1. By laboratory test and numerical simulations the effect of inclined plate motion against waves is demonstrated. Average plate velocity is non-monotonously dependent on the plate submerge depth, inclination angle and length. Plate velocity against waves is essentially dependent on the wavelength to the plate length ratio

2. Numerical simulations discovered fast gliding motion of the plate with constant velocity in the direction of waves. In this case the plate glides above almost still water. Experimental tests confirmed existence of the effect.

3. A catamaran vessel as a model of jet wave propeller is constructed and tested in the wave channel. First tests confirmed existence of the against-waves motion with average velocity even greater than for the rigidly fixed plate on a trolley.

This work was supported by Russian Fund of Basic Researches (project No 13-08-00413).

References

1. Pavlenko, G.E. Way of using ship rolling motion for movement of vessels. *Sudostroenie*. (in Russian) 1936. №6.
2. Jakobsen E. The foil propeller wave power for propulsion. // 2-nd Int. Symp. Of Wave and Tidal Energy BHRA Fluid Engineering. 1981.
3. Yakimov A.Yu., Yakimov Yu.L.. Vessel jet wave propeller // *Vestnik MSU* (in Russian). Ser.1. Matematika, mekhanika. 2005. № 4. p. 59-62.
4. Prokofiev, V.V., Takmazian A.K., Filatov E.V. Inclined plate self-motion against incoming waves // *Izv. RAS. Mekhanika Zhidkosti i Gaza* (in Russian). 2011. № 6. p. 43-55.
5. Nwogu O. An alternative form of the Bousinesq equations for nearshore wave propagation. // *J. Waterway, Port, Coast. Ocean Engng.* 1993. V. 119. P. 618-638.
6. S.A. Ocheretyany, V.V. Prokofiev, A.K. Takmazian, E.V. Philatov. Incoming waves interaction with immersed inclined plate: natural and numerical experiments // *Izv. RAS. Mekhanika Zhidkosti i Gaza* (in Russian). 2013. № 4. p. 27-33.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЛИССИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРА В КАВЕРНЕ

Парышев Э.В.

Филиал ФГУП ЦАГИ “Московский комплекс ЦАГИ”

105005, Россия, Москва, ул. Радио, 17
paryshev.emil@mail.ru

Аннотация

В рамках плоской задачи о погружении цилиндра в круговой полости [5] получено в аналитическом виде приближенное решение основного интегрального уравнения при произвольном соотношении между радиусом цилиндра и радиусом полости, предложен метод итераций для получения численных решений.

Дано решение плоской задачи об отрыве жидкости в случае удара круговой дужки в круговой полости.

Основные обозначения

ρ - плотность жидкости

φ - потенциал скоростей

$2B$ - угол раствора смоченной поверхности цилиндра

h - погружение цилиндра ниже невозмущенной границы каверны

R, r - радиусы каверны и цилиндра

$\varepsilon = R - r$ - кольцевой зазор между каверной и цилиндром

V_R - скорость сужения каверны

V_r - скорость расширения цилиндра

$\tilde{V}_R = V_R + V_r$

\tilde{V}, V_x, V_y - скорость удара и ее проекции

радиусом полости. Приведены некоторые результаты расчетов.

В настоящей работе получено в аналитическом виде приближенное решение основного интегрального уравнения для произвольного соотношения между радиусом тела и радиусом полости, предложен метод итераций для получения численных решений.

В рамках той же задачи [5] рассмотрен вопрос об отрыве жидкости при ударе дужки в круговой полости.

1. Решения интегрального уравнения

В [5] получено интегральное уравнение

$$2\bar{h} - (\bar{\varepsilon} + \bar{h})z = \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{1 - \sqrt{1 - (\bar{\varepsilon} + \bar{h})^2 f(2-f)}}{\sqrt{f(z-f)}} df, \quad (1)$$

дающее связь между погружением, зазором и смоченной шириной цилиндра. Здесь \bar{h} - погружение цилиндра, $\bar{\varepsilon}$ - круговой зазор между полостью и цилиндром, отнесенные к его радиусу r ; $z = 1 - \cos B$; $2B$ - угол раствора смоченной поверхности цилиндра (см. рис.1).

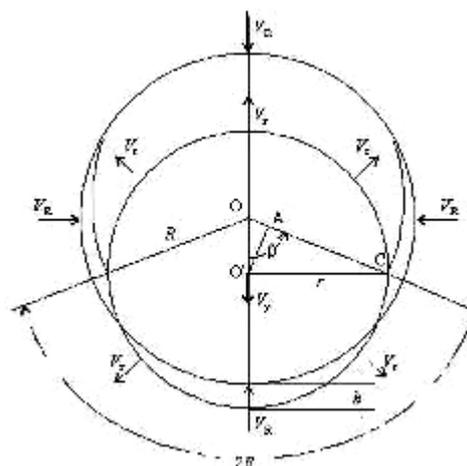


Рисунок 1

Введение

Решение вопросов глиссирования тела в значительной степени опирается на метод плоских поперечных сечений, предложенный Г.Е.Павленко в 1932 г. [1]. Метод плоских сечений был существенно развит в работах Г.В.Логвиновича [2], А.Б.Лотова [3], А.И.Тихонова, Г.К.Колосова [4] и др. В основе этого метода лежит решение плоской задачи о погружении в воду профиля, образующегося в плоскости поперечного сечения глиссирующего тела.

В ряде случаев глиссирование происходит по возмущенной поверхности воды, например, при движении второго редана гидросамолета в следе от первого редана, при глиссировании тела в каверне и др.

Для последнего случая в [5] было дано решение плоской задачи об ударе и погружении кругового цилиндра через цилиндрическую поверхность жидкости. Было получено интегральное уравнение, дающее связь между погружением цилиндра и его смоченной шириной, и дано решение для предельного случая малых зазоров между телом и жидкостью.

В [6, 7] дополнительно рассмотрен вопрос о решении основного интегрального уравнения при произвольном соотношении между радиусом тела и

На рис. 2 дана схема вспомогательной задачи о косом ударе круговой дужки (эквивалентная дужка EA - проекция смоченной поверхности цилиндра на границу каверны).

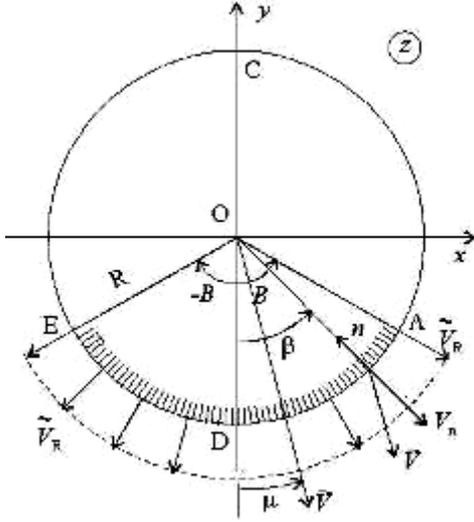


Рисунок 2

Полудлина дужки $S = RB$, R - радиус полосты. В безразмерном виде

$$\bar{S} = \frac{S}{r} = (1 + \bar{\epsilon})B.$$

Для предельного случая малых зазоров в [5] дано решение уравнения (1):

$$\cos B = \frac{\epsilon - h}{\epsilon + h}. \quad (2)$$

Ниже предлагаются решения уравнения (1) при произвольном соотношении между радиусом цилиндра и радиусом полосты.

1.1. Численное решение

Интегральное уравнение (1) обладает неравномерной по z корректностью численных решений. В зависимости от $\bar{\epsilon}$ верхний предел интеграла (1), т.е. параметр z , меняется от 0 (при $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$) до 2 (при $\bar{\epsilon} \rightarrow 0$). При малых z интервал интегрирования становится неудовлетворительным.

Для выравнивания интервалов интегрирования при различных $\bar{\epsilon}$ введем параметр $Z = z(1 + \bar{\epsilon})^2$ и новую переменную интегрирования $F = f(1 + \bar{\epsilon})^2$. Уравнение (1) примет вид:

$$2\bar{h} - \frac{(\bar{\epsilon} + \bar{h})Z}{(1 + \bar{\epsilon})^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^z \frac{1 - \sqrt{1 - (\bar{\epsilon} + \bar{h})^2 (2 - F / (1 + \bar{\epsilon})^2) F / (1 + \bar{\epsilon})^2}}{\sqrt{F(Z - F)}} dF. \quad (3)$$

При малых $\bar{\epsilon}$ порядок интервала сохраняется, при больших $\bar{\epsilon}$ восстанавливается до величин $Z \approx \frac{1}{2} \bar{S}^2 \rightarrow O(1)$.

Метод итераций. Запишем уравнение (3) в виде

$$\bar{h} = \frac{(\bar{\epsilon} + \bar{h})Z}{2(1 + \bar{\epsilon})^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{1 - \sqrt{1 - (\bar{\epsilon} + \bar{h})^2 (2 - F / (1 + \bar{\epsilon})^2) F / (1 + \bar{\epsilon})^2}}{\sqrt{F(Z - F)}} dF. \quad (4)$$

$$= \Phi(\bar{h})$$

Решение уравнения (4) представим в виде $\bar{h} = \bar{h}_0 + \Delta$, где \bar{h}_0 - начальное приближение, Δ - поправка. При малых Δ уравнение (4) можно представить в виде $\bar{h}_0 + \Delta = \Phi(\bar{h}_0) + \Phi'(\bar{h}_0)\Delta$, где

$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{h}}$ - производная по \bar{h} . Отсюда находим

$$\Delta = \frac{\Phi(\bar{h}_0) - \bar{h}_0}{1 - \Phi'(\bar{h}_0)} \text{ и } \bar{h} = \frac{\Phi(\bar{h}_0) - \Phi'(\bar{h}_0)\bar{h}_0}{1 - \Phi'(\bar{h}_0)}.$$

Последнее дает формулу итераций:

$$\bar{h}_{i+1} = \frac{\Phi(\bar{h}_i) - \Phi'(\bar{h}_i)\bar{h}_i}{1 - \Phi'(\bar{h}_i)}. \quad (5)$$

Производная Φ' имеет вид

$$\Phi'(\bar{h}) = \frac{1}{(1 + \bar{\epsilon})^2} \times$$

$$\left[\frac{Z}{2} + \frac{\bar{\epsilon} + \bar{h}}{\pi} \times \int_0^z \frac{(2 - F / (1 + \bar{\epsilon})^2) \sqrt{F} dF}{\sqrt{Z - F} \sqrt{1 - (\bar{\epsilon} + \bar{h})^2 (2 - F / (1 + \bar{\epsilon})^2) F / (1 + \bar{\epsilon})^2}} \right].$$

Расчеты показали хорошую сходимость метода: до 7-12 значащих цифр при умеренном числе итераций (от 1-2 до 4-5). Заметим, что в процессе итераций можно также корректировать величину Z (при необходимости - величину $\bar{\epsilon}$).

Сравнение численных решений с точными.

Уравнения (1) и (3) позволяют выделить два предельных случая, имеющих точные решения:

- 1) погружение цилиндра через горизонтальную поверхность жидкости ($\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$),
- 2) погружение цилиндра в «тесной» каверне ($\bar{\epsilon} \rightarrow 0$).

Величина погружения при любых $\bar{\epsilon}$ имеет порядок $\bar{h} = o(1)$.

В первом случае из (3) получается выражение $\bar{h} = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{1 - \sqrt{1 - 2F}}{\sqrt{F(Z - F)}} dF$, которое легко приводится к

известному решению В.А. Соколова для горизонтальной поверхности

$$\bar{h} = 1 - \frac{2}{\pi} E(\bar{c}), \quad (6)$$

где $E(\bar{c}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \bar{c}^2 s^2}}{\sqrt{1 - s^2}} ds$ - полный эллиптический

интеграл второго рода, $2\bar{c} = 2c/r = 2\bar{S}$ - смоченная ширина цилиндра.

Второй случай рассмотрен в [5]. При $\bar{\epsilon}, \bar{h} \rightarrow 0$ правая часть уравнения (1) имеет второй

порядок малости в сравнении с левой частью. Пренебрегая малыми второго порядка, получим $2\bar{h} - (\bar{\varepsilon} + \bar{h})z = 0$, откуда следует решение (2).

Для предельного случая $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ удобно ввести новую переменную $H = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \bar{h}$. Тогда из (2) получим

$$\cos B = \frac{1 + \bar{\varepsilon} - H}{1 + \bar{\varepsilon} + H} \rightarrow \frac{1 - H}{1 + H}. \quad (7)$$

В случае $\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$ (погружение через горизонтальную поверхность) $H = \bar{h}$.

На рис. 3 и 4 дано сравнение численных решений методом итераций с точными решениями для двух предельных случаев. Сплошными линиями показаны точные решения, отдельными точками – численные.

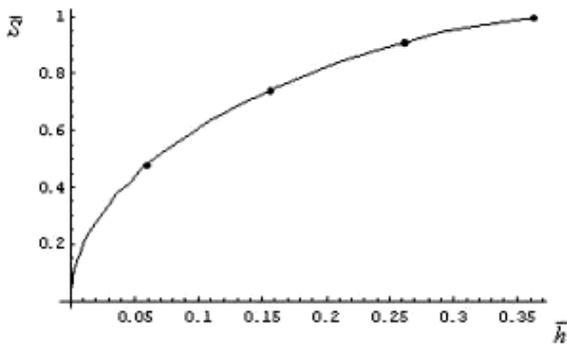


Рисунок 3

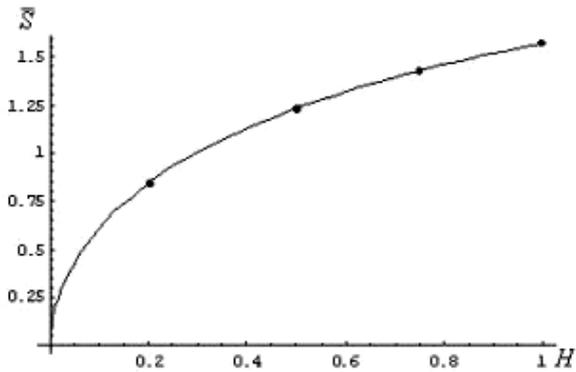


Рисунок 4

На рис. 3 приведена зависимость $\bar{S}(\bar{h})$ для первого случая ($\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$): точное решение по формуле (6), численный расчет при $\bar{\varepsilon} = 10000$. На рис. 4 дана зависимость $\bar{S}(H)$ для второго случая ($\bar{\varepsilon} = 0$): точное решение по формуле (7), численный расчет при $\bar{\varepsilon} = 0.01$. Совпадение результатов очевидно.

1.2. Приближенное аналитическое решение.

Представим радикал в правой части (1) тремя членами ряда:

$$1 - \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon} + \bar{h})^2 f(2-f) - \frac{1}{8}(\bar{\varepsilon} + \bar{h})^4 f^2(2-f)^2.$$

Подставляя в (1), после интегрирования получим:

$$2\bar{h} - (\bar{\varepsilon} + \bar{h})z = (\bar{\varepsilon} + \bar{h})^2 \left(z - \frac{3}{8}z^2 \right) + \frac{(\bar{\varepsilon} + \bar{h})^4}{512} z^2 (192 - 160z + 35z^2).$$

В разложении правой части по z ограничимся членами второго порядка включительно:

$$2\bar{h} - (\bar{\varepsilon} + \bar{h})z = (\bar{\varepsilon} + \bar{h})^2 \left(z - \frac{3}{8}z^2 \right) + \frac{3}{8}(\bar{\varepsilon} + \bar{h})^4 z^2.$$

Решение этого уравнения

$$z = 4 \frac{1 - \sqrt{1 - 3\bar{h}(1 - \bar{\varepsilon} - \bar{h}) / (1 + \bar{\varepsilon} + \bar{h})}}{3(\bar{\varepsilon} + \bar{h})(1 - \bar{\varepsilon} - \bar{h})}$$

является приближенным решением интегрального уравнения (1). Отсюда получаем приближенную формулу для смоченной полуширины цилиндра

$$\bar{S}(\bar{\varepsilon}, \bar{h}) = (1 + \bar{\varepsilon}) \times \arccos \left(1 - 4 \frac{1 - \sqrt{1 - 3\bar{h}(1 - \bar{\varepsilon} - \bar{h}) / (1 + \bar{\varepsilon} + \bar{h})}}{3(\bar{\varepsilon} + \bar{h})(1 - \bar{\varepsilon} - \bar{h})} \right). \quad (8)$$

Результаты расчетов приведены на рис.5 для значений $\bar{\varepsilon} = 0.01, 0.04, 0.1, 0.3, 1, 10$ (сверху вниз):

- 1) по формуле (8) - сплошными линиями,
- 2) численные решения уравнения (1) - отдельными точками.

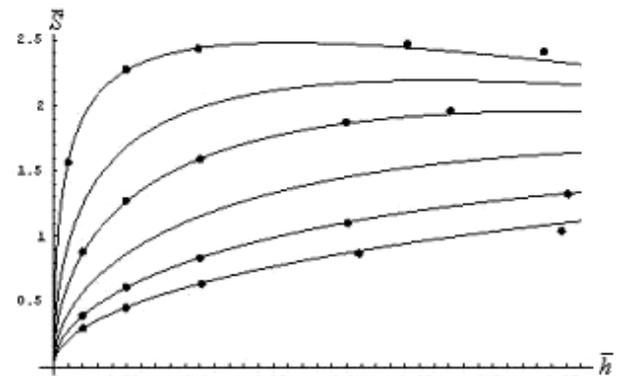


Рисунок 5

Совпадение результатов хорошее.

«Универсальная» переменная и упрощенное приближенное решение. В [6, 7] было отмечено,

что переменная $H = \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}} \bar{h}$ приводит все семейство кривых $\bar{S}(\bar{\varepsilon}, \bar{h})$ с параметром $0 \leq \bar{\varepsilon} < \infty$ практически к единой зависимости $\bar{S}(H)$. На рис. 6 представлены точные решения для двух предельных случаев, приведенные к координате H : $\bar{\varepsilon} = 0$, формула (7) – верхняя кривая и $\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$, формула (6) – нижняя кривая. Остальные решения должны располагаться между ними.

Заметим, что решение (6) существует только до значения $\bar{h} \approx 0.36338$, которому соответствует подъем жидкости до горизонтального диаметра цилиндра. Переменная H при малых $\bar{\varepsilon}$ может достигать неограниченных значений.

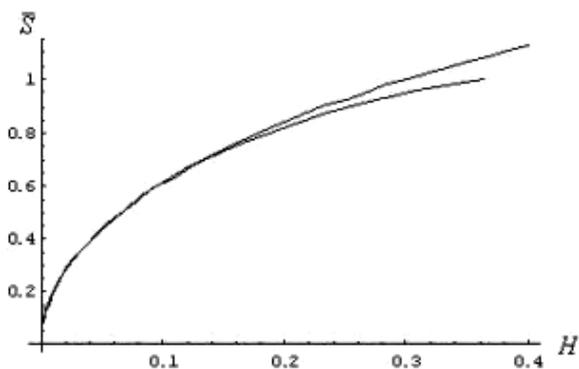


Рисунок 6

На рис.7 кривые рис.6 дополнены точками, отображающими численные решения уравнения (3) при значениях $0.01 \leq \bar{\varepsilon} \leq 10000$.

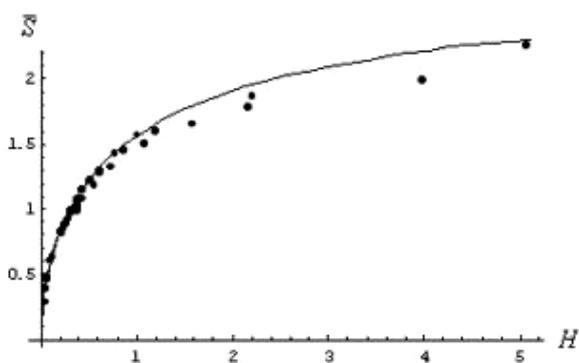


Рисунок 7

Диапазон координаты H увеличен до $0 \leq H \leq 5$. Точки располагаются вблизи кривой $\bar{S}(H) = \arccos \frac{1-H}{1+H}$ (предельный случай $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$), которую можно принять как приближенную аппроксимацию для всей совокупности решений $\bar{S}(H)$.

Возвращаясь к переменной \bar{h} , получим упрощенное приближение

$$\bar{S}(\bar{\varepsilon}, \bar{h}) = \arccos \frac{\bar{\varepsilon} - \bar{h}(1 + \bar{\varepsilon})}{\bar{\varepsilon} + \bar{h}(1 + \bar{\varepsilon})},$$

которое улучшается поправками:

$$\bar{S}(\bar{\varepsilon}, \bar{h}) = \arccos \frac{\bar{\varepsilon} - \bar{h}(1 + \bar{\varepsilon} - h/3)}{\bar{\varepsilon} + \bar{h}(1 + \bar{\varepsilon} + h/3)}. \quad (9)$$

Расчет по формуле (9) и численные решения показаны на рис.8 (сплошными линиями и отдельными точками, соответственно) для значений параметра $\bar{\varepsilon} = 0.01; 0.04; 0.1; 0.3; 1; 10$ (сверху вниз).

2. Отрыв жидкости при ударе круговой дужки в круговой полости.

Л.И. Седовым [8] была решена задача о горизонтальном ударе плавающей вертикальной пластинки с отрывом жидкости на ее задней стороне.

Область отрыва определяется условием $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < V_n$ и

$\varphi = 0$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ - нормальная скорость жидкости,

V_n - нормальная скорость точек пластинки.

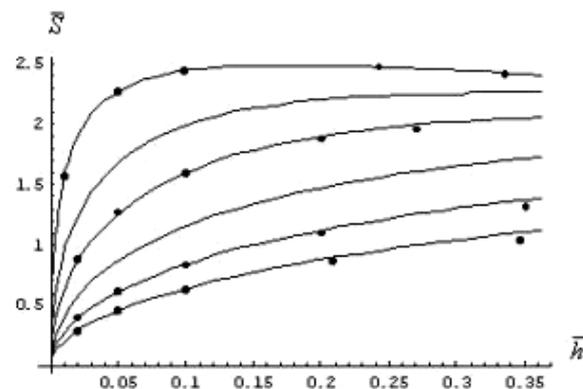


Рисунок 8

Ниже рассматривается вопрос об отрыве жидкости в случае удара круговой дужки в круговой полости.

2.1. Условия отрыва.

В [5] рассмотрена задача о косом ударе расширяющейся круговой дужки в круговой полости (см. рис.2). Скорость радиального удара $\vec{V}_R = V_R + V_r$, скорость поступательного удара $\vec{V} = V_x - iV_y$. Для определенности будем считать, что горизонтальная скорость всегда направлена по оси Ox .

Получены потенциал скоростей на дужке ($|\beta| \leq B$) и нормальные скорости жидкости на свободной поверхности ($|\beta| > B$):

$$\varphi = -2R \left[V_x \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \beta/2 - \cos^2 B/2} + V_y \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \beta/2 - \cos^2 B/2} - \frac{\vec{V}_R}{2} \ln \frac{\cos \beta/2 - \sqrt{\cos^2 \beta/2 - \cos^2 B/2}}{\cos \beta/2 + \sqrt{\cos^2 \beta/2 - \cos^2 B/2}} \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_x \left(-\sin \beta \pm \cos \frac{\beta}{2} \frac{1 - 2\cos^2 \beta/2 + \cos^2 B/2}{\sqrt{\cos^2 B/2 - \cos^2 \beta/2}} \right) + V_y \left(-\cos \beta \pm \sin \frac{\beta}{2} \frac{2\cos^2 \beta/2 - \cos^2 B/2}{\sqrt{\cos^2 B/2 - \cos^2 \beta/2}} \right) + \vec{V}_R \left(-1 \pm \frac{\sin \beta/2}{\sqrt{\cos^2 B/2 - \cos^2 \beta/2}} \right). \quad (11)$$

Здесь β - текущая угловая координата, знак «-» берется при $\beta < 0$.

Условия безотрывного удара. При симметричном ударе (по оси Oy вниз) и радиальном расширении дужки потенциал на смоченной поверхности везде отрицателен, импульсивные давления $p_i = -\rho\varphi > 0$. При чисто боковом ударе (по оси Ox

вправо) потенциал на передней стороне отрицательный, на задней стороне дужки - положительный. Последнее формально означает появление отрицательных импульсивных давлений, что на самом деле не реализуется, а свидетельствует о наличии отрыва жидкости. При комбинированном ударе (вертикальный, горизонтальный удар и расширение дужки) возможно течение как с отрывом, так и без отрыва жидкости.

Отсутствие отрыва на дужке определяется условием: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \geq V_n$ в крайней левой точке дужки

E . При $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n$ в этой точке происходит отрыв жидкости. Определим необходимые для этого условия.

Скорость точки E по нормали к дужке равна $V_n = V_x \sin B - V_y \cos B - \tilde{V}_R$. Нормальная скорость жидкости в этой точке определяется формулой (11) при $\beta = -B$. Из условия отрыва в точке E получаем

$$0 = \frac{V_y \cos^2 B/2 - V_x \sin B/2 \cdot \cos B/2 + \tilde{V}_R}{\sqrt{\cos^2 B/2 - \cos^2 \beta/2}} \sin \frac{B}{2},$$

$$\beta \rightarrow -B$$

что возможно только при

$$V_y \cos^2 B/2 - V_x \sin B/2 \cdot \cos B/2 + \tilde{V}_R = 0. \quad (12)$$

В целом отсутствие отрыва на дужке определяется неравенством

$$(V_y \cos B/2 - V_x \sin B/2) \cos B/2 + \tilde{V}_R \geq 0.$$

Заметим, что одна из скоростей V_y, \tilde{V}_R может быть отрицательной (скорости принимаются положительными в сторону жидкости).

Отрыв при чисто боковом ударе. Рассмотрим чисто боковой (горизонтальный) удар симметричной дужки с углом раствора $2B$ (рис. 2). Скорость удара $V_x > 0$, скорости $V_y = \tilde{V}_R = 0$. Примем, что отрыв жидкости на задней стороне дужки происходит в точке с угловой координатой $-C$ от нижней точки дужки D . Определим величину C .

Формулы (10) и (11) для потенциала и нормальной скорости получены для симметричного расположения дужки. Вследствие отрыва смоченная поверхность дужки становится несимметричной, и требуется приведение ее параметров к симметричной конфигурации. Очевидны следующие соотношения:

а) полуширина симметричной дужки

$$B' = \frac{B+C}{2},$$

б) ось симметрии повернута на угол

$$\beta_0 = \frac{B-C}{2} \text{ против часовой стрелки,}$$

в) новая угловая координата

$$\beta' = \beta - \beta_0,$$

г) скорости удара

$$V'_x = V_x \cos \beta_0, \quad V'_y = V_x \sin \beta_0.$$

Нормальные скорости будем считать положительными к центру полости. Скорость точки $-C$ по нормали к дужке равна $V_n = V_x \sin C$. Нормальная скорость жидкости в этой точке определяется формулой (11) при $\beta' = -B'$. Из условия отрыва

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n$ в точке $-B'$ получаем

$$0 = \frac{V_x \sin B' \sin(\beta_0 - B'/2)}{2\sqrt{\cos^2 B'/2 - \cos^2 \beta'/2}}, \quad \beta' \rightarrow -B',$$

что дает, по аналогии с предыдущим,

$$\sin(\beta_0 - B'/2) = \sin \frac{B-3C}{4} = 0.$$

Отсюда находим $C = \frac{B}{3}$. При этом потенциал

в точке $-C$ обращается в нуль.

Таким образом, при чисто боковом (горизонтальном) ударе симметричной дужки с углом раствора $2B$ отрыв жидкости происходит на задней стороне дужки на угловом расстоянии $-B/3$ от ее нижней точки.

На рис. 9 и 10 дан расчет отрыва при чисто боковом ударе; $V_x = 1, B = 75^\circ, C = 25^\circ$.

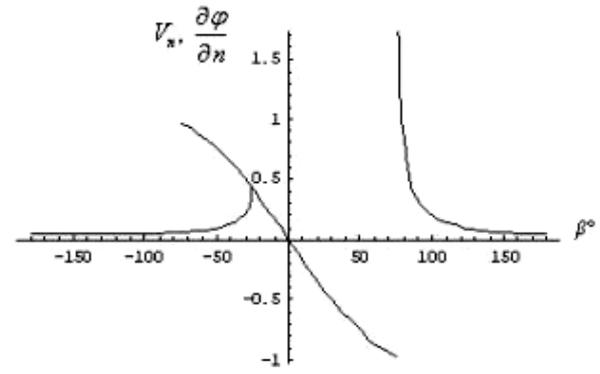


Рисунок 9

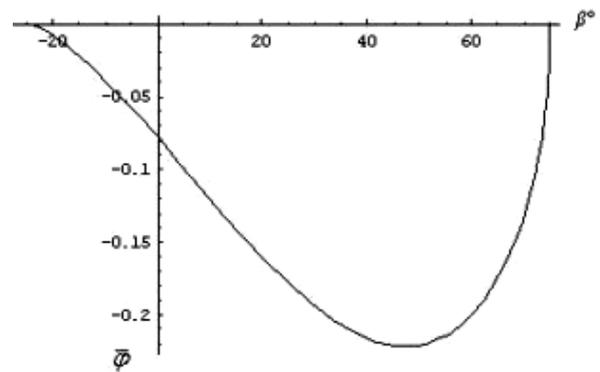


Рисунок 10

Окружность развернута на горизонтальную ось. На рис. 9 приводятся нормальные скорости дужки V_n (кривая, проходящая через начало координат) и скорости жидкости $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (две боковые кривые). Видно, что в точке $\beta = -25^\circ$ $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n$, а левее

ее $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < V_n$, т.е. жидкость отстает от дужки. Кривая

в правой части рисунка дает типичную картину нормальных скоростей на свободной поверхности при ударе. На рис.10 показано распределение без-

размерного потенциала $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{2RV}$ по поверхности

дужки. Видно, что потенциал всюду только отрицательный, в том числе на замытом участке задней стороны, и равен 0 в зоне отрыва.

Общий случай отрыва. Условие (12) позволяет определить положение отрыва на дужке в зависимости от скоростей удара и расширения.

Представим скорости удара в виде $V_x = V \cos \alpha$, $V_y = V \sin \alpha$, где α - угол (положительный по часовой стрелке) между направлением оси Ox и вектором скорости. Тогда условие (12) можно записать в виде

$$\sin(\alpha - B/2) \cos B/2 + \bar{V}_R = 0, \quad (13)$$

где $\bar{V}_R = \frac{\tilde{V}_R}{V}$. Величина угла α зависит от выбора системы координат.

Свяжем направление вектора скорости $\vec{V} = V_x - iV_y$ непосредственно с дужкой, а именно, с касательной, проведенной к дужке в ее передней точке A . Вектор \vec{V} повернут по часовой стрелке на угол $\alpha = \arctg \frac{V_y}{V_x}$ относительно оси

Ox и на угол $A = B + \alpha$ относительно данной касательной. Угол A инвариантен к системе координат и определяет направление удара по отношению к дужке.

Подставляя $\alpha = A - B$ в (13), получим

$$\sin(A - \frac{3B}{2}) \cos \frac{B}{2} + \bar{V}_R = 0. \quad (14)$$

При заданных характеристиках скоростей A и \bar{V}_R уравнение (14) дает смоченную ширину $2B$, т.е. угловое расстояние точки отрыва от передней кромки дужки.

На рис.11 показаны зависимости $2B(A)$ при значениях радиальной скорости $\bar{V}_R = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0$ (сверху вниз). Видно, что с увеличением угла A и радиальной скорости смоченная зона увеличивается, отрыв удаляется от начала дужки.

В рассмотренном выше случае бокового удара $\bar{V}_R = 0$, $A = 75^\circ = 1.309$. Из графиков рис.11 находим смоченную ширину $2B \approx 1.7 = 97.4^\circ$.

2.2. Присоединенные массы при отрыве.

Решение плоской задачи об ударе круговой дужки, необходимое для решения задачи о погружении, само по себе дает некоторое представление о течении и силах, действующих на тело. Распределение потенциала скоростей (10) позволяет определить импульсивные силы и присоединенные массы, в том числе с учетом отрыва жидкости.

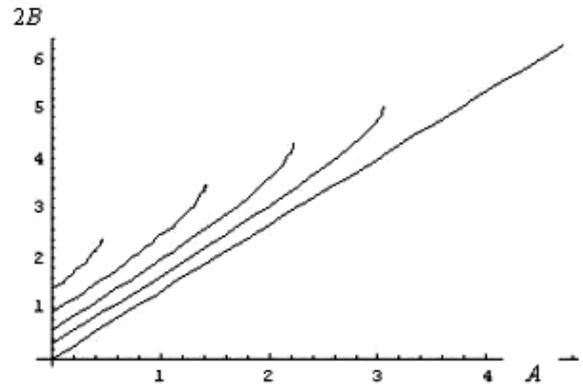


Рисунок 11

Течение без отрыва. Рассмотрим сначала течение без отрыва, при котором суммарный потенциал (10) везде на дужке отрицательный.

В силу свойств симметрии импульсивная сила, действующая на дужку при вертикальном ударе и радиальном расширении, направлена по вертикали вверх, а при боковом ударе – в сторону отрицательной оси Ox . Эти силы имеют вид ($\varphi_x, \varphi_y, \varphi_R$ - составляющие потенциала (10))

$$\begin{aligned} P_x &= 2\rho R \int_0^B \varphi_x(\beta) \sin \beta d\beta = -\rho\pi R^2 V_x \sin^4 \frac{B}{2}, \\ P_y &= -2\rho R \int_0^B [\varphi_y(\beta) + \varphi_R(\beta)] \cos \beta d\beta = \\ &= \rho\pi R^2 \sin^2 \frac{B}{2} \left[\left(1 + \cos^2 \frac{B}{2}\right) V_y + 2\tilde{V}_R \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда находим присоединенные массы:

$$\begin{aligned} m_x^* &= \frac{P_x}{V_x} = \rho\pi R^2 \sin^4 \frac{B}{2}, \\ m_y^* &= \rho\pi R^2 \left(1 - \cos^4 \frac{B}{2}\right), \\ m_R^* &= \rho\pi R^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{B}{2} \end{aligned}$$

В случае «тесной» каверны, используя формулу (2), получим выражения присоединенных масс через осадку h и зазор ε :

$$\begin{aligned} m_x^* &= \rho\pi R^2 \frac{h^2}{(\varepsilon + h)^2}, \\ m_y^* &= \rho\pi R^2 \frac{2\varepsilon + h}{(\varepsilon + h)^2} h, \\ m_R^* &= \rho\pi R^2 \frac{2h}{\varepsilon + h} \end{aligned}$$

Боковой удар. При чисто боковом ударе ($V_y, \tilde{V}_R = 0, V = V_x > 0$) необходимо учитывать отрыв жидкости на задней стороне дужки. Если передняя сторона дужки имеет угловой размер B , то на задней стороне будет замыв протяженностью $B/3$. Смоченная полуширина эквивалентной симметричной дужки равна $B' = 2B/3$, ось симметрии повернута на угол $B/3$ против часовой стрелки, угловая координата $\beta' = \beta - B/3$, скорости удара

$V'_x = V \cos \frac{B}{3}$, $V'_y = V \sin \frac{B}{3}$. Для симметричной дужки согласно (15) получим:

$$P'_x = -\rho\pi R^2 V \cos \frac{B}{3} \sin^4 \frac{B}{3},$$

$$P'_y = \rho\pi R^2 V \sin \frac{B}{3} \left(1 - \cos^4 \frac{B}{3}\right).$$

Для исходной дужки при боковом ударе с отрывом

$$P_x^{omp} = P'_x \cos \frac{B}{3} - P'_y \sin \frac{B}{3} =$$

$$= -\rho\pi R^2 V \sin^4 \frac{B}{3} (1 + 2 \cos^2 \frac{B}{3}),$$

$$P_y^{omp} = P'_x \sin \frac{B}{3} + P'_y \cos \frac{B}{3} = \rho\pi R^2 V \frac{1}{4} \sin^3 \frac{2B}{3}.$$

На рис. 12 представлены кривые

$$-\bar{P}_x(B) = -\frac{P_x}{\rho\pi R^2 V}, \quad -\bar{P}_x^{omp}(B), \quad \bar{P}_y^{omp}(B),$$

расположенные в указанном порядке сверху вниз. Видно, что отрыв жидкости на задней стороне дужки сравнительно слабо влияет на импульсивную силу P_x (и присоединенную массу m_x^*). Также при боковом ударе с отрывом появляется присоединенная масса m_y^* .

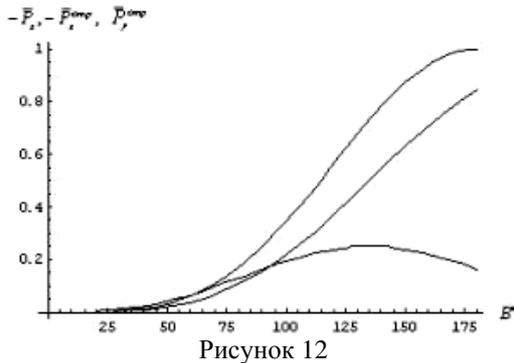


Рисунок 12

Общий случай удара с отрывом. Рассмотрим теперь комбинированный удар с отрывом, когда присутствуют все три скорости V_x , V_y , \tilde{V}_R . Угол полураствора дужки B , вектор скорости $\vec{V} = V_x - iV_y$ составляет угол α с осью Ox (положительный по часовой стрелке).

Пусть отрыв жидкости начинается на задней стороне дужки в точке с угловой координатой $\beta = -C$, $C < B$. Тогда задача сводится к безотрывному удару симметричной дужки $-C \leq \beta \leq B$, имеющей угол полураствора $B' = \frac{B+C}{2}$ и ось сим-

метрии Oy' , повернутую на угол $\beta_0 = \frac{B-C}{2}$ против часовой стрелки. Вектор скорости образует с осью Ox' угол $\alpha' = \alpha + \beta_0$. Соответственно, про-

екции скорости равны $V'_x = V \cos(\alpha + \beta_0)$ и $V'_y = V \sin(\alpha + \beta_0)$. С учетом сказанного, используя (15), имеем для симметричной дужки

$$P'_x = -\rho\pi R^2 V \cos(\alpha + \beta_0) \sin^4 \frac{B'}{2},$$

$$P'_y = \rho\pi R^2 V \sin(\alpha + \beta_0) \left(1 - \cos^4 \frac{B'}{2}\right) +$$

$$+ \rho\pi R^2 \tilde{V}_R \cdot 2 \sin^2 \frac{B'}{2}$$

Возвращаясь к системе координат xOy , получим

$$P_x = P'_x \cos \beta_0 - P'_y \sin \beta_0 =$$

$$= -\rho\pi R^2 V \sin^2 \frac{B'}{2} \left[\cos \alpha \sin^2 \frac{B'}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \sin \beta_0 \left(\sin(\alpha + \beta_0) \cos^2 \frac{B'}{2} + \frac{\tilde{V}_R}{V} \right) \right],$$

$$P_y = P'_x \sin \beta_0 + P'_y \cos \beta_0 =$$

$$= \rho\pi R^2 V \sin^2 \frac{B'}{2} \left[\sin \alpha \sin^2 \frac{B'}{2} + \right.$$

$$\left. + 2 \cos \beta_0 \left(\sin(\alpha + \beta_0) \cos^2 \frac{B'}{2} + \frac{\tilde{V}_R}{V} \right) \right].$$

Величины B' и β_0 определены выше.

Литература

1. Павленко Г.Е. Основы теории глиссирования. Труды НИИ ГВФ, 1932.
2. Логвинович Г.В. Погружение тел в жидкость, удар и глиссирование. Труды ЦАГИ, вып.707, 1958.
3. Лотов А.Б. Глиссирование и быстрый вход тел в воду. МФТИ, М., 1984.
4. Тихонов А.И., Колосов Г.К. Гидродинамические характеристики плоскокилеватых пластин при установившемся глиссировании и при косом входе в воду с постоянной скоростью и постоянным углом приведения. Сборник работ по гидродинамике, М., изд. ЦАГИ, 1959.
5. Paryshev E.V. The plane problem of immersion of an expanding cylinder through a cylindrical free surface of variable radius // Int. Summer Sci. School «High Speed Hydrodynamics», June 2002. Cheboksary, Russia. P. 277-283.
6. Васин А.Д., Парышев Э.В. Погружение цилиндра в жидкость через цилиндрическую свободную поверхность. // МЖГ, 2001, №2.
7. Paryshev E.V., Vasin A.D. Immersion of a cylinder in a fluid through a cylindrical free surface // Fluid Dynamics. Vol.36. No 2. 2001. P. 169-177.
8. Л.И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., 1966, с. 189 – 196.

PREDICTION OF MANEUVERING OF SUPERCAVITATING VEHICLE

Volodymyr N. Semenenko

National Academie of Sciences of Ukraine, Institute of Hydromechanics

8/4, Zhelyabov str., 03680 Kyiv-180, Ukraine
Semenenko@ipnet.kiev.ua

Abstract

A method of analysis of arbitrary 3D motion of a self-propelled guided supercavitating vehicle has been developed. It consists in computer simulation of this motion, plotting the motion paths, and calculating the radii of turning circles. Both course and depth maneuvering the supercavitating vehicle is considered. The comparative analysis of efficiency of applying three control strategies for the maneuvering the supercavitating vehicle is given: the rotary disk cavitator having two degrees of freedom, the vectoring thrust, and the hydrodynamic cavity-piercing rudders (fins). Effect of the body mass center position on the supercavitating body dynamics is investigated. Estimations of efficiency of the cavity-piercing rudder application for both the supercavitating vehicle depth and course maneuvering are given. A problem on optimal position of rudders on the supercavitating vehicle is investigated.

Nomenclature

x, y, z are the vehicle mass center coordinates
 F is the force
 I_x, I_y, I_z are the moments of inertia about axes
 L is the vehicle length
 m is the vehicle mass
 M is the moment
 V is the velocity
 α is the angle of attack
 β is the sliding angle
 δ_y, δ_z are the angles of the cavitator inclination
 δ'_y, δ'_z are the angles of the thrust vector deflection
 δ_{fv}, δ_{fn} are the angles of the fin deflection
 ω is the angular velocity
 θ is the roll angle
 φ is the yaw angle
 ψ is the pitch angle
 σ is the cavitation number
 χ is the trajectory course angle
 ϑ is the trajectory depth angle

Introduction

A problem of control and maneuverability of the high-speed supercavitating vehicles (HSSV) remains currently actual. Last years a lot of papers were devoted to this problem (see for example [1–7]). Our works [8–12] give a description of the approximation mathematical model of motion of supercavitation bodies, which is based on the *G.V. Logvinovich's* principle of independence of expansion of unsteady supercavity [13]. Basing on this mathematical model, we developed methods of numerical calculation and computer simulation of arbitrary 3D motion of self-propelled guided HSSV. Partial cases of the HSSV motion – longitudinal and lateral motion were investigated, and problems on stability and stabilization of the longitudinal motion and problem on course maneuverability of HSSV were

considered in works [8, 9]. In this case control of the HSSV motion by the cavitator inclination (δ -control) and by deflecting the propulsor thrust vector (η -control) was considered.

This paper gives comparative analysis of the maneuverability of self-propelled HSSV (see Fig. 1) at the δ -control and η -control, and also with the help of hydrodynamic cavity-piercing rudders (f -control).

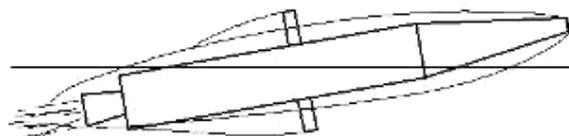


Figure 1 - Scheme of a guided self-propelled HSSV

All calculations below were performed with the **SC_Vehicle** software (the last version of the **SC_Design** software [14]).

1. Mathematical Model

During elaborating the mathematical model of arbitrary motion of the HSSV one accepts the main assumptions:

- 1) body has a shape of a slender body of revolution;
- 2) the cavitator is a disk with diameter D_n ;
- 3) transversal sections of the unsteady cavity maintains a circular shape during motion;
- 4) a time dependence of all acting forces is supposed to be quasistationary.

The mathematical model of the 3D motion of the HSSV includes:

- a complete set of equations of 3D dynamics of axisymmetric solid body in the body coordinate system $Ox_1y_1z_1$;
- an equation of expansion of the unsteady supercavity section [15] and relations for bending the cavity axis at presence of the cavitator inclination, the

fin deflection, and under the influence of the gravity in the flow coordinate system $Ox_0y_0z_0$;

– relations for calculation of components of the force on the cavitator \vec{F}_n , the force on the fins \vec{F}_f , and the planing force \vec{F}_s and their moments in the body coordinate system.

This mathematical model based on the principle of independence of expansion of supercavity sections takes into consideration main features of the unsteady supercavitating motion in natural way -- the ‘‘cavity memory’’ and lagging response of the cavity to perturbations. The known *E.V.Paryshev's* formulae [16] are applied to calculate transversal components of the planning force in the case of 3D body motion in the cavity. All the equations and calculated formulae of this mathematical model are given in our works [8–11].

2. Calculation Model

The main parameters of the HSSV calculation model and the starting motion parameters are given in Table 1 and Table 2. The symbols and dimensions in tables are: L is the vehicle length (m); D_b is the maximal hull diameter (mm); D_n is the cavitator diameter (mm); m is the vehicle mass (kg); $\bar{x}_c = x_c/L$ is the distance from the cavitator to the vehicle mass center; $I_z = I_v$ and I_x are the moments of inertia relatively to axes of the body coordinate system Oz_1 , Oy_1 and Ox_1 , respectively ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$); V_0 is the starting velocity (m/s); H_0 is the starting depth (m); σ is the cavitation number; $Fr = V_0/\sqrt{gD_n}$ is the *Froude* number; F_x is the complete drag (KN); L_c is the cavity length (m). The sketch of the calculation model is shown in Fig. 2.

Table 1 - Main parameters of the calculation model

L	D_b	D_n	M	\bar{x}_c	I_z	I_x
5	340	70	600	0.6	900	8

Table 2 - Starting parameters of the calculation model motion

V_0	H_0	σ	Fr	F_x	L_c
120	5	0.02	144.8	23.05	6.55

One supposes during calculation of the HSSV dynamics that when $t < 0$, it moves horizontally on the depth H_0 with the constant velocity V_0 under the fixed propulsor thrust F_{pr} in the regime of natural or artificial supercavitation. When $t \geq 0$, the control of the HSSV motion is realized by means of δ -control, η -control and/or f -control.

The most part of time the HSSV moves planning by its transom along the lower cavity wall for compensating the vehicle weight. In this case the HSSV must be balanced, *i.e.* a sum of all the forces acting and also a sum of their moments relatively to the mass center must be equal to zero. From here balanced magnitudes

of the pitch angle ψ^* , the cavitator inclination angle δ_z^* , and the propulsion vector deflection η_z^* are obtained (see [9]). Table 3 gives the balanced magnitudes of the angles ψ and δ_z calculated for the model when $\eta_z = 0$ for a number of the mass center locations \bar{x}_c .

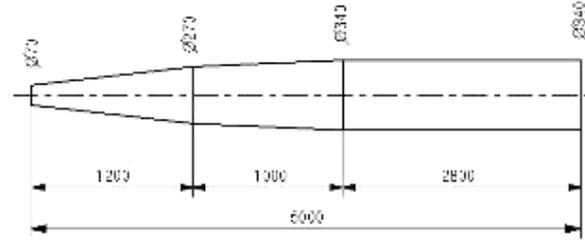


Figure 2 - Sketch of the HSSV calculation model

Table 3 - Balanced angles ψ and δ_z (degrees)

\bar{x}_c	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
ψ^*	0.3956	0.3807	0.3659	0.3515	0.3371
δ_z^*	-10.290	-8.765	-7.264	-5.782	-4.289

As is known, the longitudinal motion of the balanced HSSV is unstable. As it is shown in [8], the HSSV has fundamental frequencies of angular oscillation depending non-linearly on the mass center position \bar{x}_c . In this case the δ -control and/or η -control may ensure automatic stabilization of the HSSV motion ‘‘on the average’’ and its depth maneuvering.

The efficiency of course and depth maneuvering of the HSSV is characterized by the path angles $\vartheta = \psi - \alpha$ and $\chi = \varphi - \beta$, by the speeds of their variation:

$$\dot{\vartheta} = V(s) \frac{d\vartheta}{ds}, \quad \dot{\chi} = V(s) \frac{d\chi}{ds}, \quad (1)$$

where s is the arc coordinate along the path of the HSSV mass center, and also by values of the radii of turning circle $R_{tz} = ds/d\vartheta$ and $R_{ty} = ds/d\chi$.

3. Dynamics Of Hssv At δ -Control And η -Control

Results of calculation of the 3D maneuvering of the HSSV model when $\delta_z = -5.223^\circ$, $\delta_y = 3^\circ$ are given in Figs. 3-6.

After short transient part the model moves performing nonlinear spatial oscillation within the unsteady cavity. The phase-plane portrait $\alpha(\beta)$ is shown in Fig 3. Trajectories of a center of the model transom section (curve 1) and a center of the respective cavity section (curve 2) in the flow coordinate system are plotted in Fig. 4. As one can see, the oscillations of the model and cavity in the flow coordinate system may be considered as steady, and the cavity oscillation amplitude exceeds the model oscillation amplitude.

Since the HSSV motion is usually accompanied by angular oscillation, then one accepts as the maneuverability characteristics average magnitudes of angles of the trajectory of the vehicle mass center ϑ_m and

χ_m , and the speeds of their variation – angular velocities of turning $\dot{\vartheta}_m$ and $\dot{\chi}_m$. Then the radius of the HSSV turning circle on course is equal to $R_{ty}(s) = ds/d\chi_m$.

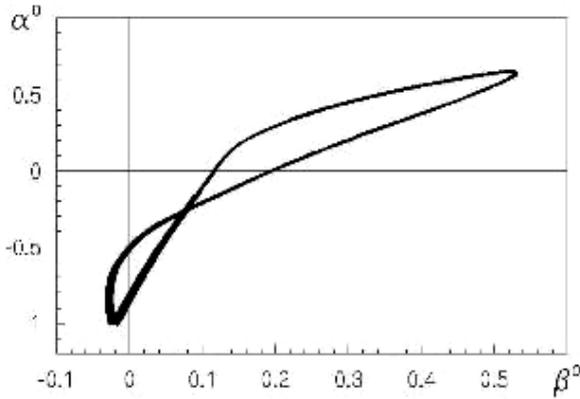


Figure 3 - Phase-plane portrait $\alpha(\beta)$ at 3D maneuvering of the HSSV

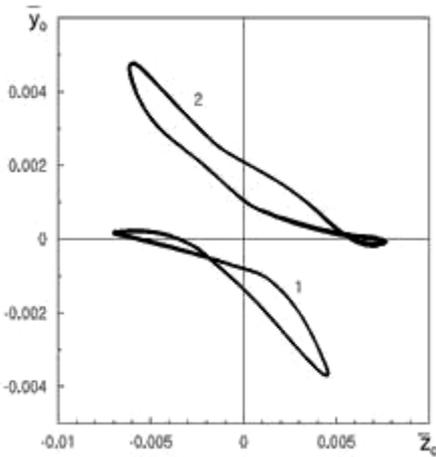


Figure 4 - Trajectories of the transom section center (curve 1) and the cavity section center (curve 2)

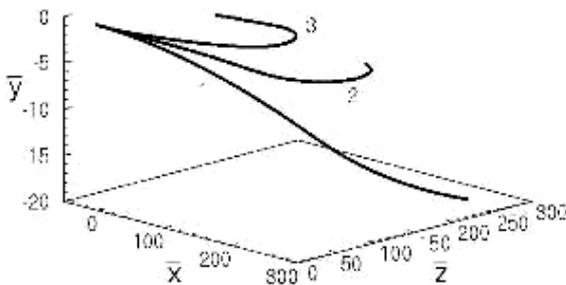


Figure 5 - Path configurations of the HSSV model at 3D maneuvering:

Fig. 5 shows the 3D path configurations of the HSSV model in the fixed coordinate system $Oxyz$. The calculation parameters are: distance $\bar{S} = 400$; $\delta_z = -5^\circ$; curve 1 – $\delta_y = 5^\circ$; curve 2 – $\delta_y = 10^\circ$; curve 3 – $\delta_y = 15^\circ$. Table 4 gives corresponding magnitudes of the angular velocity of turning $\dot{\chi}_m$ ($^\circ/c$), the radius of

turning circle $\bar{R}_{ty} = R_{ty}/L$, and the depth deviation of the model mass center $\bar{y} = y/L$ at the distance end.

Table 4 - Motion parameters at the end of distance for the path configurations in Fig. 5

δ_y	2°	5°	10°	15°
$\dot{\chi}_m$	-1.705	-5.190	-9.567	-13.451
\bar{R}_{ty}	815.31	248.12	140.31	104.65
\bar{y}	-27.507	-18.057	-8.725	-4.099

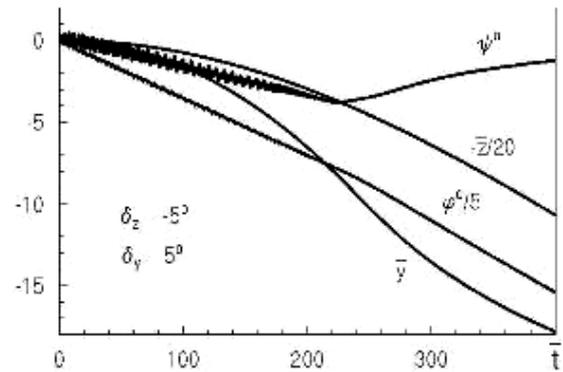


Figure 6 - History of 3D motion of the HSSV at δ -control

As one can see, with increasing the angle δ_y not only the angular velocity of course-turning of the HSSV increases, but the depth deviation of its trajectory decreases. The 3D effects in the HSSV motion are developed in this interaction of the longitudinal and lateral motion components. When course-turning the model transom oscillates near the left or right cavity wall. With increasing the angle δ_y the maximal immersion of the model transom in the cavity wall h increases as well, and this leads to increasing the friction drag F_{sx} and, as a result, to decreasing the motion velocity, and also to damping the model and cavity oscillations (see Fig. 6, there $\bar{t} = tV_0/L$ is the dimensionless time).

It was shown in [8-10] that η -control as the δ -control may be applied for the HSSV depth stabilization and depth maneuvering. However, η -control is ineffective for the HSSV course maneuvering (as *G.V.Logvinovich* said: “It is impossible to guide of HSSV by a transom”).

4. Evaluation Of The Hssv Fin Action

As the calculation showed, possibilities of the δ -control of the HSSV motion on course have restrictions in values of reachable radii of turning circles [11]. One considers a possibility of application of traditional hydrodynamic surfaces – cavity-piercing rudders (the f -control) for this purpose.

Action of the hydrodynamic rudders as control performances of the HSSV motion has a number of specific peculiarities (see for example [17, 18]), which are insufficiently investigated at present. In particular,

a problem on optimal disposition of rudders along the HSSV hull was not considered.

We consider an effect of action of the hydrodynamic rudders when the HSSV maneuvers separately on course and depth in simplified formulation using the mathematical models of the longitudinal motion and the lateral motion [8, 9]. A pair of the symmetric horizontal rudders creating the lift force F_{fy} (see Fig. 7, a) serves for depth maneuvering in the longitudinal motion. A pair of the symmetric vertical rudders creating the lateral force F_{fz} (see Fig. 7, b) serves for course maneuvering in the lateral motion.

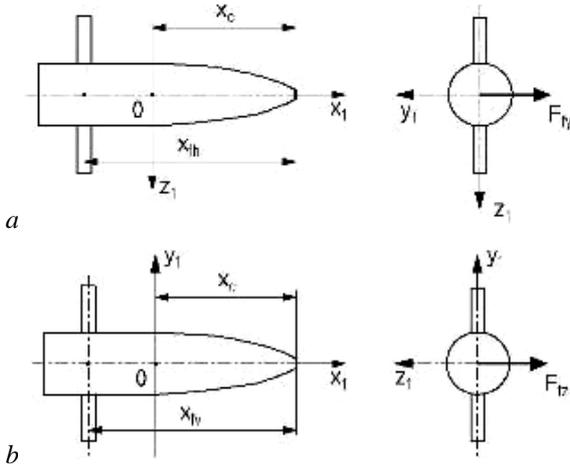


Fig. 7. Scheme of location of horizontal (a) and vertical (b) rudders on the HSSV hull

One uses concept of the rudder efficiency e_f [2] determining the value of the lateral forces created by the rudders relative to the cavitator efficiency at the same deflection angle:

$$F_{fy} = \frac{\rho V^2}{2} S_n e_f c_n \alpha_{fh}, \quad F_{fz} = \frac{\rho V^2}{2} S_n e_f c_n \alpha_{fv}, \quad (2)$$

where $S_n = \pi D_n^2 / 4$ is the cavitator area; $c_n = 0.82(1 + \sigma)$ is the drag coefficient of cavitator; α_{fh} and α_{fv} are the effective angles of attack of horizontal and vertical rudders, respectively.

Then working each pair of the rudders may be establish by the three parameters: e_f , δ_{fh} or δ_{fv} is the angle of turning the rudders relatively to the vehicle longitudinal plane, x_{fh} or x_{fv} is the distance from the cavitator to the application point of the lateral force created by the rudders. The effective angles of attack of the horizontal and vertical rudders are equal to:

$$\alpha_{fh} = \alpha + \delta_{fh} - \frac{V_y}{V} + \frac{\omega_z(x_{fh} - x_c)}{V}, \quad (3)$$

$$\alpha_{fv} = -\beta - \delta_{fv} - \frac{V_z}{V} - \frac{\omega_y(x_{fv} - x_c)}{V}, \quad (4)$$

The corresponding moments relatively to the vehicle mass center are equal to

$$M_{fz} = -F_{fy}(x_{fh} - x_c), \quad M_{fy} = F_{fz}(x_{fv} - x_c). \quad (5)$$

The rudder drag force F_{fx} is not taken into account in this approach, *i.e.* we consider that it is compensated by increasing the propulsor thrust F_{pr} . We accept in all the calculation below that $e_f = 0.5$.

The calculations have shown that for the lateral motion the dependence $\dot{\chi}_m(s)$ is practically linear, *i.e.* $\dot{\chi}_m = const$. Fig. 8 shows a dependence of the angular velocity of turning on course $\dot{\chi}_m$ on the angle of rotation of the vertical rudders δ_{fv} . It was calculated for a series of positions of the vertical rudders $\bar{x}_{fv} = x_{fv} / L$. As one can see, disposition of the rudders at the frontal vehicle part, where they operate similarly to the δ -control, is the most effective. The transom disposition of the rudders, where they operate similarly to the η -control, is the least effective.

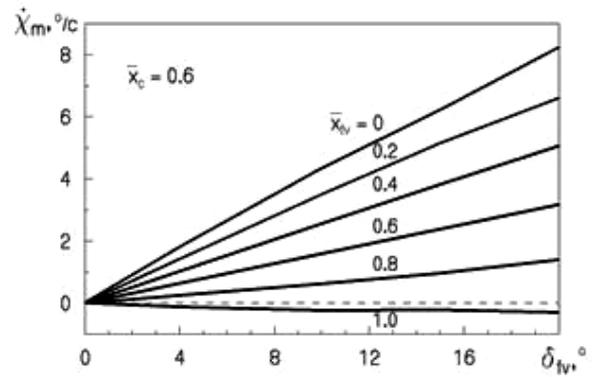


Figure 8 - Influence of deflection angle of vertical rudders onto the angular velocity of turning on course

Fig. 9 shows the graphs of dependence of the angular velocity of turning on course $\dot{\chi}_m$ on the position of the vertical rudders \bar{x}_{fv} . This dependence is calculated when $\delta_{fv} = 15^\circ$ for a series of the mass center position \bar{x}_c . One can see from here that the mass center displacement to the transom is efficiently from point of view of the vehicle course controllability.

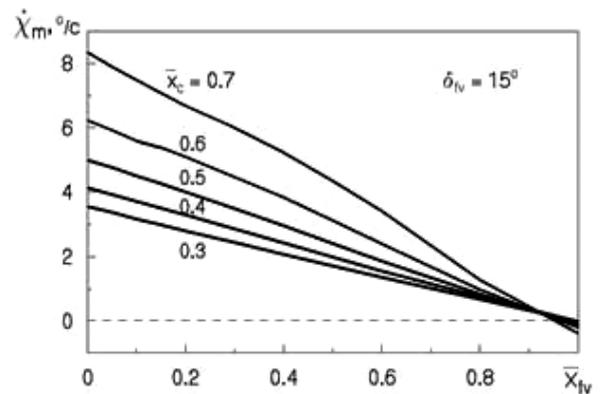


Figure 9 - Influence of vertical rudder position on the angular velocity of turning on course

It is of interest that for any values of \bar{x}_c there is near the transom the “neutral” position of the vertical rudders x_{fv}^* , for which rotating the rudders on any angle δ_{fv} does not lead to turning the HSSV. After passing through the value x_{fv}^* , a direction of turning the HSSV is changed. This means that the traditional tail position of rudders is unacceptable in this case.

As opposed to the course maneuvering a possibility of depth maneuvering the HSSV is restricted owing to the water free surface presence and the hydrostatic pressure increasing with the depth, which is a cause of decreasing the cavity dimensions. The last effect may be compensated in some limits by increasing the cavity pressure by means of gas-blowing. We consider here for simplicity that $\sigma = const$ when varying the HSSV motion depth.

The calculations have shown that for the longitudinal motion the dependence $\vartheta_m(s)$ also becomes linear after short transient part, i.e. $\dot{\vartheta}_m = const$. The same dependencies as in Fig. 8 and Fig. 9 for the case of the depth maneuvering of the HSSV are shown in Fig. 10 and Fig. 11. As one can see, the corresponding graphs for course and depth maneuvering are identical. A difference of these cases consists in that the force on the inclined cavitator makes a certain contribution in the f -control of the HSSV at the depth maneuvering.

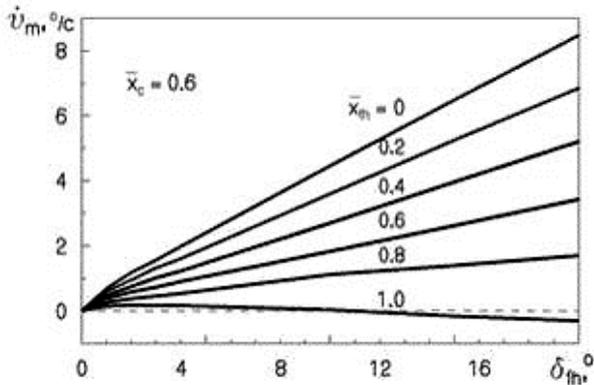


Figure 10 - Influence of angle of deflection of the horizontal rudders on the angular velocity of turning on depth

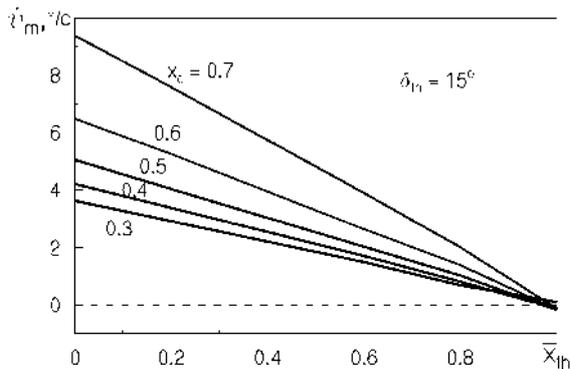


Figure 11 - Influence of the horizontal rudder position on the angular velocity of turning on depth

Table 5 - Motion parameters at the end of distance for the path configurations in Fig. 12

δ_{fv}	0°	-5°	-10°	-15°
$\dot{\chi}_m, ^\circ/c$	0	-1.634	-3.271	-7.030
$R_{fy}, \text{ km}$	∞	4.216	2.101	0.940
$H, \text{ m}$	86.03	72.29	69.30	56.23

The described simplified approach allows the arbitrary 3D maneuvering of the HSSV to be simulated at simultaneous action of the vertical and horizontal rudders. Fig. 12 shows examples of calculation of the 3D path configurations of the HSSV in the fixed coordinate system $Oxyz$. The calculation parameters are: distance $S = 4 \text{ km}$; $\bar{x}_c = 0.6$; $\bar{x}_{fh} = \bar{x}_{fv} = 0.4$; $\delta_{fh} = -1^\circ$; curve 1 – $\delta_{fv} = -5^\circ$; curve 2 – $\delta_{fv} = -10^\circ$; curve 3 – $\delta_{fv} = -15^\circ$. Table 5 gives corresponding magnitudes of the angular velocity of turning $\dot{\chi}_m$, radius of turning circle on course R_{fy} , and the depth H attained by the vehicle at the end of distance.

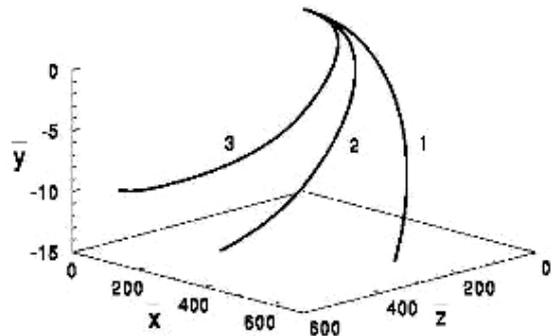


Figure 12 - Path configurations at the HSSV 3D maneuvering by f -control

As it seen, when the angle δ_{fv} increases for fixed δ_{fh} the angular velocity of course turning the HSSV is increased and the path deflection on the depth is decreased as well. The 3D effects at the HSSV maneuvering with the help of the hydrodynamic rudders show up in this interaction of the longitudinal and lateral components of the motion.

5. Computing The Real Cavity-Piercing Rudders Of HSSV

The simplified analysis of the effect of action of the hydrodynamic cavity-piercing fins (rudders) when the HSSV is maneuvering separately on depth and course is given above. In this case the lateral forces F_{fy} and F_{fyz} created by the rudders were considered to be given.

In practice, usually a shape and configuration of rudders are given, and the lateral forces F_{fy} and F_{fyz} should be determined. The hydrodynamic drag of the rudders F_{fx} should be additionally taken into consideration. At the fixed propulsor thrust it leads to de-

creasing the HSSV velocity and, hence, to decreasing the cavity dimensions. Then for decreasing losses, it is advisable to slide the rudders out only for a short time necessary for the maneuver.

In the case of the HSSV, the cavity-piercing fins and rudders will be flown in the supercavitation regime (see Fig. 13). In this case efficiency of these controllers is dramatically decreased in comparison with the case of the non-cavitation flow over rudders. In addition, when varying the effective angle of attack of the rudders α_f , the stepwise variation of the lateral force may occur, and this is accompanied by the hysteresis effect (see [17]).

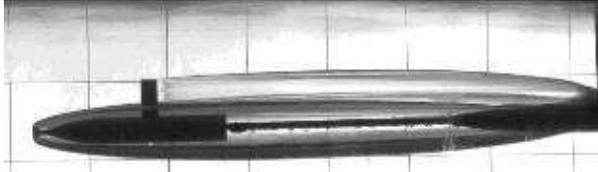


Figure 13 - Testing the model with the cavity-piercing rudder

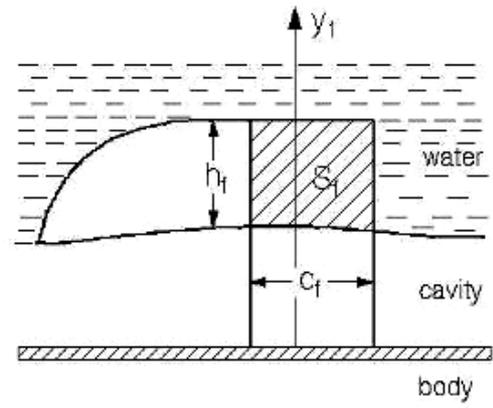
As was shown above, the nose location of the rudders on the vehicle hull is the most effective. However, in this case the flow distortion caused by the rudders will lead to additional bending the cavity axis, and, as a result, the force \vec{F}_f and also the gas loss rate \dot{Q}_{out} (in the case of a ventilated cavity) may be changed.

The additional effect may be caused by increasing the gas loss from the main cavity due to additional loss from “small” cavities formed past the rudders that leads to decreasing the cavity dimensions.

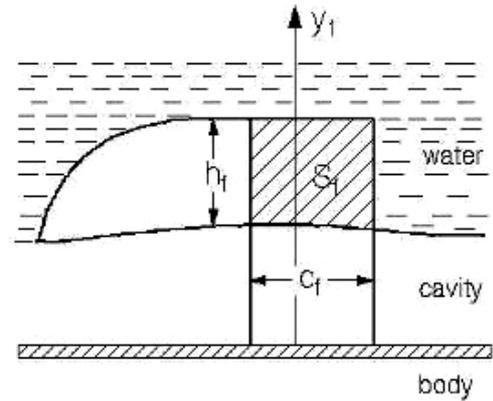
Taking all these effects into account is possible only in total computer simulation of 3D motion of the HSSV guided by the hydrodynamic rudders. Description of the method of calculating the hydrodynamic characteristics of hydrodynamic rudders of the HSSV with taking into account their interaction with the main supercavity is given below.

As above we will consider a pair of symmetric horizontal rudders creating summary lift force F_{fy} and summary moment M_{zy} , and a pair of symmetric vertical rudders creating summary lateral force F_{fz} and summary moment M_{fy} (see Fig. 7). We will consider that the HSSV rudders have a rectilinear shape and a wedge cross-sectional shape. A scheme of the hydrodynamic cavity-piercing rudder is shown in Fig. 14.

The scheme has the following symbols: S_f , c_f , h_f are respectively area, chord and span of the wetted part of the rudder; β_{fv} is the wedge half-angle in the rudder cross-section; δ_{fv} is the angle of deflection of the rudder relatively to the axis Oy_1 ; α_{fy} is the effective angle of attack of the rudder. Axes of the flow system of coordinates $Ox_0y_0z_0$ and the body coordinate system $Ox_1y_1z_1$ are shown in the scheme as well.



a



b

Figure 14 - Scheme of the cavity-piercing rudder of HSSV: a – side view; b – cross-section

In the case of unsteady cavity the wetted surface area of the rudders S_f and, hence, the components of the force \vec{F}_f and corresponding moments will be the time functions. Moreover, the values of the transversal force on the rudders of one pair may be distinguished at each time instant, that leads to appearance of the axial moment M_{fx} .

Note that working the cavity-piercing fins and rudders was studied theoretically and experimentally [17, 19]. Also one notes the last time publications of other authors concerning to experimental research of hydrodynamic characteristics of the HSSV rudders [20, 21].

As it was shown in [17], a type of the cavitation flow over the rudder with a wedge-shaped cross-section depends on the angle of attack. When the angle of attack is small $|\alpha_f| < \beta_f$, in the rudder cross-section one has the base-cavitating wedge (see Fig. 15, a). If $|\alpha_f| > \beta_f$, then the rudder is flown in the supercavitation flow regime with the cavity separation from the frontal edge (supercavitation flow over the plate, see Fig. 15, b). When passing through the critical values of the angle of attack $|\alpha_f| \approx \beta_f$, the abrupt changing both the lateral force and the drag of the rudder occurs. Fig. 15 has the following symbols: c_f is the chord length; l is the cavity length; β_f is the wedge half-angle; α_f is the angle of attack.

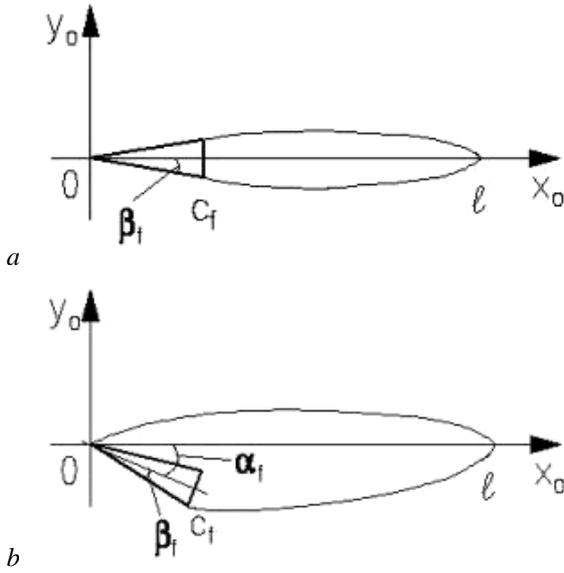


Figure 15 - Schemes of cavitation flow over wedge (a) and over plate (b)

We consider that the “small” cavities over the rudders have the same magnitude of the cavitation number σ as the main cavity. We have from the known exact solution of the linear problems for the symmetric base-cavitating wedge [22] and for the supercavitating plate [23], respectively

$$\frac{l}{c_f} = 1 + 7 \left(\frac{\beta_f}{\sigma} \right)^2, \quad \frac{l}{c_f} = 1 + 4 \left(\frac{\alpha_f}{\sigma} \right)^2. \quad (6)$$

Influence of angularity of the flow formed past the rudders flown under the angle of attack may be theoretically estimated by the theorem of momentum [13] (as past the inclined cavitator).

The transverse forces F_{fy} and F_{fz} on the horizontal and vertical rudders, which are deflected from the mainstream, lead to the cavity axis deformation. According to the theorem of momentum, the impulse of the transverse force on the cavitator must correspond to change of the momentum in the wake that is the same by magnitude and opposite by direction. This means that if the force on the horizontal rudder F_{fy} is directed to up, then the cavity axis must be deflected to down and vice versa. Similarly to this, if the force on the vertical rudder F_{fz} is directed to right, then the cavity axis must be deflected to left and vice versa.

Applying the theorem of momentum allows us to estimate easily the cavity axis bend:

$$h_{fy}(x) = -\frac{F_{fy}(x - x_{fh})}{\pi \rho V^2 R_c^2}, \quad x > x_{fh}, \quad (7)$$

$$h_{fz}(x) = -\frac{F_{fz}(x - x_{fv})}{\pi \rho V^2 R_c^2}, \quad x > x_{fv}, \quad (8)$$

where x_{fh} and x_{fv} are distances from the cavitator to the point of application of the lateral force created by the horizontal and vertical rudders, respectively; R_c is the cavity mid-section radius.

The hydrodynamic rudders of the HSSV represent supercavitating wings with small aspect ratio hav-

ing a slender wedge cross-section shape (see Fig. 14). In practice, experimental data are used to determine the drag and lateral forces on the rudders. During last time for this purpose one begins to use the data bases obtained beforehand by means of calculation of corresponding flows by the CFD methods. However, taking the high flow velocities and small angles of attack into consideration, the well known methods of the linear theory of supercavitating underwater hydrofoils [22–24] may be used for approximation calculation of forces on the HSSV rudders. Interference with the hull is absent for the HSSV cavity-piercing rudders. Therefore, they may be approximately considered as isolated rectilinear wings with small aspect ratio. Points of application of the forces are considered to be given.

Coefficients of components of the force acting on the rudders from the fluid are determined by formulae:

$$F_{fx} = \frac{\rho V^2}{2} S_f c_{fx}, \quad F_{fy} = \frac{\rho V^2}{2} S_f c_{fy},$$

$$F_{fz} = \frac{\rho V^2}{2} S_f c_{fz}. \quad (9)$$

The cavitation drag coefficient for the symmetric base-cavitating wedge (see Fig. 15, a) is equal to [22]

$$c_{fx} = \frac{2F_x}{\rho V_\infty^2} = \frac{8\beta_f^2 l}{\pi(l - c_f)}. \quad (10)$$

The lateral force coefficient of the rudder with wedge-shaped cross-section, which is flown under the small angle of attack α_f according to Fig. 15, a, will be close to the coefficient of the lift force of a fully wetted plate with small aspect ratio [24]

$$c_{fy} = \frac{\pi}{2} \alpha_f \lambda_f. \quad (11)$$

The total drag suffered by the rudder is equal to a sum of the cavitation drag and the friction drag:

$$F_{fx} = \frac{\rho V^2}{2} S_f [c_{fx} + 2c_f(\text{Re}_w)], \quad \text{Re}_w = \frac{c_f V}{\nu}, \quad (12)$$

where c_f is the viscous drag coefficient [25]; Re is the *Reynolds* number. The lift and drag force coefficients for the rudder flown under the small angle of attack α_f according to scheme Fig. 15, b are calculated by formulae for the supercavitating plates with small aspect ratio [24]:

$$c_{fy} = \frac{\pi}{5} \alpha_f \lambda_f, \quad c_{fx} = \frac{\pi}{5} \alpha_f^2 \lambda_f. \quad (13)$$

The effective angles of attack for the horizontal rudder and the vertical rudder are calculated by the formulae (3), (4). Coefficients of moments of the lateral forces created by the horizontal and vertical rudders relatively the vehicle mass center are determined by relations:

$$c_{mfz} = -c_{fy}(x_{fh} - x_c), \quad c_{mfy} = -c_{fz}(x_{fv} - x_c). \quad (14)$$

In the case if the lateral forces on the rudders of each pair are distinguished, then an axial moment M_{fx} arises. Its coefficient is equal to

$$c_{mfx} = c_{fz2} y_{fv2} - c_{fz1} y_{fv1} + c_{fy2} z_{fh2} - c_{fy1} z_{fh1}, \quad (15)$$

where $z_{fh1}, z_{fh2}, y_{fv1}, y_{fv2}$ are distances from point of application of forces $F_{fh1}, F_{fh2}, F_{fv1}, F_{fv2}$ respectively to the hull axis. Indexes 1 and 2 are related to the lower and upper vertical rudders, and also to the left and right horizontal rudders, respectively.

Thus, the calculation for each step is performed in the following order:

1) the aspect ratio λ_f and the wetted area S_f of each of the rudders are calculated;

2) the effective angles of attack α_f for each of the rudders are calculated by formulae (3) or (4);

3) the type of flow over each of the rudders (the base-cavitating wedge or the supercavitating plate) is determined;

4) the coefficients of forces for each of the rudders are calculated by formulae (10), (11), or (13);

5) coefficients of the moments relatively the vehicle mass center are calculated by formulae (14) and (15) for each of rudders;

6) the cavity axis bending caused by the rudders is calculated by formulae (7) and (8).

In this case the cavity shape, the vehicle hull position and values of the velocities are used from the previous calculation step.

The described algorithm of calculation of the effect of action of the hydrodynamic rudders has been applied in computer simulation of the 3D dynamics of the HSSV with the **SC_Vehicle** software. During these calculations the same HSSV model and the same starting motion parameters as above were used.

All the rudders have the same dimensions 100x150 mm. The vertical and horizontal rudders are mounted on the distance respectively 2.3 m and 3.3 m from the cavitator.

Fig. 16, *a* shows a history of the area S_{fv} , the effective angle of attack α_{fv} , of one of the vertical rudders, and also the cavity length past the rudder l_{fv} at 3D motion of the HSSV. The calculation parameters are: $\bar{x}_c = 0.6$; $\beta_v = 3^\circ$; $\delta_y = 0^\circ$; $\delta_z = -4.389^\circ$; $\delta_{fv} = 2^\circ$; $\delta_{fh} = -1^\circ$. The vertical parts of line in the graph $l_{fv}(t)$ correspond to changing the flow regime over the rudder. For comparison Fig. 16, *b* shows history of the pitch angle ψ and the yaw angle φ for the same time interval. All the parameters in the graphs are dimensionless, the angles are in radians.

The calculation have shown that all the conclusions obtained above concerning to maneuvering of the HSSV controlled by the rudders remain valid for this mathematical model. The most essential difference consists in taking into account the rudder drag, which may be considerable for high motion velocities. If the propulsor thrust F_{pr} is fixed and calculated for the balanced HSSV without rudders, then activation (*i.e.* sliding out) of rudders leads to decreasing the vehicle velocity and, hence, to decreasing the cavity dimensions down to the ring water wetting the vehicle tail. After this the vehicle will be flown in the partial cavitating

regime, and its hydrodynamic drag considerably rises.

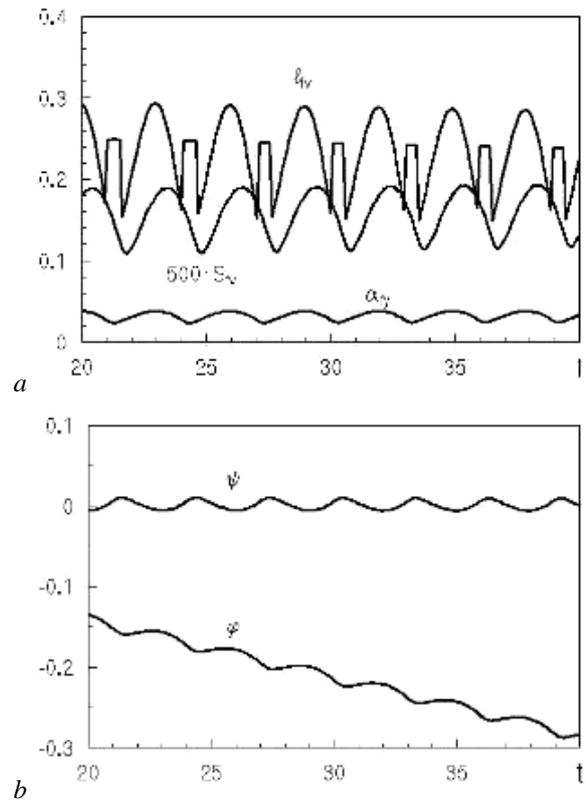


Figure 16 - History of the HSSV and vertical rudder parameters

For example, for calculation in Fig. 16 the fixed propulsor thrust identical to the drag of the balanced vehicle without rudders is equal to 21.65 KN, and the total drag of the four rudders is equal in average 1.14 KH, *i.e.* 5% of the total drag. In this case ring wetting the vehicle tail occurs after 41 s after the rudder activation. The time intervals T and the distances S passed by the vehicle until the instant of ring wetting for a number of the deflection angle of the vertical rudders δ_{fv} are given in Table 6.

δ_{fv}	2°	3°	4°	5°	6°
T	41.48	28.87	22.95	17.56	2.64
S	4.838	3.362	2.667	2.044	0.308

This abrupt decreasing of T and S is explained by that the angular velocity of turning the vehicle, the transom immersion depth and an area of the vehicle hull wetted part are increased with increasing δ_{fv} . This leads to the friction drag increasing and, as a result, to the motion velocity reduction and to decreasing the cavity dimensions.

Thus, to continue the HSSV motion in the supercavitation flow regime during maneuvering by the f -control we must compensate the additional drag. For this purpose the following two methods may be used:

1) ensuring the propulsor thrust reserve to compensate the drag of the rudder and the hull part wetted during the maneuvering;

2) using the gas supply into a cavity during maneuvering to compensate decreasing the cavity dimensions.

Fig. 17 shows the path configurations at the HSSV course maneuvering, which are calculated according to the mathematical model of the lateral motion, for a number of magnitudes of the rotation angle of the vertical rudders δ_{fv} . In this case one considered that the vehicle velocity is constant. The calculation parameters are the same as in Fig. 16, the full distance is equal to 2 km. Respective magnitudes of the angular velocity of turning $\dot{\chi}_m$ and the radius of turning circle on course R_{fy} at the distance end are given in Table 7.

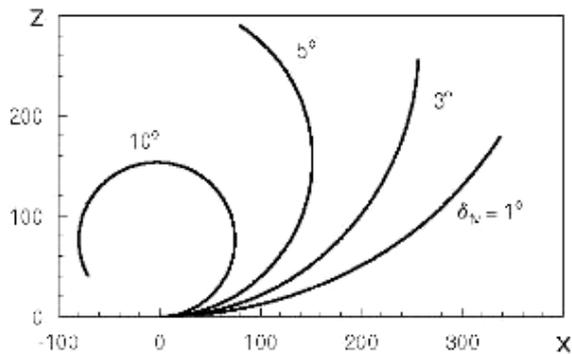


Figure 17 - Path configurations at the HSSV course maneuvering by f -control

Table 7 - The motion parameters at the end of distance for the path configurations in Fig. 17

δ_{fv}	1°	3°	5°	10°
$\dot{\chi}_m$	-4.644	-5.480	-9.080	-17.847
R_{fy}	1.481	1.255	0.757	0.385

Comparison with [10] shows that the f -control is as effective for the HSSV maneuvering as the δ -control at the condition of compensation of the additional drag.

Conclusions

1. The approximating method of calculation and computer simulation of the unsteady supercavitation flows basing on the *G.V.Logvinovich's* principle of independence of supercavity section expansion is effective and useful one for investigation of problems on the HSSV dynamics.

2. The computer simulation shows the cardinal distinction of the controllability mechanisms for traditional ships and for the HSSV. In the first case, the transom position of the rudder is optimal for course maneuvering. Its deviation causes the moment turning the vehicle hull, and the transversal force arising on the hull causes the motion path deflection, *i.e.* turning the vehicle. In this case the angle of the transom rudder deflection and the angle of turning the vehicle have opposite signs. In the case of the HSSV, on the contra-

ry, the transom position of the rudders is ineffective. The HSSV path deflection is caused by the transversal forces arising directly on the rudders. In this case signs of the angle of the rudder deflection and the angle of turning the vehicle coincide independently on that the rudders are located in front of or past the vehicle mass center.

3. Control of the HSSV motion by the f -control is effective like δ -control for maneuvering the HSSV on both the course and on the depth. However, the HSSV maneuvering by the f -control is connected with considerable increasing the drag. The character of flow over cavity-piercing rudders may be uncertain owing to oscillatory behavior of an unsteady cavity during the HSSV motion.

4. The frontal location of the hydrodynamic rudders is the most effective for course maneuvering of the HSSV (just as the δ -control). When the rudders are displaced to the transom, their efficiency is reduced. The traditional tail location of the rudders is unacceptable.

5. When the HSSV maneuvering on depth and course, its mass center position is of great importance. Displacement of the HSSV mass center to the transom leads to improvement of its controllability by means of the hydrodynamic rudders (the f -control) both on the course and the depth. The same conclusion was obtained for control by the cavitator inclination (the δ -control) and deflection of the propulsor thrust vector (the η -control).

6. The 3D effects when maneuvering of the guided HSSV appear in mutual influence of the longitudinal and lateral components of the motion and also in damping the oscillations of the vehicle and cavity with increasing the motion depth.

References

- Kirschner I., Kring D.C., Stokes A.W., Fine N.E., and Uhlman J.S. Control strategies for supercavitating vehicles, *J. of Vibration and Control*, 2002, No. 8, pp. 219-242.
- Dzielski J., and Kurdila A. A benchmark control problem for supercavitating vehicles and an initial investigation of solution. *J. of Vibration and Control*, 2003, 19(7), pp. 791-804.
- Vanek B., Bokor J., Balas G.J., and Arndt R.E.A. Longitudinal motion control of a high-speed supercavitation vehicle. *J. of Vibration and Control*, 2007, 13(2), pp. 159-184.
- Ruzzene M., Kamada R., Botasso C.L., and Scorcelletti F. Trajectory optimization strategies for supercavitating underwater vehicles. *J. of Vibration and Control*, 2008, 14(5), pp. 611-644.
- Nguyen V., and Balachandran B. Supercavitating vehicles with noncylindrical, nonsymmetric cavities: Dynamics and instabilities. *J. of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, 2011, pp. 041001-1-041001-11.
- Lin M., Xiang M., Zhang W., and Yang X. Fast trajectory optimization for the time delay effect on supercavitating flight. *BrodoGradnja*, Vol. 63, No. 3, 2012, pp. 219-225.

7. Nguen V., and Balachandran B. Supercavitating vehicle maneuvering with delay and non-steady planing. *J. Prykladna Gidromehanika*, 2013, Vol. 15, N 1, pp. 62–74.
8. Semenenko V.N. Modelling the longitudinal motion of the underwater supercavitating vehicles. *J. Prykladna Gidromehanika*, 2010, Vol. 12, N 4, pp. 81–88 (in Russian).
9. Savchenko Yu.N., Semenenko V.N. On course maneuverability of underwater supercavitating vehicles. *J. Prykladna Gidromehanika*, 2011, Vol. 13, N 1, pp. 43-50 (in Russian).
10. Semenenko V.N., and Naumova Ye.I. Study of the supercavitating body dynamics. In book: *Supercavitation: Advances and Perspectives*. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2012, pp. 147-176.
11. Semenenko V.N. Calculation of 3D motion of supercavitating vehicles. *J. Prykladna Gidromehanika*, 2012, Vol. 14, N 4, pp. 59-64 (in Russian).
12. Semenenko V.N. Analysis of the supercavitating body dynamics and control basing on the G.V.Logvinovich theory. *J. Prykladna Gidromehanika*, 2013, Vol. 15, N 1, pp. 83–93 (in Russian).
13. Logvinovich G.V. *Hydrodynamics of Flows with Free Boundaries*, Naukova Dumka Publishing House, Kiev, 1969 (in Russian). English translation: Halsted Press, 1973.
14. Semenenko V.N. Software for designing the supercavitating vehicles. Proceedings of the 10th International Scientific School “High Speed Hydrodynamics (HSH-2008)”, 10-14 September 2008, Cheboksary, Russia, pp. 241-252.
15. Logvinovich G.V., and Serebryakov V.V. On the methods of calculating a shape of the slender axisymmetric cavities. *J. Gidromehanika*, 1975, No. 32, pp. 47-54.
16. Paryshev E.V. On unsteady planing of a body over liquid curvilinear surface, Second Int. Summer Scientific School “High Speed Hydrodynamics”, June 2004, Cheboksary, Russia, pp. 175-178.
17. Savchenko Yu.N., Semenenko V.N. Special features of supercavitating flow around polygonal contours, *Int. J. of Fluid Mechanics Research*, 2001, 28, No. 5, pp. 660-672.
18. Semenenko V.N. Some problems of supercavitating vehicle designing. Proceedings of the International conference on superfast marine vehicles moving above, under and in water surface (SuperFAST'2008), 2-4 July 2008, St. Petersburg, Russia.
19. Savchenko V.T. Hydrodynamic Characteristics of Rudders Operating in Air-Sea Interface, Fluid Dynamics Problems of Vehicles Operating near or in Air-Sea Interface. RTO AVT Symposium, The Netherlands, 5-8 October 1998, RTO Report MP-15.
20. Wosnik M., and Arndt R.E.A. Control experiments with a semi-axisymmetric supercavity and a supercavity-piercing fin. Proceedings of the Sixth International Symposium on Cavitation (CAV209), Ann Arbor, Michigan, USA, 2009.
21. Pei X., Wang Y., Zhang Y., Deng F., Yuan X. Experimental research on tail rudder efficiency of super-cavitation Vehicle. *Journal of Southwest Jiaotong University*, Vol. 46, No. 6, 2011, pp. 1008-1018 (in Chinese).
22. Tulin M.P. Steady two-dimensional cavity flows about slender bodies, David Taylor Model Basin Report 834, 1953.
23. Yefremov I.I. Linearized theory of cavitation flow, Naukova Dumka Publishing House, Kiev, 1974 (in Ukrainian)
24. Hsu C.C. Some remarks on the progress of cavity flow studies. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 97, 1975, pp. 439–452.
25. Schlichting H. *Boundary layer theory*. New York, 1961.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КАЧЕСТВ ПОВРЕЖДЕННОГО КОРАБЛЯ В УСЛОВИЯХ МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ

Шайб П.А.

НИИ кораблестроения и вооружения ВМФ, ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия»

vunc-vmf-3fil@mil.ru

Одним из важных элементов живучести судна является непотопляемость, которая в настоящее время при проектировании исследуется и оценивается чисто статически. При этом принимается, что подвижность жидкости, имеющей свободную поверхность, приводит лишь к уменьшению остойчивости. Однако практически, как правило, поврежденный корабль будет находиться не на спокойной воде, как это принято в расчетах непотопляемости, а в условиях морского волнения, которое приведет его и жидкость, заполняющую отсеки, в движение.

Динамическая оценка непотопляемости позволит расчетными методами получить более достоверные результаты поведения поврежденного корабля, судна в море и внести уточнение в определение величины скорости ветра, которую он выдерживает.

Оценка поведения поврежденного корабля в условиях морского волнения переключается с задачами о движении твердого тела, полости которого заполнены жидкостью.

Последней проблеме посвящен ряд работ и монографий.

В общем виде задача о движении тела с полостями, полностью заполненными жидкостью, была еще сформулирована Стоксом, К. Нейманом, Ламбом. В своей классической работе Н.Е. Жуковский /1/ показал, что твердое тело с жидкостью можно заменить эквивалентным твердым телом, описав его движения уравнениями динамики обычного твердого тела.

В случае, когда заполняющая отсеки жидкость имеет свободную поверхность, понятие об эквивалентном твердом теле оказывается неприемлемым. В этом случае тело с жидким заполнением полостей является динамической системой с бесконечным числом степеней свободы.

Важным прикладным вопросом является исследование динамических свойств судна, отсеки которого частично заполнены жидкостью. Этот вопрос рассмотрен в очень немногих работах, наиболее интересными из которых являются работы Н.Н. Моисеева /3/, /4/, Н.Я. Мальцева /2/, /7/ и Н.Н. Рахманина /5/.

Исследованию качки судна с жидкими грузами на регулярном волнении посвящены работы /4/, /5/.

В работе Н.Н. Рахманина в отличие от работы Н.Н. Моисеева учитывается влияние циклического движения судна на относительные колебания «внутренней» жидкости.

Работа /5/ является последней и наиболее полной в области динамики судна с жидкими грузами, базирующейся на результатах, достигнутых современной линейной теорией движения твердых тел с жидким заполнением, имеющих свободные поверхности.

Однако имеемые решения в существующих работах могут быть применены в расчете качки поврежденного корабля, судна лишь в определенных случаях по следующим основным причинам:

- во всех перечисленных работах рассматриваются только симметричные колебания тел, имеющих полости, заполненные жидкостью.

При этом симметрия имеет место, как для формы тела, так и для формы жидкости.

Однако поврежденный корабль, как правило, будет совершать несимметричные колебания в силу наличия начального угла крена, вызванного либо несимметричным затоплением, либо отрицательной начальной остойчивостью;

- задача о динамических свойствах корабля с отсеками, заполненными жидкостью, решается в предположении, что восстанавливающий момент его линейно зависит от угла крена. Однако это допущение тем больше отличается от действительности, чем сильнее повреждение корабля, особенно при наличии фильтрационной воды;

- в динамике корабля с полостями, заполненными жидкостью, рассматриваются лишь отсеки II категории, в то время как для поврежденного корабля наиболее характерным являются отсеки III категории, сообщенные с забортной водой;

- при решении задач о колебании жидкости в отсеках не принимается во внимание, что при широких отсеках и малой глубине затопления (фильтрационная вода) будет иметь место оголение палубы и заливание подволока, т.е. имеет место нелинейность в колебании самой жидкости;

- отсек любого корабля, судна имеет вполне определенное насыщение (механизмы, оборудование и т.д.), которое будет оказывать влияние на динамические свойства жидкости, колеблющейся внутри отсека. Это влияние коэффициентов проницаемости на динамические свойства судна с жидкими грузами никогда не учитывалось.

В работе /6/ делается оценка вышеперечисленных проблем с целью дать рекомендации для расчета динамической непотопляемости корабля в процессе его проектирования.

При выводе дифференциальных уравнений движения поврежденного корабля, расположенного лагом к волне, принимались основные допущения, принятые в нелинейной качке неповрежденного корабля, а в определении движения жидкости в отсеках считалось, что жидкость идеальна и обладает потенциалом. Отсеки, содержащие «внутреннюю» жидкость, имеют прямоугольную форму. При решении данной задачи принята следующая расчетная схема (рис. 1).

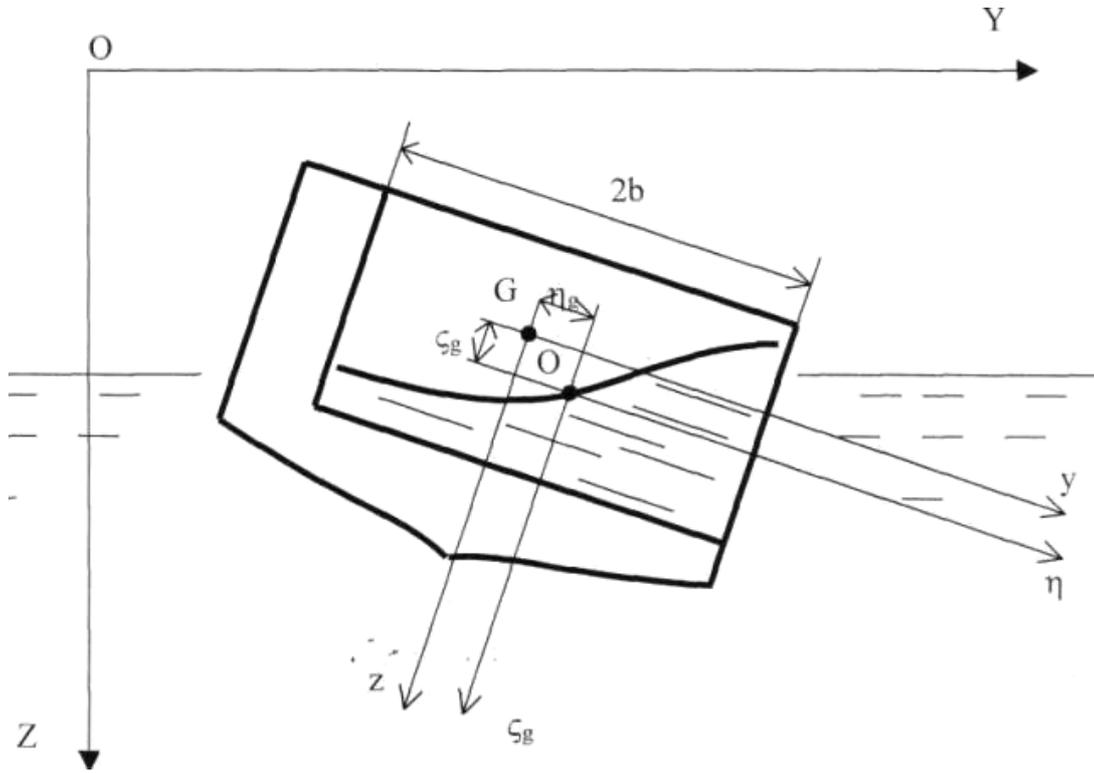


Рисунок 1 - Система координат

OYZ – абсолютная система координат; Gyz – неизменно ориентированная система относительно корабля, связанная с ним; Oηζg – подвижная система координат, расположенная в центре симметрии невозмущенной поверхности «внутренней» жидкости

Дифференциальное уравнение движения поврежденного корабля, расположенного лагом к волне, с начальным углом крена θ_0 при нелинейной диаграмме остойчивости может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
 & (M + \lambda_{22})\ddot{Y}_g + N_\eta \dot{Y}_g - \rho \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m q_m = \\
 & = (M + \lambda_{22})\alpha_\eta \sigma^2 r_0 \sin \sigma - N_\eta \alpha_\eta \sigma r_0 \cos \sigma, \\
 & (M + \lambda_{33})\ddot{Z}_g + N_\zeta Z_g + \gamma_0 S Z_g = \\
 & = (\gamma_0 S - \lambda_{33} \sigma^2) \alpha_\zeta r_0 \cos \sigma, \\
 & (J_c + J_{ж} + \lambda_{44})\ddot{\theta} + 2N_\theta \theta + \\
 & + Dl(\theta) - \rho \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \ddot{q}_m - g \beta_m q_m \cos \theta_0 = \\
 & = (Dh_0 - \lambda_{46} \sigma^2) \alpha_0 \alpha_0 \sin \sigma + 2N_0 \alpha_0 \sigma \alpha_0 \cos \sigma + \alpha_0 \\
 & \quad \ddot{q}_1 - \lambda_1 g (\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \theta) q_1 + \delta_1 \lambda_1 \ddot{Y}_g - \\
 & \quad - \beta_1 \lambda_1 \operatorname{tg} \theta_0 \ddot{Z}_g = 0 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \ddot{q}_m - \lambda_m g (\cos \theta - \sin \theta_0 \theta) q_m + \delta_m \lambda_m \ddot{\theta} + \\
 & + \beta_m \lambda_m \ddot{Y}_g - \delta_m \lambda_m \operatorname{tg} \theta_0 Z_g = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Функции времени $q_m(t)$ представляют собою коэффициенты ряда Фурье при разложении уравнения свободной поверхности

$$\zeta(\eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \varphi_m(\eta_1 - \eta \operatorname{tg} \theta_0) \quad (2)$$

Способы определения $q_m(t)$, а также коэффициентов β_m и δ_m даны в работах [1, 5, 9]. Полученная система дифференциальных уравнений (1) представляет собою систему с бесконечным числом степеней свободы. Это означает, что поврежденный корабль, как тело, полости которого частично заполнены жидкостью, обладает дискретным спектром частот свободных колебаний. Работы Н.Н. Моисеева [5, 6], Н.Н. Мальцева [4], а также проведенные теоретические и экспериментальные исследования, подтверждают тот факт, что достаточной для практики степенью точности, можно рассматривать поврежденный корабль, как систему с числом степеней свободы конечного и, вообще говоря, достаточно малого порядка. В отличие от ранее полученных решений, при наличии начального угла крена θ_0 частота собственных колебаний жидкости в отсеке зависит от амплитуды качки θ .

$$\begin{aligned}
 n_m^2 & = -\lambda_m g (\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \theta) = \\
 & = \overline{n}_m (\cos \theta_0 - \sin \theta_0 \theta) \quad (3)
 \end{aligned}$$

где \overline{n}_m^2 - частота собственных колебаний жидкости в отсеке при отсутствии начального угла крена.

Как показали теоретические расчеты, до статического угла крена $\theta_0 \leq 5^\circ$ влиянием его на частоту собственных колебаний жидкости в отсеке n_m можно пренебречь.

Нелинейный член $Dl(\theta)$ в системе (1) заменяет собой линейные члены

$$Dh_0\theta - \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \theta - \gamma \theta_0 \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \quad (4)$$

что является значительным уточнением в качестве поврежденного корабля.

$Dl(\theta)$ – есть диаграмма статической устойчивости, учитывающая при накренениях влияния:

- конфигурации затопленного отсека;
- оголения палуб и заливания подволока при больших накренениях;
- обводы поврежденного корабля;
- колебания «внутренней жидкости».

Учитывая, что для проектируемого корабля θ_0 не должно превышать $10-12^\circ$, а также принятые в работе допущения, система (1) может быть сравнительно упрощена при учете только гармоник основного тона.

В дальнейшем будем исследовать лишь бортовые колебания поврежденного корабля, расположенного лагом к волне. Тогда система (1) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} (J_c + J_{ж} + \lambda_{44}) \ddot{\theta} + 2N_\theta \dot{\theta} + Dl(\theta) = \\ = \rho(\ddot{q}_1 - g\beta_1 q_1) + (Dh_f - \lambda_{44}\sigma^2) \alpha_\theta \alpha_0 \sin \sigma t + \\ + 2N_\theta \alpha_\theta \sigma \alpha_0 \cos \sigma t + L \\ q_1 - \lambda_1 g q_1 = -\delta_1 \lambda_1 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

В данной системе учтено влияние влившейся воды, как на инерционные и статические характеристики нашей динамической системы (первый, третий члены уравнения), так и на изменение возмущенного момента (пятый член уравнения), а также учитывается дополнительный возмущающий момент от волнового движения «внутренней» жидкости (четвертый член уравнения).

Для приближенного решения системы (5) используется метод гармонической линеаризации. При этом решение ищется в виде:

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + \theta^* = \theta_0 + \theta_m \sin[(\sigma t + \varepsilon) + \beta] \\ q_1 = Q_1 \sin(\sigma t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

Где θ_0 , θ^* постоянная и колебательная составляющие данного решения соответственно.

Тогда система (5) с учетом (6), после деления уравнения на коэффициент при первом члене, запишется:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\nu_\theta \dot{\theta} + \bar{D}l(\theta) + \\ + (\bar{\rho}\delta_1\sigma^2 + \bar{\gamma}\beta_1) \frac{\delta_1\lambda_1\sigma^2}{(n_1^2 - \sigma^2)} \theta^* = \\ = H \sin(\sigma t + \varepsilon) + \bar{L}_0 \end{aligned} \quad (7)$$

Гармоническая линеаризация нелинейной части с учетом решения (6) может быть представлена в виде:

$$l(\theta) = l_0 + l_m \theta^* \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{где: } l_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l(\theta_0 + \theta_m \sin \varphi) d\varphi \\ l_m = \frac{1}{\pi\theta_m} \int_0^{2\pi} l(\theta_0 + \theta_m \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

коэффициенты гармонической линеаризации. Учитывая (6) и (8), а также то, что θ_0 , θ_m и σ в переходном режиме могут рассматриваться как медленно изменяющиеся величины в течение одного периода, уравнение (7) может быть разделено нелинейным образом на два уравнения соответственно для постоянной составляющей и для колебательных составляющих.

$$\begin{aligned} \bar{D}l_0 = \bar{L}_0 \\ \left[\begin{aligned} &(\rho^2 + 2\nu_\theta\rho) + \\ &+ \left(\bar{\rho}\delta_1\sigma^2 + \bar{\gamma}\beta_1 \right) \frac{\delta_1\lambda_1\sigma^2}{n_1^2 - \sigma^2} - \theta^* + Dl_m\theta^* = 0 \end{aligned} \right] \quad (10) \\ \left[\begin{aligned} &-\frac{H}{\theta_m} \left(\cos\beta - \frac{\sin\beta}{\sigma} \rho \right) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Для решения система (10) приводится к более удобному виду:

$$\theta_m \left[\begin{aligned} &(\bar{D}l_m - \sigma^2) + \\ &+ \left(\bar{\rho}\delta_1\sigma^2 + \bar{\gamma}\beta_1 \right) \frac{\delta_1\lambda_1\sigma^2}{n_1^2 - \sigma^2} + \\ &+ i2\nu_\theta\sigma \end{aligned} \right] = Hl^{-i\beta} \quad (11)$$

Предлагается графический способ решения системы (11) на комплексной плоскости. Получены также аналитические выражения для амплитуды качки и фазового сдвига:

$$\begin{aligned} \theta_m = \alpha_m \frac{\sqrt{(\bar{D}h_f - \bar{\lambda}_{44}\sigma)^2 + 4\nu_\theta^2\sigma^2}}{\sqrt{(k^2 - \sigma^2)^2 + 4\nu_\theta^2\sigma^2}} \\ \beta = -\arctg \frac{2\nu_\theta\sigma}{k^2 - \sigma^2} \end{aligned} \quad (12)$$

где: выражение с чертой есть коэффициенты уравнения (7), отнесенные к моменту инерции корабля с учетом влияния жидкости

$$\begin{aligned} (J_c + J_{ж} + \lambda_{44}) \\ k^2 = \bar{D}l_m + (\bar{\rho}\sigma^2\delta_1 + \bar{\gamma}\beta_1) \frac{\delta_1\lambda_1\sigma^2}{n_1^2 - \sigma^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Из выражений (9), (11), (12) видно, что при расчете амплитуды качки поврежденного корабля в нелинейной постановке, при несимметричных колебаниях, величина статического отклонения от равновесного положения, относительно которого происходят колебания корабля, зависит как от кренящего, постоянно действующего момента, так и от амплитуды и частоты возмущающей силы. Зависимость амплитуды и частоты вынужденных колебаний от величины смещения центра колеба-

ний характерно именно для нелинейных систем. В отличие от линейной постановки данной задачи, динамическое отклонение от положения равновесия не равно начальному статическому углу крена поврежденного корабля. Так, например, при расчете несимметричных колебаний судна, аварийный угол крена которого составлял 12° , угол, относительно которого совершалась бортовая качка, равнялся $9,5^{\circ}$.

Используя выражения и задавая диаграмму статической остойчивости в виде степенного ряда

$$l_{(\theta)} = \sum_{i=1}^n C_{2i-1} \theta^{2i-1} \quad (14)$$

были получены приближенные выражения для коэффициентов гармонической линеаризации l_0 и l_m для любого вида диаграммы остойчивости, как при симметричных, так и несимметричных колебаниях.

Последний член выражения (13) учитывает дополнительный возмущающий момент от волнового движения жидкости в отсеке. Как показали практические расчеты, при сравнительно небольших повреждениях, когда частота собственных колебаний жидкости « n_m » сравнительно далека от частоты возмущающей силы « σ », величиной этого члена можно пренебречь.

Тогда, как это принято в нелинейной теории качки, частота собственных колебаний поврежденного корабля определяется только видом диаграммы статической остойчивости, и выражение $\overline{D}l_m$ заменяется на n_f^2 , как квадрат частоты собственных колебаний.

Для определения периода собственных колебаний поврежденного корабля предлагается использовать выражения: при симметричных колебаниях:

$$T \cong \frac{\sqrt{2}}{3} \theta_m \left[\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{3}{\sqrt{h - \pi(\frac{7}{6}\theta_m)}} + \frac{1}{\sqrt{h - \pi(\frac{3}{4}\theta_m)}} + \frac{1}{\sqrt{h - \pi(\frac{15}{16}\theta_m)}} + \frac{1}{\sqrt{\theta_m \pi(\theta_m)}} \right] \quad (15)$$

при несимметричных колебаниях

$$T \cong \frac{1}{6} \sqrt{2} [(\theta_0 - \theta_1)] \sum_{-i=0}^4 \frac{1}{\sqrt{W_{-i}}} + (\theta_2 - \theta_{\theta}) \sum_{+i=0}^4 \frac{1}{\sqrt{W_{+i}}} \quad (16)$$

Где функции π и W определяются, как ординаты диаграммы динамической остойчивости, или площади диаграммы статической остойчивости для заданных амплитуд качки θ_m , умноженные на \overline{D} .

Полученные выражения (15) и (16) могут использоваться при любом виде диаграммы остойчивости как для положительной, так и отрицательной поперечной начальной остойчивости.

Заключение

1. Используя метод гармонической линеаризации в решении составленной системы нелинейных дифференциальных уравнений движения поврежденного корабля с отсеками, частично заполненных жидкостью, расположены лагом к волне, получены расчетные формулы для определения параметров качки поврежденного корабля, как симметричных, так и несимметричных колебаний.

2. Полученные данные по экспериментам позволили выявить условия, при которых необходимо учитывать категорию отсека (сообщение отсека с забортной водой), а также влияние коэффициентов проницаемости в расчетной схеме по определению амплитуды качки поврежденного корабля.

Наличие сообщения отсека с забортной водой (отсек III категории) ведет к значительному увеличению амплитуды качки поврежденного корабля, если он находится в дорезонансной зоне и к уменьшению амплитуды качки, если он находится в резонансной зоне.

При отношении, например $\sigma/n = 1,5$, амплитуда вынужденных колебаний увеличивается (при относительной площади пробоины 30 %) на 20-22 % по сравнению с отсеком II категории.

При расположении пробоины на противоположном борту по отношению к направлению бега волн, амплитуда качки поврежденного корабля несколько уменьшается (15-18%), что может быть учтено на практике. Расчет надо вести на наилучший случай при расположении пробоины на борту, обращенному к направлению бега волн.

3. Уменьшение коэффициента проницаемости приводит к уменьшению амплитуды качки поврежденного корабля. При этом уменьшение тем интенсивнее, чем ближе находится поврежденный корабль к области резонанса. В области далекой от резонанса $\sigma/n \geq 2 - 2,5$ для больших коэффициентов проницаемости 0,90-0,95 вполне достаточно учитывать их влияние только в статике.

4. Наличие свободной поверхности воды в отсеках второй категории уменьшает амплитуду качки, если судно находится за резонансной зоной. К таким судам относятся суда большого водоизмещения с периодом собственных колебаний 9-11 сек. Суда малого водоизмещения с периодом собственных колебаний 5-8 сек., находящиеся в дорезонансной зоне, при частоте возмущающей силы, близкой к частоте собственных колебаний воды в отсеке, могут подвергаться раскачиванию «внутренней» водой.

5. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что при аварийном крене до 5 градусов влиянием его на параметры качки как поврежденного, так и неповрежденного корабля, можно практически пренебречь. Однако при дальнейшем его увеличении резко изменяют-

ся гидродинамические характеристики бортовой качки. При этом, с учетом нелинейности диаграммы статической остойчивости суммарная амплитуда качки будет всегда больше той амплитуды, которая получается простым суммированием аварийного угла крена, при котором происходит качка корабля, с углом качки при отсутствии такового при одной и той же возмущающей силе. Большая амплитуда бортовой качки при сильно сдвинутом к максимуму диаграммы статическом положении равновесия судна весьма опасны, так как судно может опрокинуться, если его курс не будет изменен.

6. При действии на корабль возмущающих сил период которых мал по сравнению с периодом колебания «внутренней» жидкости, на практике можно пренебречь ее колебанием внутри отсека.

Р.С. Большую благодарность выражаю научному сотруднику НИИ кораблестроения и вооружения ВМФ Московкиной С.В. за оказанную помощь в составлении и оформлении данной статьи.

Литература

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельной жидкостью. Собрание сочинений том II, Гостехиздат, 1949.

2. Мальцев Н.Я. К вопросу о динамике корабля с жидкими грузами, сб. ст. «Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью», издание ВЦ АН СССР.

3. Моисеев Н.Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, Мат. Сб., т.32, ч.1, АН СССР, 1953.

4. Моисеев Н.Н. Динамика корабля, имеющего жидкие грузы, изв.АН СССР, №7, 1954.

5. Рахманин Н.Н. Бортовая качка судна, отсеки которого частично заполнены жидкостью, Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, в. 191, 1962.

6. Шауб П.А. Вопросы нелинейной теории качки поврежденного судна. Доклады к XV научно-технической конференции по теории корабля и гидродинамики судна. Крыловские чтения, 1965, вып.64, л., НТО судпрома.

7. Мальцев Н.Я., Дорогостайский Д.Н., Притков Ю.К. Теория непотопляемости судна. Изд. «Судостроение», Л. 1973.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХОДА ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ С КОНТУРА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

Горелов Д.Н., Говорова А.И.

Омский филиал института математики СО РАН

644043, г. Омск, ул. Певцова, 13
gorelov@ofim.oscsbras.ru, govorovaai@mail.ru

Аннотация

Рассмотрена плоская нелинейная начально-краевая задача о нестационарном отрывном обтекании контура идеальной несжимаемой жидкостью. С контура сходят вихревые следы, обусловленные изменением циркуляции скорости вокруг него с течением времени. Для более полного моделирования схода вихревых следов с контура предложены нелинейные соотношения в точках схода. Эти соотношения получены из требования одновременного выполнения в точках схода граничных условий на контуре и в следе. Их применение позволяет определять структуру вихревого следа в малой окрестности каждой точки схода. Приведены примеры расчета.

Постановка задачи и её решение

Рассмотрим плоское нестационарное обтекание контура идеальной несжимаемой жидкостью. Контур может быть разомкнутым или замкнутым. В общем случае с контура сходят вихревые следы, обусловленные изменением циркуляции скорости вокруг него с течением времени. В теории крыла такие следы моделируются линиями тангенциального разрыва, при переходе через которые остаются непрерывными гидродинамическое давление и нормальная составляющая скорости, тогда как касательная составляющая скорости терпит разрыв. Течение жидкости вне контура и вихревых следов полагаем потенциальным. Начально-краевую задачу формулируем для комплексной скорости $\bar{v}(z, t) = v_x(x, y, t) - iv_y(x, y, t)$ в комплексной плоскости $z = x + iy$.

Процесс схода вихревого следа с контура определяется следующими основными параметрами: положением точки схода на контуре, интенсивностью сходящего вихревого следа, величиной и направлением вектора скорости схода вихрей с контура.

Положение точки схода известно при сходе следа с острых и угловых кромок, а при сходе следа с гладкого участка контура определяется некоторыми дополнительными условиями [1].

Суммарная интенсивность свободных вихрей, сходящих с контура, определяется теоремой Кельвина о сохранении циркуляции скорости по любому замкнутому контуру, состоящему из одних и тех же частиц жидкости.

При обтекании подвижного контура вектор относительной скорости жидкости в точке схода вихревого следа должен быть направлен по одной из касательных к контуру, так как только в этом случае интенсивность вихревого следа может быть отлична от нуля. Иначе вихревой след не образуется.

Перечисленные выше условия соблюдаются, как правило, в теоретических исследованиях, прово-

димых в рамках нелинейной теории крыла. Но этих условий оказывается недостаточно для определения интенсивности сходящих вихрей и скорости их схода, особенно в случае схода двух и более вихревых следов. Недостаточно этих условий и для решения задачи Коши, определяющей зарождение и эволюцию вихревых следов в начальные моменты времени. Для решения этих задач нужны дополнительные условия в точках схода вихревых следов с контура. Каждая точка схода принадлежит как контуру, так и вихревому следу. При подходе к этой точке со стороны контура в ней должны выполняться граничные условия на контуре, а при подходе со стороны следа – граничные условия в точках следа. Поэтому в качестве дополнительных условий целесообразно потребовать выполнения в точках схода соответствующих граничных условий в следе и на контуре. Рассмотрим, например, сход следа с угловой кромки контура. Пусть след сходит с верхней грани (рис. 1).

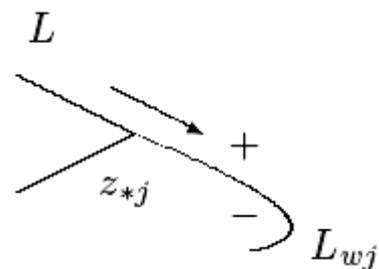


Рисунок 1 - Сход вихревого следа с кромки контура

На контуре L должно выполняться условие непротекания жидкости, а на контуре вихревого следа L_{wj} – условия непрерывности давления и нормальной составляющей скорости жидкости при переходе через след:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}, (x, y) \in L;$$

$$p_+ = p_-, \mathbf{v}_+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_- \cdot \mathbf{n}, (x, y) \in L_{wj}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость жидкости, \mathbf{U} – скорость перемещения контура, \mathbf{n} – нормаль к L и L_{wj} , p – гидродинамическое давление. Из граничных условий (1) следует, что в точках схода вихревых следов нормальные компоненты скорости контура и вихревого следа совпадают. Это позволяет интеграл Коши-Лагранжа в точке схода записать в виде [2]:

$$p_+ - p_- = -\rho \left[\frac{d}{dt} \Gamma_j(t) - \gamma_{wj}(t) w_j(t) \right], \quad (2)$$

$$j = 1, \dots, N_w.$$

где $\Gamma_j(t)$ – циркуляция скорости вокруг рассматриваемого вихревого следа L_{wj} , $\gamma_{wj}(t), w_j(t)$ – интенсивность и скорость схода вихревого следа с контура, N_w – число вихревых следов.

Одновременное выполнение условий (1) с учетом интеграла Коши-Лагранжа (2) в точках схода приводит к нелинейным соотношениям [2]:

$$\frac{d}{dt} \Gamma_j(t) = \gamma_{wj}(t) w_j(t), \quad j = 1, \dots, N_w. \quad (3)$$

К соотношениям (3) следует добавить условие непрерывности вихревого слоя, моделирующего контур и вихревой след, в точке схода:

$$\gamma(s_{*j}, t) = \gamma_{wj}(0, t), \quad j = 1, \dots, N_w, \quad (4)$$

где s_{*j} – дуговая координата точки схода вихревого следа, $\gamma(s_{*j}, t)$ – интенсивность вихревого слоя на контуре.

Отметим, что в точках вихревого следа условие непрерывности давления выполняется за счет двух факторов: свободного перемещения вихрей вместе с жидкостью и независимостью от времени суммарной циркуляции скорости любого элемента следа, состоящего из одних и тех же частиц. В точке схода следа непрерывность давления достигается иным путем. При сходе вихрей с контура они перемещаются относительно точки схода со скоростью w_j , пополняя след L_{wj} на величину $\gamma_{wj} w_j dt$ за время dt .

Условия (3), (4) позволяют связать решение краевой задачи на контуре с интенсивностью $\gamma_{wj}(0, t)$ вихрей, сходящих в след.

В соответствие с (3) теорему Кельвина о сохранении циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \Gamma(t) + \sum_{j=1}^{N_w} \Gamma_j(t) \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt} \Gamma(t) + \sum_{j=1}^{N_w} \gamma_{wj}(t) w_j(t) = 0, \quad (5)$$

где $\Gamma(t)$ – циркуляция скорости вокруг контура L .

Из (5) следует, что изменение циркуляции скорости $\Gamma(t)$ компенсируется сходом вихрей с контура в вихревые следы L_{wj} . В случае схода одного вихревого следа теорема Кельвина принимает вид:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\gamma_w w. \quad (6)$$

Формула (6) известна [3].

Рассмотрим применение условий (3), (4) для определения структуры вихревого следа в малой окрестности точки схода. В нелинейной теории крыла вихревой след моделируется системой свободных дискретных вихрей, сходящих с контура за время $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, \dots$. Интенсивность каждого такого вихря не меняется с течением времени, а сами вихри движутся свободно вместе с жидкостью. При этом необходимо знать координаты дискретного вихря, который сходит с контура в рассматриваемый момент времени. Эти координаты должны определяться решением нелинейной задачи Коши, строгое решение которой до сих пор не получено. Поэтому в известных алгоритмах расчета вихревых следов положение дискретных вихрей, непосредственно сходящих с контура, задается обычно априорно без выполнения условий (3).

Численный эксперимент

Авторам статьи удалось разработать алгоритм решения нелинейной задачи Коши с учетом условий (3), (4) [4]. Было обнаружено, что рассматриваемая нелинейная задача Коши имеет бесконечное множество решений, удовлетворяющих всем условиям исходной начально-краевой задачи. Пример расчета возможных положений свободного дискретного вихря, сходящего с пластинки в первый момент времени t_1 после её старта, приведен на рисунке 2.

Угол наклона пластинки $\theta = 90^\circ$.

Здесь δ_{1j}, δ_{2j} – безразмерные величины, определяющие комплексные координаты сошедшего дискретного вихря в системе координат, связанной с кромкой пластинки. Заметим, что для $\delta_{1j} < \delta_{1*}$ имеются два значения δ_{2j} , а для всех $\delta_{1j} > \delta_{1*}$ – решений не существует. Величине $\delta_{1j} = \delta_{1*}$ соответствует одно значение δ_{2*} . Именно это решение задачи Коши целесообразно выбирать в качестве координат дискретного вихря, сходящего с контура в вихревой след в момент времени t_1 . На рисунке 2 это решение обозначено точкой.

Ниже представлены результаты расчетов по алгоритму [4] (далее, Алгоритм 1) и, для сравнения, по алгоритму (далее, Алгоритм 2), в котором не учитывается соотношение (3) и координаты непосредственно сходящих дискретных вихрей задаются априорно (в данном случае дискретный вихрь располагается по касательной к пластинке). Расчеты проводятся для пластинки, установленной под углом $\theta = 60^\circ$, для одного и того же момента времени.

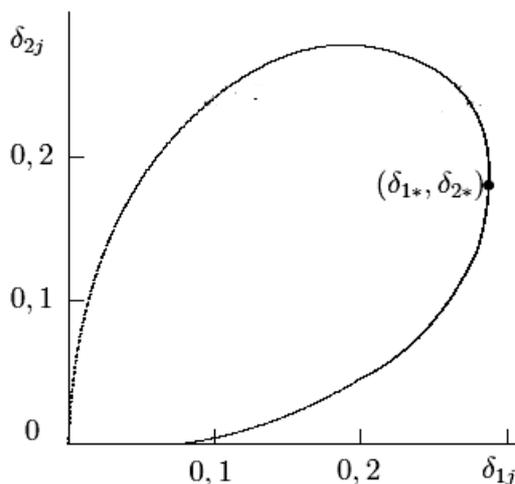


Рисунок 2 - Множество решений задачи Коши

На рисунках 3-4 показаны положения свободных дискретных вихрей в следе. Из графиков видно, что формы вихревых следов, определенные по Алгоритмам 1 и 2, практически совпадают.

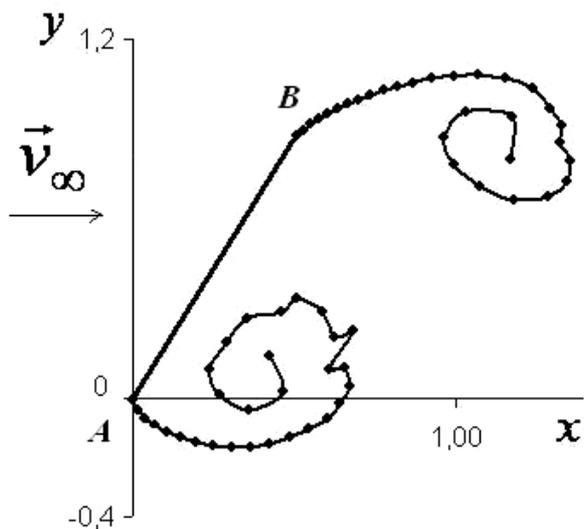


Рисунок 3 - Расчет формы вихревых следов по Алгоритму 1.

На рисунках 5-6 отображено изменение скорости схода w_j , $j=1,2$, в зависимости от времени. Цифрами 1 и 2 обозначены графики, полученные при расчете по Алгоритмам 1 и 2 соответственно. Приведенные результаты показывают, что скорости схода, рассчитанные по Алгоритмам 1 и 2, различны. Особенно существенно это различие проявляется на кромке A . Заметим при этом, что по Алгоритму 2 в начальные моменты времени получены отрицательные скорости схода. Это противоречит предположению о наличии схода вихревого следа с кромки A и не соответствует физической картине течения. На кромке B наблюдаем меньшее различие.

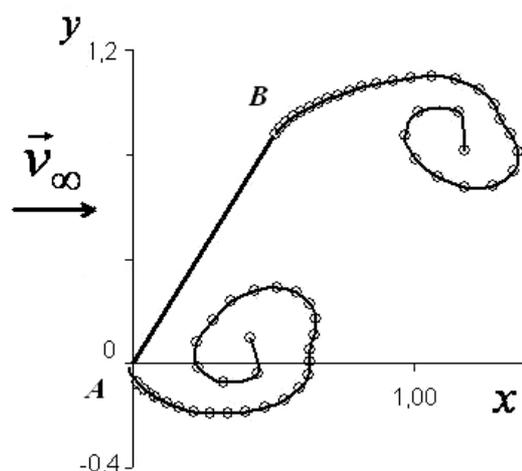


Рисунок 4 - Расчет формы вихревых следов по Алгоритму 2.

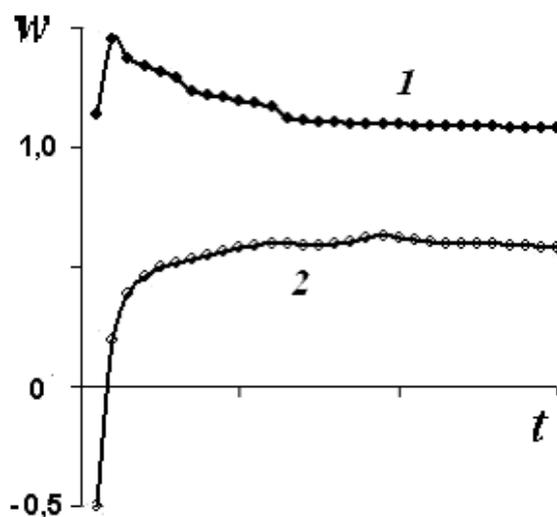


Рисунок 5 - Скорость схода вихревого следа с кромки A .

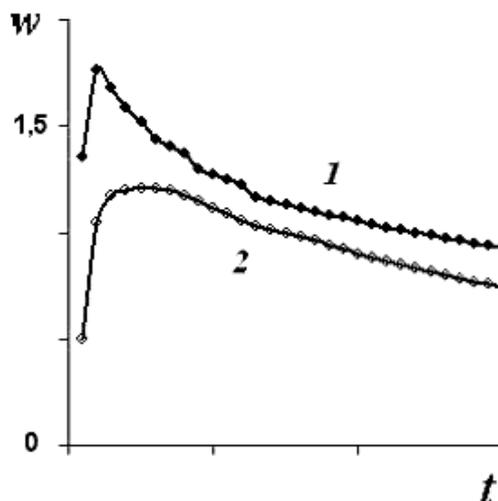


Рисунок 6 - Скорость схода вихревого следа с кромки B .

Расчеты для других углов наклона пластинки к оси Ox показали, что при его уменьшении различие скоростей в кромке A увеличивается, а в кромке B – уменьшается.

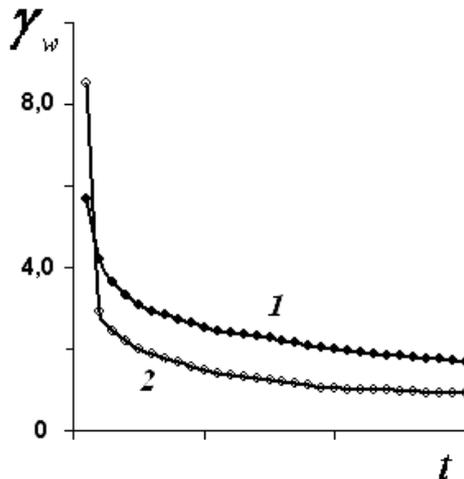


Рисунок 7 - Интенсивность вихревого следа в кромке A .

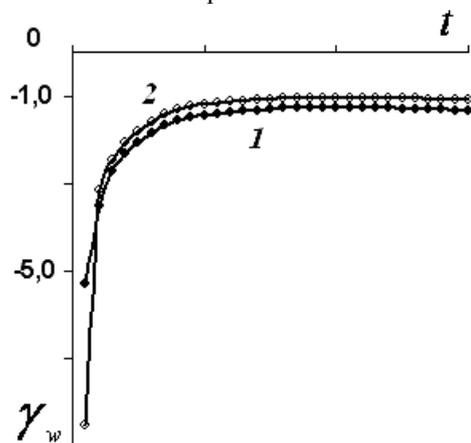


Рисунок 8 - Интенсивность вихревого следа в кромке B .

Графики на рисунках 7-8 представляют собой изменение по времени значений интенсивностей $\gamma_{wj}(0,t)$ вихревого слоя в точках схода.

Сравнение значений интенсивностей $\gamma_{wj}(0,t)$, рассчитанных по Алгоритмам 1 и 2, приводит к аналогичным выводам. Именно, различие величин интенсивностей в кромке A значительно, тогда как в кромке B мало.

Тенденция увеличения различия значений интенсивностей $\gamma_{wj}(0,t)$ в кромке A с уменьшением угла наклона пластинки к оси Ox сохраняется.

Результаты эксперимента показали, что выбор координат свободных дискретных вихрей, непосредственно сходящих с контура, может существенно влиять на гидродинамические характеристики течения жидкости в окрестности точек схода вихревых следов.

Литература

1. Горелов Д.Н. Критерии отрыва нестационарного потока идеальной жидкости с гладкого контура // ПМТФ. 2006. Т.47, № 1. С. 74-81.
2. Горелов Д.Н. Нелинейная теория крыла в плоском нестационарном потоке. – Омский филиал института математики им. С.Л. Соболева СО РАН – Омск: Полиграфический центр КАН, 2013.
3. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М. Л.: Гостехиздат, 1950.
4. Горелов Д.Н., Говорова А.И. Моделирование начальной стадии отрывного обтекания разомкнутого контура методом дискретных вихрей. // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 5, С. 24-33.

HEAT TRANSFER OF THE CIRCULAR CYLINDER IN THE VISCOUS BUBBLE FLOW

Damir A. Gubajdullin¹, Irina V. Morenko¹, Vladimir L. Fedyaev^{1,2}

¹Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center,
Russian Academy of Sciences (IME KazSC RAS)

²Kazan National Research Technical University (KSTU)
¹2/31, Lobachevsky str., 420111, Kazan, Russia
²10, K. Marx str., 420111, Kazan, Russia

Abstract

The unsteady nonisothermal bubble flow past of the circular cylinder to the moderate Reynolds number using the model of interpenetrating and interacting continua investigated numerically. The influence of the concentration of the dispersed phase on the hydrodynamics and heat transfer characteristics of the body are studied. Some features of the processes are determined.

Nomenclature

a	Bubble radius
\overline{C}_D	Average drag coefficient
\overline{C}_{p1}	Pressure drag coefficient
c_{p1}	Heat capacity of the water
ΔC_L	Lift coefficient amplitude
D	Cylinder diameter
\overline{F}_i	Horizontal components of the drag
G_i	Vertical components of the drag
I	Unit tensor
l	Longitudinal coordinate
n	Normal
\overline{Nu}_f	Average Nusselt number
p_0	Operating pressure
p_i	Pressure
Pr_f	Prandtl number of the fluid
Pr_w	Prandtl number of the wall
R	Cylinder radius
\overline{R}_i	Averaged interaction force between phases
Re_0	Reynolds number
Stk	Stokes number
T_0	Fluid temperature
T_w	Wall temperature
V	Volume
w	Velocity
We	Weber number
$x_i, 0, x_2$	Coordinate system
α_0	Volume concentration of the dispersed phase
β_0	Mass concentration of the dispersed phase
α_{i2}^*	Local convective heat transfer coefficient of the mixture
α_1	Volume concentration of the continuous phase
α_2	Volume concentration of the dispersed phase
λ_1	Thermal conductivity
μ_1	Dynamic viscosity coefficient
ρ_1	Fluid mass density
$\overline{\rho}_1$	Average density of the continuous phase
σ	Surface tension
τ	Time

Introduction

The increased interest of researchers to the mechanics problems of the bubble flow due to their wide-spread in nature and technology.

The particles presence in the stream with a relatively small volume concentration, but with the density of material of the particles significantly higher density of the continuous phase, the essentially influence on the streamlined bodies heat transfer and the hydrodynamic characteristics [1-5]. The heat transfer and the hydrodynamic drag increases, the amplitude of the lift force decreases with increases of the particle mass concentration. Increasing the number of Stokes leads to the fact that the heat transfer, the cylinder drag coefficient tend to their values, which are observed in case non-isothermal homogeneous flow past of the cylinder.

Most of the experimental and numerical studies performed for case the flow in the channels of various shapes when the particle density is much less than the continuous phase density and the volume concentration is high [6-8]. The papers where bubble flow past of the bluff bodies are studied a little. The two-phase flow (water-air) around an airfoil NACA studied in [9]. The flow rate of up to 10 m/s, and the volume concentration of the dispersed phase 0.12. The basic characteristics of the flow, such as the velocity field, turbulence intensity, gas content are estimated. Established that the bubbles are redistributed in the flow, moving from the high to the low pressure area. This redistribution of bubbles near the streamlined bodies is seen as a key point to understand the features of the hydrodynamic behavior profiles in two-phase flow. The results of numerical calculations of the bubble flow past of the circular cylinder used $k-\varepsilon$ turbulence model presented in [10]. They established that an increase in the volume concentration of bubbles increases the frequency of vortex shedding from the surface of the cylinder and the amplitude of the lift force.

Problem Statement

For the mathematical description of the fluid with bubbles chosen model of interpenetrating and interacting continua. Terms of the joint motion phases are set.

Quantities describing the interfacial interaction determined. Each phase is part of the mixture. When writing the averaged equations of motion of heterogeneous mixtures used spatial averaging. Additionally, the following assumptions are made [11]. Size of bubbles are much larger than the distance between the molecules, but is much smaller than the diameter of the streamlined cylinder. Monodisperse mixture, dispersed phase in each elementary macrovolume present in the form of spherical inclusions of the same radius a . Relatively, the formation of new bubbles, their fragmentation, clumping (coagulation), the deformation does not occur, the Weber number $We = 2a\bar{\rho}_1 w^2 / \sigma < 1$ ($\bar{\rho}_1$ – average density of the continuous medium, w is the characteristic velocity of the flow, σ – surface tension). It is believed that the bubbles do not rotate, do not bounce off the surface of the body, there are no phase transitions, viscosity and thermal conductivity are not manifested in the macroscopic transport of momentum and energy, are observed only in the process of interfacial interaction.

It is assumed that the bubbles entrained fluid, so the velocity of the carrier medium and the dispersed phase are close, when assessing the effect of interfacial interaction of the added mass is not taken into account, are not considered as the strength of gravity, lift. In addition, the movement of the mixture is assumed laminar, and the chaotic behavior of the bubbles is negligible, pulsating momentum transfer in the absence of external destabilizing factors is small [11].

In the calculations the carrier phase is water, the dispersed phase is the air bubbles. It is assumed that the density ρ_1 , coefficient of dynamic viscosity μ_1 , thermal conductivity λ_1 , specific heat water c_{p1} , relevant characteristics of the air depends on the temperature linearly in a selected range of change; characteristic velocity of the mixture is about $0.001 \div 0.0001$ m/c. Relatively, the low Mach number, compressibility of the environment is negligible. It should be noted that according to the existing map of flow regimes [6, 11], for these media and their parameters will be bubbly flow regime.

Further, as the computational domain is selected rectangle 10 m long, 4 m wide, which at a distance of 2 m on the inlet section and the same distance from the lateral boundaries the cylinder with radius $R = 0.1$ m is placed. This area is covered by a grid of triangular elements are condensed to the body surface. On the surface of the body is 200 nodes, the total number grid nodes 32 thousand, 64 thousand triangular elements. The coordinate system origin $x_1 0 x_2$ located in the center of the cylinder, axis $0 x_1$ directed along the free stream.

Governing equations. Taking into account that the media are incompressible, mass exchange between the phases does not occur, the mass conservation equation can be written as [11]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i) + \bar{v}_i \cdot \nabla(\alpha_i \rho_i) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

where τ is the time, $\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\bar{v}_i = v_{i1} \bar{i} + v_{i2} \bar{j}$ is the velocity vector i phase; α_1, α_2 is the volume concentration of the continuous and dispersed phases ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$);

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_2) + \bar{v}_2 \cdot \nabla(\alpha_2) = 0. \quad (2)$$

The momentum equation for i phase in the absence of gravitational forces can be written as

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\alpha_i \rho_i \bar{v}_i) + \bar{v}_i \cdot \nabla(\alpha_i \rho_i \bar{v}_i) = -\alpha_i \nabla p_i + \nabla \cdot \Pi_i + \bar{R}_i. \quad (3)$$

Here, p_i – average pressure i phase; $\Pi_i = \alpha_i \mu_i \left(\nabla \bar{v}_i + (\nabla \bar{v}_i)^T \right) + \alpha_i \left(\sigma_i - \frac{2}{3} \mu_i \right) \nabla \bar{v}_i I$ – stress tensor in the i phase; μ_i, σ_i – shear and volume viscosity; I – unit tensor; $\bar{R}_i = \frac{(-1)^i}{V} \int_V \gamma (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) dV$ –

averaged interaction force between phases, V – volume, $\gamma = \alpha_2 \rho_2 f / \delta$, $\delta = 2 \rho_2 a^2 / 9 \mu_1$, $f = \frac{c_D \text{Re}_{21}}{24}$,

$$c_D = \begin{cases} 24(1 + 0.15 \text{Re}_{21}^{0.687}) / \text{Re}_{21}, & \text{Re}_{21} \leq 1000 \\ 0.44, & \text{Re}_{21} > 1000 \end{cases},$$

$$\text{Re}_{21} = \frac{2 \rho_1 |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| a}{\mu_1} \text{ – Reynolds number of the}$$

relative motion of the phases.

Equation of heat transfer in the continuous and dispersed phases

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_i c_{pi} T_i) + \bar{v}_i \cdot \nabla(\rho_i c_{pi} T_i) = \nabla \cdot (\lambda_i \nabla T_i) + Q_i, \quad (4)$$

where $Q_i = \frac{(-1)^i}{V} \int_V 4 \pi a^2 \alpha_2 \beta_{21} (T_2 - T_1) dV$, β_{21} is the heat transfer coefficient between the continuous and dispersed phases [11].

Governing equations (1)–(4) complemented *boundary and initial conditions*.

The input section, perpendicular to the axis $0 x_1$, lets: $v_{12} = v_{21} = w$, $v_{21} = v_{22} = 0$; operating pressure $p_0 = 0.1$ MPa; temperature of the carrier and the dispersed phase is the equal: $T_1 = T_2 = T_0 = \text{const}$; concentration $\alpha_2 = \alpha_0 = \text{const}$.

At the exit of the computational domain, we use the following boundary conditions:

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial x_1} = \frac{\partial v_{i2}}{\partial x_1} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} = \frac{\partial T_i}{\partial x_1} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = 0;$$

which means that the alignment of the output as the hydrodynamic and thermal characteristics.

The condition on the side boundaries can be written in the form:

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial x_2} = \frac{\partial p_i}{\partial x_2} = \frac{\partial T_i}{\partial x_2} = 0, \quad v_{i2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} = 0.$$

It is believed that on the surface of the cylinder realized slip condition of the continuous and dispersed phases $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$; there is a ideal thermal contact: $T_1 = T_2 = T_w$. Heat flux is

$$q_i = -\lambda_i \partial T_i / \partial n = \alpha_i^* (T_w - T_i^*) \quad (i=1,2),$$

where n – outward normal to the surface of the cylinder, T_i^* – temperature i phase away from the cylinder (average mass temperature), α_i^* – required local convective heat transfer coefficient.

In the initial time moment $\tau = 0$ the liquid begins to move instantaneous, $v_{i1} = w$, $v_{i2} = 0$, $p = p_0$, $T_i = T_0$, $\alpha_2 = \alpha_0$.

The integration of the corresponding equations (1) - (4) is performed using program complex Fluent (license KSTU). The implicit solver of second order accuracy selected. The pressure correction procedure of SIMPLE is used. The convergence criterion for all parameters equals 10^{-8} , the maximum number of iterations at each time step 40.

Numerical Simulation Results

Test

Previously flow and heat transfer of the circular cylinder of the homogeneous fluid (water) is considered for Reynolds $Re_f = 100$, when $w = 5 \cdot 10^{-4}$ m/c; $T_0 = 293$ K, $T_w = 343$ K. It is shown that the time-averaged drag coefficient $\bar{C}_D = 1.28$, the amplitude of the lift coefficient acting on the cylinder by the fluid, $\Delta C_L = 0.395$, Prandtl number of the fluid $Pr_f = 6.99$, wall $Pr_w = 2.89$, average Nusselt number $\bar{Nu}_f = 13.42$. The results are good agreement with numerical and experimental data of other authors [1,2,12]. In particular, the according to the experimental dependence [13]

$$\bar{Nu}_f = 0.52 Re_f^{0.5} Pr_f^{0.37} (Pr_f / Pr_w)^{0.25},$$

with calculated values Pr_f , Pr_w average Nusselt number $\bar{Nu}_f = 13.315$.

Calculation results

In the following calculations, the values T_0 , T_w remain the same as when testing. Volume concentration of the dispersed phase at the inlet to the computational domain α_0 varies from 0.1 to 0.5.

$$\text{Reynolds number of the mixture } Re_0 = \frac{\rho_0 w D}{\mu_0}$$

determined by the velocity w , the effective density of the mixture at the inlet of the computational domain $\rho_0 = (1 - \alpha_0) \rho_1 + \alpha_0 \rho_2$, effective dynamic viscosity $\mu_0 = \mu_1 (1 + \alpha_0)$ [11]. Note that Reynolds number in this case is a function of the concentration, i.e., $Re_0 = Re_0(\alpha_0)$.

The velocity is fixed during the numerical experiments $w = 0.0005$ m/c. The corresponding values of the volume concentration α_0 , Reynolds number are shown in table 1. It can be seen that as the concentra-

tion of the dispersed phase Reynolds number Re_0 decreases. The mass concentration of the air on the inlet β_0 not exceed 0.0012.

Table 1 - Volume concentration α_0 , Reynolds number Re_0

α_0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Re_0	100.0	81.7	66.6	53.8	42.8	33.3

$$\text{Stokes number } Stk = \frac{d_p^2 w \rho_2}{18 \mu_1 D}, \text{ determined by the}$$

parameters of water and air at the inlet to the computational domain, the diameter of the cylinder $D = 0.2$ m, diameter bubbles $d_p = 2a$ changing d_p from $5 \cdot 10^{-4}$ m to $5 \cdot 10^{-3}$ m varies $4.1 \cdot 10^{-8} \div 4.24 \cdot 10^{-6}$. It is very small value. As a result of these calculations and the input parameters is established that the heated water is localized near the surface of the cylinder, in the vortex structures coming down from it, the volume concentration of the dispersed phase increases near the body.

Volume concentration of water in this area in accordance with the dependent $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, conversely, decreases. The dispersed phase is concentrated in the low-pressure area, center of the vortex.

It is also interesting the change in concentration of the dispersed phase along the surface of the cylinder. The Figure 1 show, that the concentration of the dispersed phase increases sharply in a neighborhood of the stagnation point of the body ($l = 0.0$ m), near the regions of the vortex shedding from the surface of the cylinder ($l = 0.195$ m).

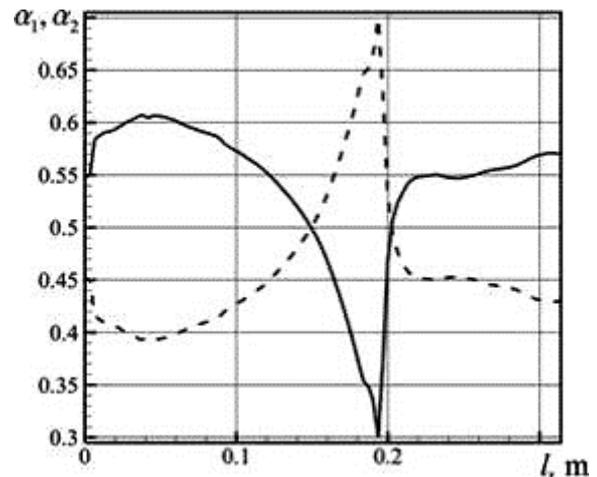


Figure 1 - Changing the volume concentration of phase along the surface of the cylinder ($\alpha_0 = 0.5$, $d_p = 0.005$ m):

α_1 – volume concentration of the continuous phase (full line);

α_2 – volume concentration of the dispersed phase (dotted line);

l – longitudinal coordinate

The local convective heat transfer coefficient of the mixture α_{12}^* reaches maximum on the windward side of the cylinder (Figure 2). Interesting that minimum value α_{12}^* observed on the surface of the body, the downstream than the jump concentration of the dispersed phase. However, the sharp increase in the concentration of the dispersed phase near the stagnation point past a cylinder ($l=0.0$ m), the separation point of the flow ($l=0.195$ m) reduces the heat transfer coefficient. This is clearly seen on the Figure 2.

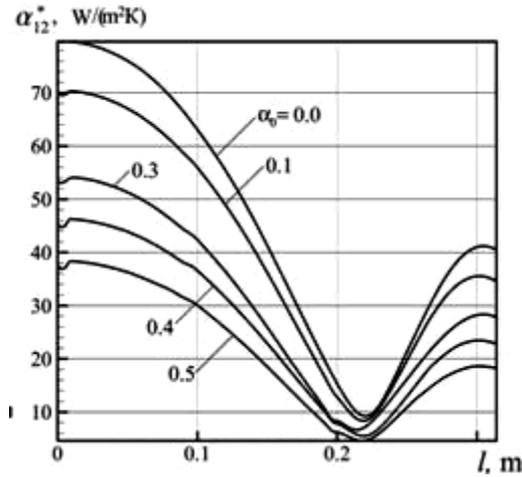


Figure 2 - Convective heat transfer coefficient on the surface of the cylinder

Further the integral characteristics of the processes studies. Increasing the concentration of the dispersed phase leads to the fact that heat transfer from a heated cylinder liquid bubble worsens, average convective heat transfer coefficient $\bar{\alpha}_{12}^*$ (Figure 3), average Nusselt number $\bar{Nu}_{12} = \bar{\alpha}_{12}^* D / ((1-\alpha_0)\lambda_1 + \alpha_0\lambda_2)$ (Figure 4) decreases linearly

$$\bar{\alpha}_{12}^* = \bar{\alpha}_f - 45\alpha_0, \quad \bar{Nu}_{12} = \bar{Nu}_f - 1.5\alpha_0,$$

where $\bar{\alpha}_f$ and \bar{Nu}_f are the average heat transfer coefficient and the average Nusselt number in case the homogeneous flow past of the cylinder ($\bar{\alpha}_f = 44.1$ W/(m²·K), $\bar{Nu}_f = 13.315$).

Values \bar{C}_D , ΔC_L , respectively, the average coefficient of drag, the amplitude of the lift coefficient of the unit length cylinder streamlined bubble liquid is calculated using the relations:

$$\bar{C}_D = \frac{\bar{F}_1 + \bar{F}_2}{0.5\rho_0 w^2 D}, \quad \Delta C_L = \frac{G_1 + G_2}{0.5\rho_0 w^2 D},$$

where \bar{F}_1, \bar{F}_2 is the time average horizontal components of the drag acting on the body of the continuous and the dispersed phase; G_1, G_2 is the vertical components of these forces.

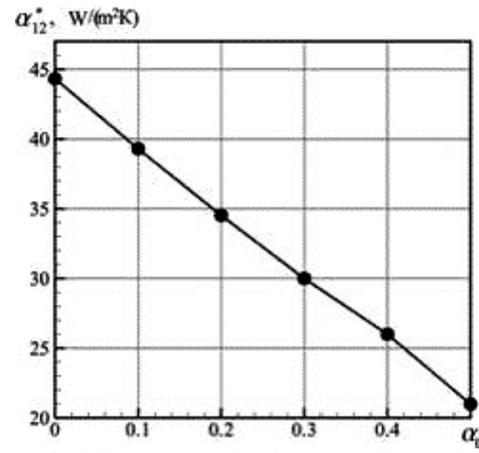


Figure 3 - Mean convective heat transfer coefficient of the cylinder on the concentration α_0

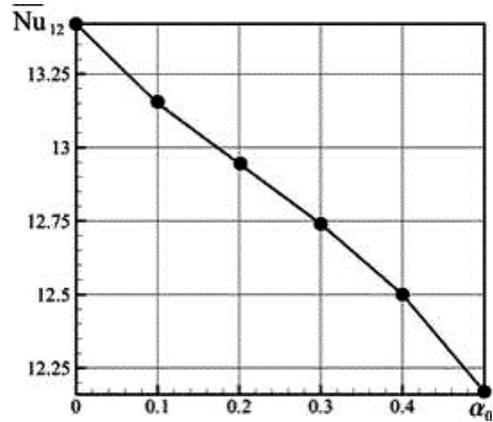


Figure 4 - Dependence of the average Nusselt number of the cylinder on the concentration α_0

Found that when considering laminar flow mixture when the volume concentration of the dispersed phase at the inlet to the computational domain α_0 changes from 0.0 to 0.5, Strouhal number increases by only 1.6%. Whereas in the turbulent regime and change α_0 from 0.02 to 0.05 increases by 5.4% [10].

As the volume concentration α_0 average drag coefficient of the cylinder \bar{C}_D changes little, however, the time-averaged longitudinal component of the drag $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ decreases from $3.20 \cdot 10^{-5}$ N to $1.59 \cdot 10^{-5}$ N changing α_0 from 0.0 to 0.5.

In contrast to the full-scale experiment, the numerical calculation to determine separately the average drag coefficients of the cylinders $\bar{C}_{D1}, \bar{C}_{D2}$, due to the continuous and dispersed phases, as well as to estimate the average drag coefficients of pressure and friction:

$$\bar{C}_{pi} = \frac{\bar{F}_{pi}}{0.5\rho_0 w^2 D}, \quad \bar{C}_{fi} = \frac{\bar{F}_{fi}}{0.5\rho_0 w^2 D}, \quad i = 1, 2;$$

where $\bar{F}_{pi}, \bar{F}_{fi}$ – averaged over the time projection on the axis $0x_i$ the resulting pressure, friction forces acting on the surface of the cylinder by i phase.

From the results of the calculations, it follows that an increase in the volume concentration of the dispersed phase α_0 average drag coefficient of the cylinder \bar{C}_{D1} decreases linearly,

$$\bar{C}_{D1} = \bar{C}_{Df} - 1.07\alpha_0,$$

where \bar{C}_{Df} is drag coefficient of the cylinder in the homogeneous flow. The change \bar{C}_{D1} is mainly due to the drag coefficient of pressure \bar{C}_{p1} . The coefficient \bar{C}_{f1} decreased insignificantly on 1÷2%.

The second component of the drag coefficient of the cylinder \bar{C}_{D2} , on the contrary, increases with increasing volume concentration α_0 . The result is that, as mentioned above, the drag coefficient \bar{C}_D changing α_0 in this range remains almost constant.

Conclusions

In case the laminar nonisothermal bubble flow past of the circular cylinder the heated water is localized in the vortex structures, coming down from the surface of the cylinder, the volume concentration of the dispersed phase along the surface varies greatly, greatly increases near the regions of vortex shedding and the stagnation point of the body. So that the heat transfer in these areas is deteriorating. The coefficient of drag force of the cylinder due to the continuous phase is reduced and dispersed – increases with the volume concentration of the dispersed phase at the inlet of the computational domain. As a result, the total drag coefficient varies only slightly, while the average time for the horizontal component of the force of resistance is reduced significantly, the amplitude of the lift force increases.

Heated cylinder heat transfer to the flow is deteriorating as the volume concentration of the dispersed phase. And the change of the average coefficient of convective heat transfer of the cylinder, the Nusselt number as a function of the concentration of the dispersed phase is near to linear.

Thus, in this case, changing the volume concentration of the dispersed phase to the cylinder from 0.0 to 0.5 it is possible to reduce flow resistance is almost 2 times, reduce heat loss by 49.0%.

Acknowledgments

Work performed under the Federal Program "Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia" for 2009-2013 (state contract N 14.V37.21.0644).

References

1. Volkov A.N., Tsirkunov Y.M. Influence of dispersed particles on the two-phase unsteady structure of the wake past a cylinder at moderate Reynolds numbers // *Mathematical modeling*. 2003. T. 15. N.7. P. 98-110.
2. Yao J., Zhao Y., Hu G., Fan J., Cen K. Numerical Simulation of Particle Dispersion in the Wake of a Circular Cylinder // *Aerosol Science and Technology*. 2009. No. 43. P. 174-187.
3. Morenko I.V., Fedyaev V.L. Features of flow past a cylinder in the two-phase flow // *Ecological Bulletin scientific centers of Black Sea Economic Cooperation*. 2010. N.4. P. 52-58.
4. Morenko I.V., Fedyaev V.L. Nonisothermal monodispersed mixture flow around a circular cylinder // *Thermal processes in engineering*. 2011. T. 3. N.6. P. 242-252.
5. Golubkina I.V., Osiptsov A.N., Sakharov V.I. Little dusty supersonic flow past of the cylinder at the interaction of the bow shock with an oblique shock // *Math. RAS. Fluid Dynamics*. 2011. N.1. P. 59-72.
6. Handbook of Heat Exchangers. Vol.1 / Trans. from English., B.S. Petuhova, V.K. Shikova. - M. Energoatomizdat, 1987. 560 p.
7. Danilov I., Son E. Shock wave in a bubble flow with high gas content // *EPL* 2011. V. 94. 54001 (doi: 10.1209/0295-5075/94/54001).
8. Brennen Ch. E. Fundamentals of Multiphase Flows. California Institute of Technology Pasadena, California. Cambridge University Press. 2005. ISBN 0521 848040. 410 p.
9. Ohashi H., Matsumoto Y., Ichikawa Y. and Tsukiyama T. Air/water two-phase flow test tunnel for airfoil studies // *Experiments in Fluids*. 1990. No. 8. P. 249-256.
10. Zhou Y., Hong W., Wang G., Sun B., Liu W. Numerical Simulation of Vortex Shedding Frequency and the Oscillation Lift Based on Gas-liquid Two-phase Flow Around Circular Cylinders in the Vertical Pipeline // *International Conference on Power Engineering-2007*, October 23-27, 2007, Hangzhou, China. P. 1361-1366.
11. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. Part I. M.: Nauka, 1987. 464 p.
12. Young D.L., Huang J.L., Eldho T.I. Simulation of laminar vortex shedding flow past cylinders using a coupled BEM and FEM model // *Comput. Methods appl. Mech. Eng.* 2001. No. 190. P. 5975-5998.
13. Kutateladze S.S. Heat transfer and flow resistance: A Reference Guide. M.: Energoatomizdat, 1990. 367 p.

ПОСТРОЕНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Житников В.П.¹, Муксимова Р.Р.²

¹Уфимский государственный авиационный технический университет
²Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

¹450000, Уфа, ул. К. Маркса, 12
²196210 Россия, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38
zhitnik@mail.ru, rose_muks@rambler.ru

Аннотация

Рассмотрены способы построения приближенных математических моделей процессов (на примере электрохимического формообразования) с помощью численно-аналитического решения краевых задач и последующего построения интерполяционных зависимостей на основе полученных численных результатов. Предложены приемы, позволяющие построение таких зависимостей в условиях неполноты исходных данных и способы оценки их погрешности.

Введение

Необходимость построения математических моделей, основанных на анализе и обработке данных, полученных путем численного решения сложных задач, объясняется, во-первых, получением возможности практического использования результатов, во-вторых, позволяет разработать базу данных для решения более общих задач моделирования. Одним из методов построения таких моделей, является интерполяция. Однако эта задача во многих случаях является некорректной, и в ряде случаев необходима разработка специальных методов и приемов построения и верификации интерполяционных моделей.

В работе рассмотрено моделирование процессов размерной электрохимической обработки (ЭХО) [1], которое при допущении об однородности электролита сводятся к решению задач Хеле-Шоу [2].

При исследовании формообразования анодной поверхности в процессе электрохимического растворения необходимо учитывать неравномерность зазоров в межэлектродном пространстве, что требует применения сложных численных методов и алгоритмов.

1. Постановка стационарной и предельно-стационарной задач.

Простейшие примеры

Рассмотрим в качестве примера простейшую задачу ЭХО с плоскопараллельным МЭП и ЭИ, движущимся вертикально вниз со скоростью V_{et} (рис. 1). Угол между нормалью к ЭИ и направлением движения ЭИ равен ϑ . Текущее расстояние между электродами равно $S(t, \vartheta)$.

Допустим, к электродам подключено напряжение $U(t)$ в виде прямоугольных импульсов с амплитудным значением U . Тогда напряженность во время импульса равна $E = E_n = \frac{U}{S}$, где U – разность потенциалов между анодом и катодом (с учетом разности потенциалов в двойном слое вблизи анода и катода [2]), S – величина зазора.

При достаточно коротких импульсах можно пренебречь изменением зазора за время импульса. Тогда согласно закону Фарадея [2]

$$V_{ecm} = k \frac{U}{S} \eta_0.$$

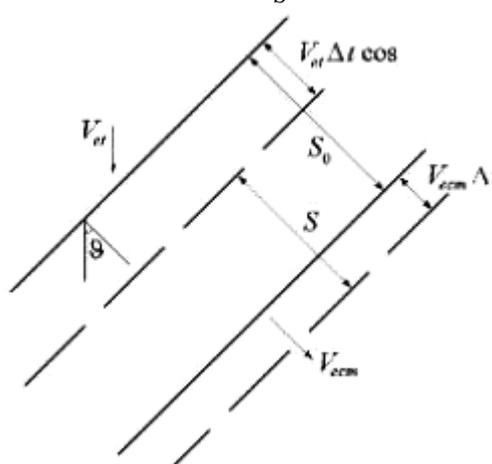


Рисунок 1 – Плоскопараллельное МЭП

Скорость изменения расстояния между электродами определяется разностью между скоростью электрохимического растворения и нормальной к аноду скоростью движения ЭИ:

$$\frac{dS}{dt} = k \frac{U}{S} \eta_0 - V_{et} \cos \vartheta. \quad (1)$$

В случае стационарного процесса ($dS/dt = 0$) расстояние между электродами будет определяться при решении уравнения

$$S_\vartheta = k \eta_0 \frac{U}{V_{et} \cos \vartheta} = \frac{S_{st}}{\cos \vartheta}, \quad (2)$$

где S_{st} – величина стационарного зазора при $\vartheta=0$.

Это соотношение в литературе принято называть «косинусным приближением» при решении задач формообразования криволинейным ЭИ.

При решении задач в точной нелинейной постановке краевое условие стационарности ($dS/dt = 0$) решения (1) приобретает вид [2]

$$|E| = E_0 \cos \vartheta, \quad E_0 = \frac{V_{et}}{k\eta_0},$$

где E – вектор напряженности в точках обрабатываемой поверхности; E_0 – модуль напряженности в точках, где $\vartheta=0$.

Для решения стационарных задач удобнее применить метод годографа, т.е. рассмотреть область на плоскости годографа напряженности

$$\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = |E|e^{-i\theta},$$

где θ – угол между вектором напряженности и осью x . Для этого условие стационарности следует видоизменить, используя связь величин углов $\theta = \vartheta - \pi/2$. Тогда условие стационарности примет вид

$$|E| = -E_0 \sin \theta, \quad E_0 = \frac{V_{et}}{k\eta_0}. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с начальным условием $S(0, \vartheta) = S_{0\vartheta}$ может быть получено в аналитическом виде

$$\frac{S(t, \vartheta) - S_{\vartheta}}{S_{0\vartheta} - S_{\vartheta}} e^{\frac{S(t, \vartheta) - S_{0\vartheta}}{S_{\vartheta}}} = e^{\frac{V_{et} \cos \vartheta}{S_{\vartheta}} t} = e^{\frac{V_{et} \cos^2 \vartheta}{S_{st}} t}.$$

При $t \rightarrow \infty$

$$S(t, \vartheta) \approx S_{\vartheta} + (S_{0\vartheta} - S_{\vartheta}) e^{\frac{S_{0\vartheta} - S_{\vartheta}}{S_{\vartheta}} e^{\frac{V_{et} \cos^2 \vartheta}{S_{st}} t}}.$$

Таким образом, стационарный процесс устанавливается по экспоненциальному закону $e^{-\lambda t}$ с декрементом $\lambda = \frac{V_{et}}{S_{st}} \cos^2 \vartheta = \frac{k\eta_0 U}{S_{st}^2} \cos^2 \vartheta$.

При решении задач в точной нелинейной постановке краевое условие предельного режима растворения имеет вид

$$|E| = \frac{j_1}{\kappa} = E_1, \quad (4)$$

где E – вектор напряженности в точках обрабатываемой поверхности.

При подвижном ЭИ и $S(t) > \frac{\kappa U}{j_1}$ растворения не происходит, и зазор, согласно (1), уменьшается со скоростью $\frac{dS}{dt} = -V_{et} \cos \vartheta$. За конечное время $t = \frac{S_0 - \kappa U / j_1}{V_{et} \cos \vartheta}$ устанавливается не зависящее от угла ϑ значение зазора $\kappa U / j_1$.

Рассмотрим теперь упрощенное решение задачи при обработке круглым ЭИ радиуса R (рис. 2).

Для определения величины зазора можно использовать формулу (3), только при искривленном ЭИ модуль напряженности нельзя считать равным $\frac{U}{S}$. Для определения напряженности воспользуемся

моделью «цилиндрического конденсатора». Потенциал точечного источника равен

$$\phi = N \ln \rho + const,$$

где N – интенсивность источника; ρ – расстояние от источника до точки, где производится измерение.

Тогда, поскольку разность потенциалов между анодом и катодом равна U , то

$$U = N \ln(R + S) - N \ln R = N \ln \left(1 + \frac{S}{R} \right).$$

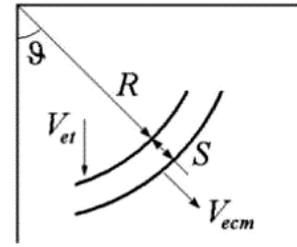


Рисунок 2 – Обработка искривленным ЭИ

Напряженность от точечного источника на аноде

$$|E| = \frac{N}{\rho_a} = \frac{U}{(R + S) \ln \left(1 + \frac{S}{R} \right)}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в (3), получим

$$\frac{U}{E_0 (R + S) \ln \left(1 + \frac{S}{R} \right)} = \cos \vartheta.$$

Вводя некоторый характерный размер $l = \frac{U}{E_0}$ и

перейдя к безразмерным величинам $r = \frac{R}{l}$, $s = \frac{S}{l}$,

получим уравнение

$$\left(1 + \frac{s}{r} \right) \ln \left(1 + \frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r \cos \vartheta} \quad (6)$$

или $\left(1 + \frac{s'}{r'} \right) \ln \left(1 + \frac{s'}{r'} \right) = \frac{1}{r'}$

где $r' = r \cos \vartheta$, $s' = s \cos \vartheta$.

Решая это трансцендентное уравнение численно, можно получить функции $s'(r')$ и $s(\vartheta, r) = s'(r \cos \vartheta) / \cos \vartheta$, позволяющие приближенно получить значения зазора, которые могут быть использованы на практике для определения формы ЭИ по заданной форме детали. Однако следует найти область, где их возможно использовать с приемлемой погрешностью, сравнив с решением нелинейной задачи и дополнив результатами этих решений.

Для приближенного решения задачи в предельной постановке необходимо подставить (5) в (4) и, введя безразмерные величины $r = \frac{R}{l}$, $s = \frac{S}{l}$ при

$l = \frac{U}{E_1}$, получим уравнение

$$\left(1 + \frac{s}{r} \right) \ln \left(1 + \frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Таким образом, в предельном решении величина зазора не зависит от ϑ .

2. Численно-аналитическое решение задачи стационарной электрохимической обработки плоским ЭИ с полукруглым выступом

Рассмотрим стационарную задачу об обработке полукруглым электрод-инструментом (ЭИ) $A FGB'$,

который движется вертикально вниз со скоростью V_{et} (рис. 3). Обрабатываемая поверхность $AMDNB$ приобретает стационарную форму. Подобные задачи с другими условиями на неизвестной границе рассматривались ранее [1].

Для решения таких задач удобнее применить метод годографа, т.е. рассмотреть область на плоскости годографа напряженности $\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = |E|e^{-i\theta}$, где θ – угол между вектором напряженности и осью x .

При этом условие стационарности – это есть уравнение данной окружности, и с учетом точек перегиба, граница, соответствующая обрабатываемой поверхности, отображается на разрез по дуге окружности. На горизонтальных частях угол равен $-\pi/2$ – это вертикальные участки на плоскости годографа. Если форму границы FCG на плоскости годографа задать в виде окружности, то форма границ на плоскости \bar{E} известна, и согласно теореме Римана, можно, задав соответствие трех точек на границе, найти единственное конформное отображение \bar{E} на какую-нибудь параметрическую плоскость, например, на полукольцо ζ (рис. 4).

Форма области на плоскости комплексного потенциала для любой формы выступа на плоском катоде определяется условиями

$$\operatorname{Re} W = \begin{cases} -U, & \text{на } A'B', \\ 0, & \text{на } AB. \end{cases}$$

В связи с этими условиями на плоскости W область представляет собой полосу [3].

Таким образом, при решении задач методом годографа необходимо найти два конформных отображения $\bar{E}(\zeta)$ и $W(\zeta)$. Тогда отображение на физическую плоскость получается интегрированием выражения

$$dZ = \frac{1}{\bar{E}(\zeta)} \frac{dW}{d\zeta}(\zeta) d\zeta.$$

Если форма границы FCG на плоскости годографа задана в виде окружности, то получается задача обработки неким криволинейным ЭИ, и эта задача имеет аналитическое решение, которое получено ниже и использовалось в качестве тестового.

Асимптотическая величина зазора S известна. Напряженность на бесконечности слева и справа равна $E_0=U/S$, где U – разность потенциалов между анодом (обрабатываемой поверхностью) и катодом (ЭИ).

На плоскости годографа напряженности $\bar{E} = \frac{dW}{dZ}$ образом границы ЭИ (рис. 4) является неко-

торая кривая (при этом на физической плоскости форма границы ЭИ будет представлять круг). Аноду, согласно (3), соответствует разрез по дуге окружности радиуса $E_0/2$. В качестве параметрической области ζ выберем полукольцо (рис. 4, б). С использованием метода ТФКП (конформных отображений) задача была решена и дифференциал получен в виде

$$dZ = \frac{4U}{\pi E_0 \lambda \sqrt{\zeta}} \left(-i \frac{\zeta - v}{v\zeta - p^2} e^{\sum_{m=1}^n C_m (p^{-m}\zeta^m - p^m\zeta^{-m})} + i \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{p}}{\zeta - p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{(2m-1)/2}}{(p^{(2m-1)/2} - p^{-(2m-1)/2})} \right) \times \\ \times \left(p^{-(2m-1)/2} \zeta^{(m-1)} - p^{(2m-1)/2} \zeta^{-m} \right) d\zeta, \quad (8)$$

где C_m – неизвестные действительные коэффициенты ряда Лорана.

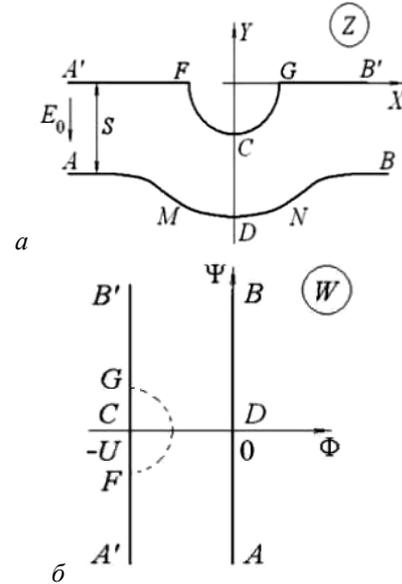


Рисунок 3

а – физическая плоскость;
б – плоскость комплексного потенциала

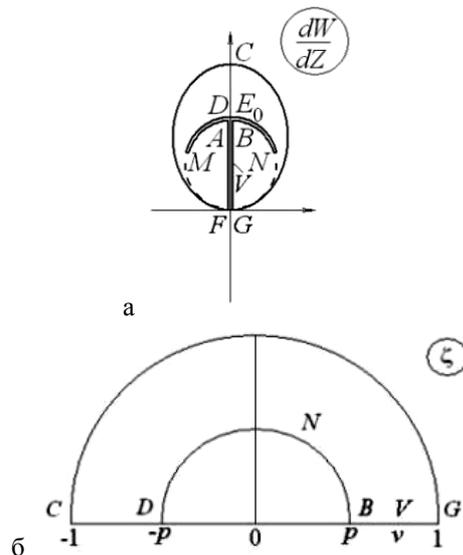


Рисунок 4 – Плоскости:

а – годографа напряженности;
б – параметрического переменного ζ

Конформное отображение $Z(\zeta)$ находится с помощью численного интегрирования полученного выше выражения.

Задача решается численно методом коллокаций. В сумме $\sum C_m (\zeta^m - p^{2m}\zeta^{-m})$, как было сказано, сохраняется конечное число n слагаемых, а уравнение $|z(e^{i\sigma})|^2 = r^2$, $r = R/S$ выполняется в конечном числе точек границы области $\zeta = e^{i\sigma_m}$, $\sigma_m = \pi m/n$, $m = 0, \dots, n$.

Получаемая таким образом система нелинейных уравнений решается относительно параметров C_m ($m \leq n$), p методом Ньютона с регулированием шага.

Формы стационарной поверхности для различных радиусов r и их образы на плоскости годографа показаны на рис. 5, 6.

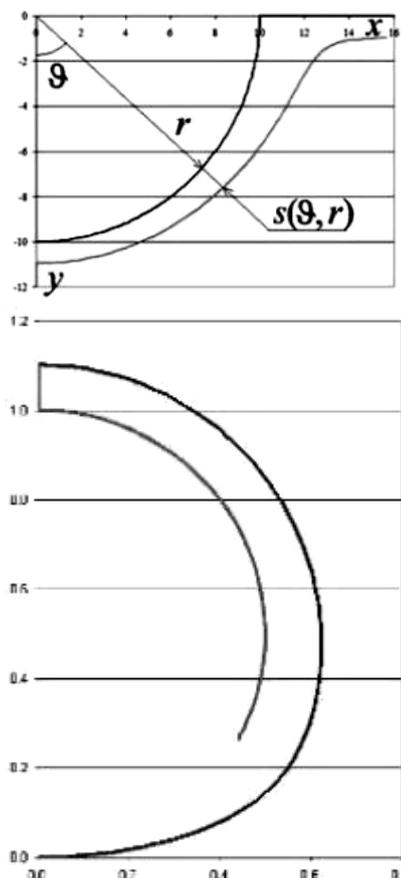


Рисунок 5 – Форма МЭП и плоскости годографа при $R/S=10$

На рис. 7 показаны результаты оценки отличия формы от окружности и погрешности вычисления бокового зазора (для $\vartheta=80^\circ$).

Для оценки относительной погрешности значений параметров применяется фильтрация последовательности вычисленных значений торцевого зазора s_r для $n=5; 6; 7; \dots 60$ (кривая 0) и результаты 1-й-3-й фильтрации этой зависимости (кривые 1-3). Толстыми линиями на рис. 8 обозначены результаты попарного вычитания [5], тонкими – результаты сравнения с выбранным значением эталона. В результате получены эталонные значения 0.9257193873411 для $r=5$ и 0.985266909430 для $r=32$. В результате оценки погрешности эталона получаются величины менее 10^{-13} - 10^{-12} .

Отметим, что зависимость погрешности от числа точек коллокаций n представляется суммой показательных функций

$$z_n = z + c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n + \dots + c_L \gamma_L^n + \Delta(n),$$

поэтому в формуле фильтрации [4] вместо Q^{kj} используется γ_j^l .

На рис. 9 показаны результаты уточнения и оценки погрешности суммирования ряда в (8). Значения параметра p соответствуют $r=32$ и более. Видно,

что точность порядка 14 значащих цифр может быть достигнута при $n=75 \div 150$.

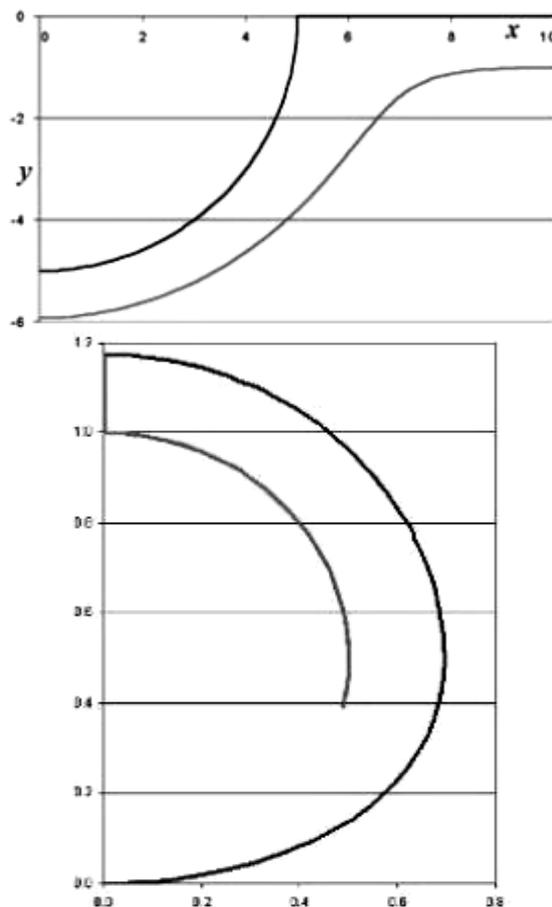


Рисунок 6 – Форма МЭП и плоскости годографа при $R/S=5$

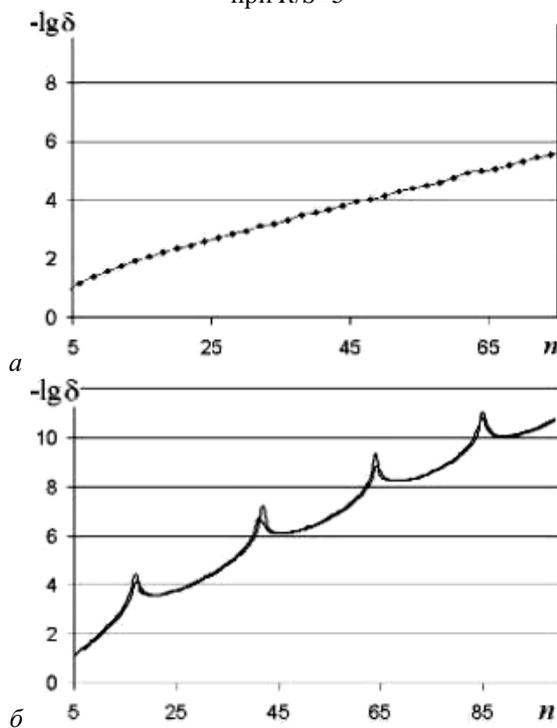


Рисунок 7 – Оценка погрешности для $r=32$:
а – отличие формы ЭИ от окружности;
б – зазора для $\vartheta=80^\circ$

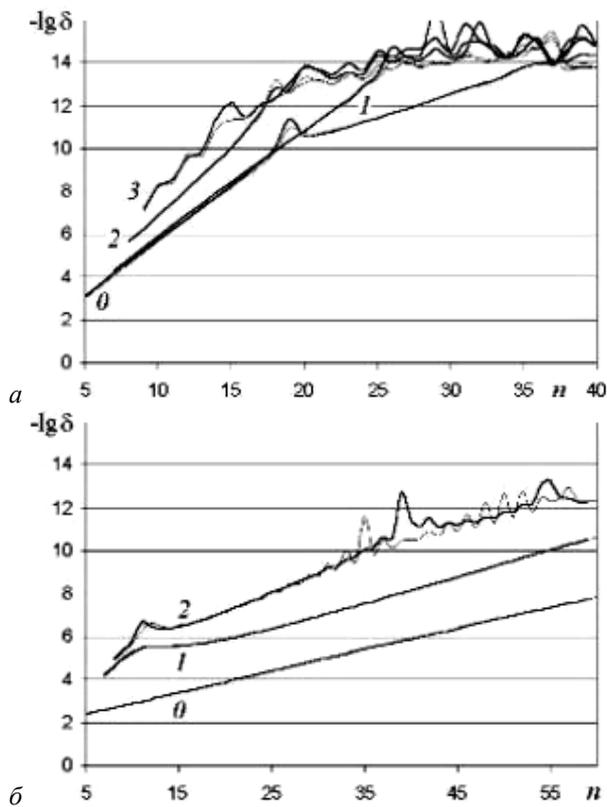


Рисунок 8 – Оценка погрешности параметра $s_T(r)$:
 а – для $r=5$; б – для $r=32$

Величину торцевого зазора следует сравнить со значением $s_0(r)$, полученным из модели (6) «цилиндрического конденсатора» (см. табл. 1).

На рис. 10, а с помощью фильтрации с использованием формулы Нэвилла [5] получена оценка разности $1-s_T(r)$. Оценка показывает, что главный член разности имеет порядок $\sim r^{-1}$. Аналогично получена оценка разности $s_T(r)-s_0(r)$ (10,б), которая показывает, что эта разность имеет порядок $\sim r^{-2}$.

Рассмотрим зависимости величин зазоров $s(\vartheta, r)$ от угла ϑ между лучом, исходящим из центра полукруглой части ЭИ и проходящим через точку на обрабатываемой поверхности с вертикалью при различных r , которые определяются по набору дискретных значений $(x(\sigma_k), y(\sigma_k))$ по формулам $\vartheta = -\arctg(x(\sigma_k)/y(\sigma_k))$, $s = \sqrt{x^2(\sigma_k) - y^2(\sigma_k)} - r$. На рис. 11 приведены графики зависимостей $f_1(\vartheta, r) = s(\vartheta, r)/s_0 - 1$ для $r=2, 4, 8, \dots, 28$ (значения ϑ даны в градусах).

Проведем сравнение полученных при решении задачи численных данных с результатами «косинусного приближения» (кривая ∞ , см. рис. 11). Согласно результатам исследований, «косинусное приближение» позволяет определить значение зазора с относительной погрешностью около 10% для $r \geq 28$ и $\theta \leq 50^\circ$ (около 20% для $\theta \leq 60^\circ$). Для более точного определения зазора далее проводится построение численной модели формообразования зазора на основе полученных данных.

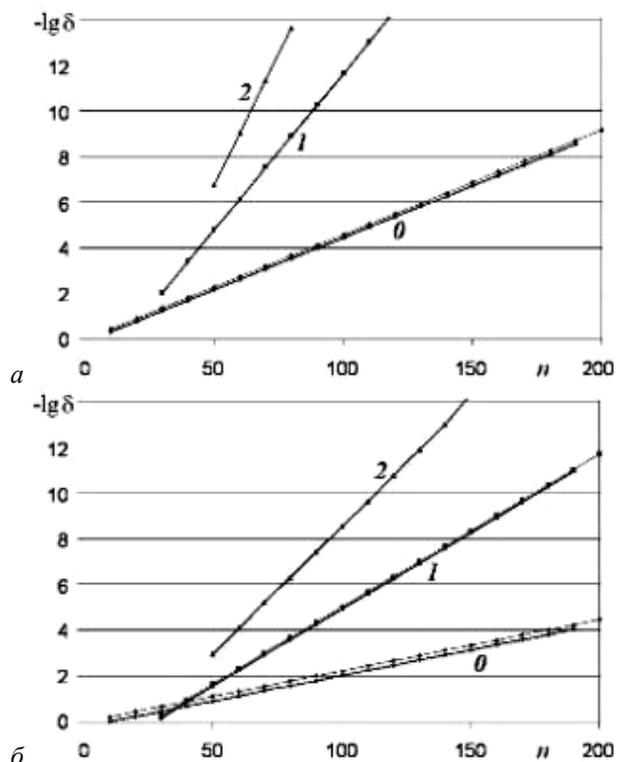


Рисунок 9 – Оценка погрешности вычисления сумм в (8): а – для $p=0.9$; б – для $p=0.95$

Таблица 1

r	s_T	s_0	s_T-s_0	$1-s_T$
1	0.8078164543	0.7632228344	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-1}$
2	0.8601409194	0.8430598718	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$
3	0.8922111941	0.8815708957	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$
4	0.9121523121	0.9046450027	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$8.8 \cdot 10^{-2}$
5	0.9257193873	0.9201032282	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$
6	0.9355793095	0.9312101304	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$
7	0.9430872656	0.9395871834	$3.5 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-2}$
8	0.9490044633	0.9461354936	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$
9	0.9537929925	0.9513973418	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-2}$
10	0.9577504564	0.9557191877	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$
11	0.9610775889	0.9593329827	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$
12	0.9639149067	0.9623999797	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$
13	0.9663638223	0.9650358176	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$
14	0.9684994214	0.9673256143	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$
15	0.9703785198	0.9693334294	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$
16	0.9720449226	0.9711084064	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-2}$
17	0.9735329591	0.9726888813	$8.4 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$
18	0.9748699224	0.9741052018	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$
19	0.9760777892	0.9753817078	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$
20	0.9771744578	0.9765381490	$6.4 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$

3. Численно-аналитическое решение задачи о предельной электрохимической обработке плоским ЭИ с полукруглым выступом

Аналогично была решена задачу о предельной обработке полукруглым электрод-инструментом (ЭИ) $A'FGB'$, который движется вертикально вниз со скоростью V_{er} . Обрабатываемая поверхность

AMDNB приобретает предельную ($|E|=E_1$) форму. Асимптотическая величина зазора S известна. Напряженность на бесконечности слева и справа равна $E_0=U/S$.

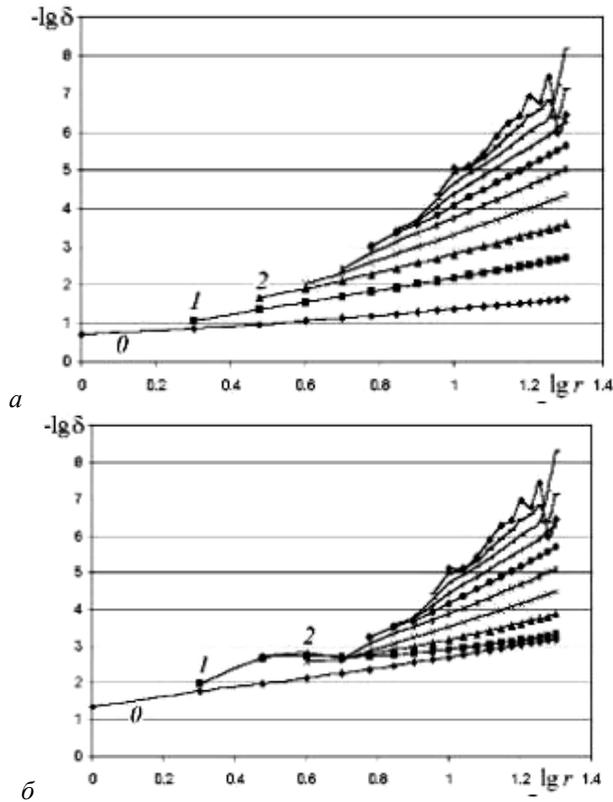


Рисунок 10 – Оценки:

a – разности $1 - s_\tau(r)$; b – разности $s_\tau(r) - s_0(r)$

Образы МЭП на физической плоскости и плоскости комплексного потенциала аналогичны полученным в предыдущей задаче (рис. 3).

Образом МЭП на плоскости годографа напряженности $\bar{E} = \frac{dW}{dZ}$ является некоторая фигура (рис. 12,а) с разрезом по дуге окружности радиуса E_1 с центром в начале координат. Это следует из условия $|E|=E_1$ (4).

В качестве параметрической области ζ выберем полукольцо (рис. 12,б). Тогда

$$dZ = \left(\frac{dW}{dZ}\right)^{-1} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = -\frac{2U}{\pi E_1} \frac{\zeta - p^2}{\zeta(\zeta - 1)} \exp\left[-\sum_{m=1}^{\infty} C_m p^m (p^{-m}\zeta^m - p^m\zeta^{-m})\right] \times \left(\frac{\sqrt{p}}{\zeta - p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{(2m-1)/2}}{(p^{(2m-1)/2} - p^{-(2m-1)/2})}\right) \times (p^{-(2m-1)/2}\zeta^{(m-1)} - p^{(2m-1)/2}\zeta^{-m}) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

где C_m – неизвестные коэффициенты.

Задача решается численно методом коллокаций аналогично предыдущей задаче.

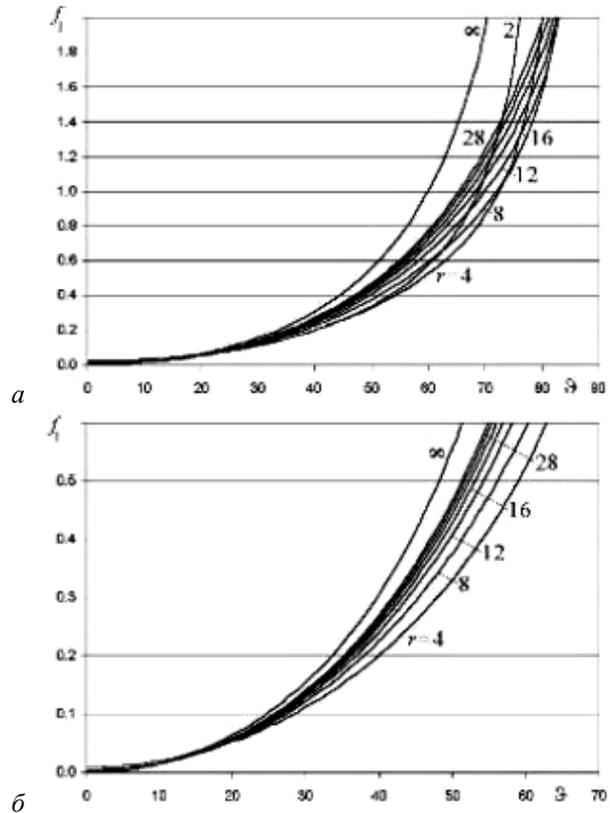


Рисунок 11 – Зависимости $f_1(\vartheta, r) = s(\vartheta, r)/s_0(r) - 1$

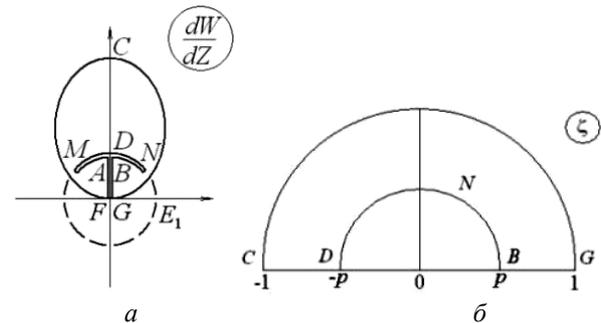


Рисунок 12 – Плоскости: a – годографа напряженности; b – параметрического переменного ζ

Формы предельной поверхности и их образы на плоскости годографа для различных радиусов r показаны на рис. 13, 14.

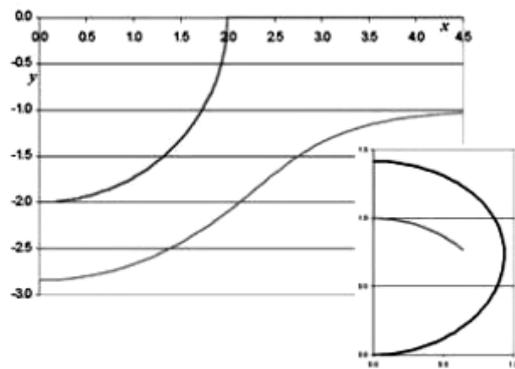


Рисунок 13 – Форма МЭП и плоскости годографа при $R/S=2$

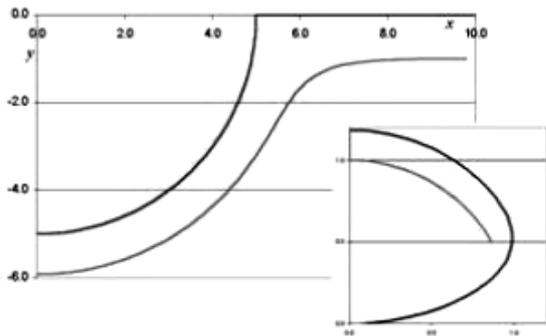


Рисунок 14 – Форма МЭП и плоскости годографа при $R/S=5$

Для оценки относительной погрешности значений параметров применяется метод фильтрации последовательности численных данных, полученных для $n=5; 6; 7; \dots 40$. В качестве характерного параметра рассмотрен торцевой зазор s_T . Толстыми линиями на рис. 15 обозначены результаты попарного вычитания [5], тонкими – результаты сравнения с выбранным значением эталона. В результате выбора эталона получены значения 0.920104755357 для $r=5$ и 0.955719187675 для $r=10$. В результате оценки погрешности эталона получаются величины порядка 10^{-13} (рис. 15).

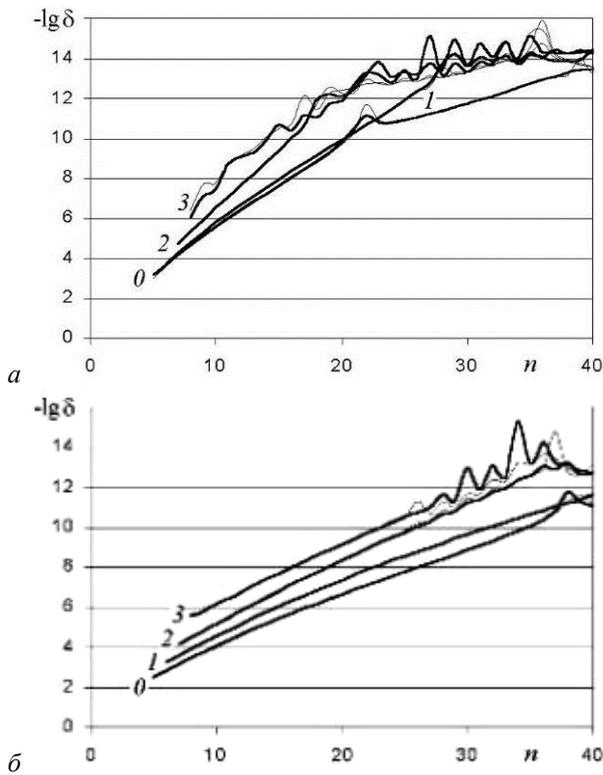


Рисунок 15 – Оценка погрешности параметра s_T :
а – для $r=5$; б – для $r=10$

Величину торцевого зазора следует сравнить со значением $s_0(r)$, полученным из модели (7) «цилиндрического конденсатора» (см. табл. 2).

На рис. 16,а представлена зависимость $-\lg \delta(r)$, где $\delta(r) = |s_T(r) - s_0(r)|$ (кривая 0) и результаты 1-й и 2-й фильтрации этой зависимости (кривые 1 и 2). Из

рисунка видно, что зависимость приближается к линейной, т.е. разность $s_T(r) - s_0(r)$ приблизительно представляется экспоненциальной функцией $Ce^{-\lambda r}$.

Для определения параметра λ используется разностная формула

$$k = \frac{f(r+1) - f(r)}{f(r+1)} \approx \frac{Ce^{-\lambda(r+1)} - Ce^{-\lambda r}}{Ce^{-\lambda(r+1)}} = 1 - e^{\lambda}, \quad \text{отсюда}$$

$\lambda = \ln(1 - k)$. Путем фильтрации параметра k (рис. 16,б) получено значение $\lambda \approx 2.460$ и оценка погрешности этого значения (около 10^{-3}).

Таблица 2

r	s_T	s_0	$s_T - s_0$
1	0.793679296009	0.763222834352	$3.0 \cdot 10^{-02}$
2	0.845528903333	0.843059871766	$2.5 \cdot 10^{-03}$
3	0.881780307091	0.881570895679	$2.1 \cdot 10^{-04}$
4	0.904662878881	0.904645002705	$1.8 \cdot 10^{-05}$
5	0.920104755356	0.920103228161	$1.5 \cdot 10^{-06}$
6	0.931210260816	0.931210130403	$1.3 \cdot 10^{-07}$
7	0.939587194522	0.939587183394	$1.1 \cdot 10^{-08}$
8	0.946135494530	0.946135493581	$9.5 \cdot 10^{-10}$
9	0.951397341895	0.951397341815	$8.1 \cdot 10^{-11}$
10	0.955719187675	0.955719187668	$6.8 \cdot 10^{-12}$

На рис. 17 представлены зависимости $f_1(x) = s(\vartheta, r)/s_0(r) - 1$.

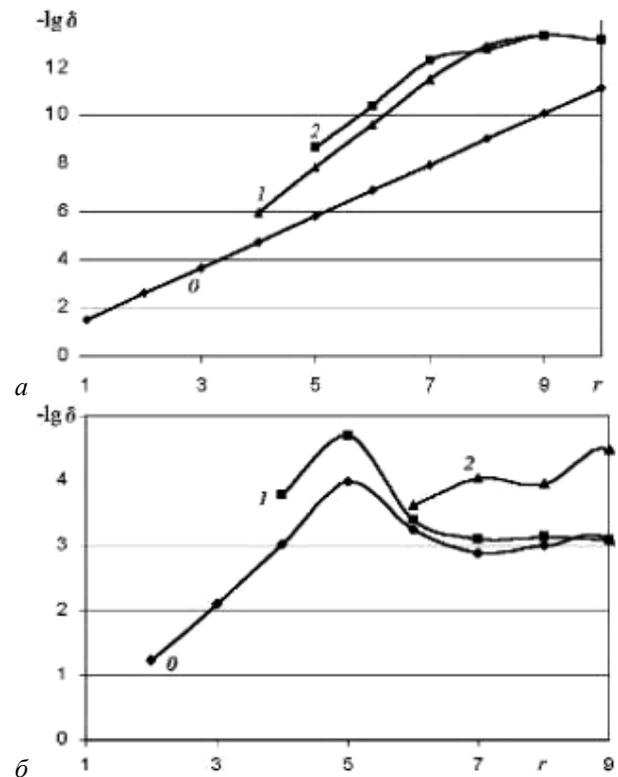


Рисунок 16

а – определение вида зависимости $s_T(r) - s_0$;
б – оценка погрешности параметра λ

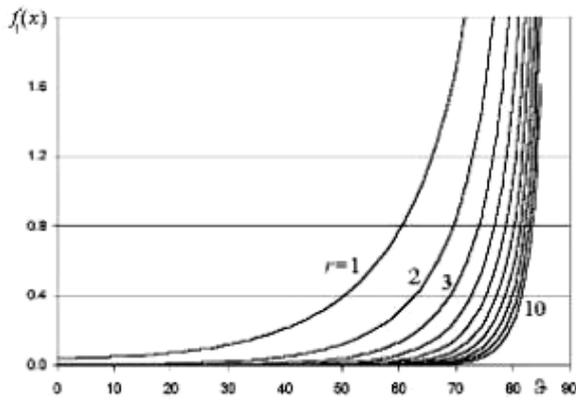


Рисунок 17 – Зависимости $f_1(x) = s(\vartheta, r)/s_0(r) - 1$

4. Построение приближенной интерполяционной модели

Численные данные, полученные при решении задачи стационарного формообразования, были использованы в качестве исходного набора данных для построения интерполяционной модели формообразования зазора между ЭИ и обрабатываемой поверхностью в зависимости от радиуса кривизны ЭИ и угла наклона. В качестве базовой приближенной модели целесообразно использовать модель «цилиндрического конденсатора», что приводит к зависимости

$$f_2(\vartheta, r) = \frac{s(\vartheta, r)}{s_0(r)} \cos \vartheta - 1.$$

Значения разностей $f_2(\vartheta, r)$, как видно из рис. 2, с увеличением r уменьшаются по абсолютной величине (за исключением области значений ϑ , близких к 90°). Для приближенной оценки предельной (при $r \rightarrow \infty$) зависимости применим фильтрацию [5] с использованием формулы Нэвилла (на рис. 18 приведены оценки для $\vartheta = 50^\circ$ и $\vartheta = 60^\circ$, погрешности даны в абсолютных единицах).

Как показали результаты этих оценок, проведенных для каждого значения угла (рис. 19), величина разности $f_2(\vartheta, r)$ приближается к нулю при возрастании r при каждом фиксированном ϑ (так как в результате оценок не обнаруживаются значения, превышающие погрешность вычисления).

Тем самым, примем, что при увеличении r зависимости $f_2(\vartheta, r)$ приближаются к скачкообразной функции (см. рис. 18, а)

$$f_2(\vartheta, \infty) = \begin{cases} 0, & \vartheta < 90^\circ, \\ -1, & \vartheta = 90^\circ. \end{cases}$$

Тогда отсутствующие данные для $r > 32$ и промежуточных значений r можно получить с помощью интерполяции. В связи со сложностью интерполируемой зависимости, оценка погрешности представляет особую важность.

Для оценки погрешности интерполяции используется увеличение степени интерполяционного алгебраического многочлена, вариация набора исходных данных (через одно или несколько значений r_j), интерполяция «по наклонной» вдоль луча $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{f - f_0}{-f_0}$ (рис. 20, а), использование разных па-

раметров интерполяции ($1/r, 1/\sqrt{r}$). Значения f, ϑ для каждого значения r_j получаются с помощью интерполяции зависимостей по дискретным наборам f_k, ϑ_k для соответствующего r_j и численного поиска точки пересечения между лучом и кривой, задаваемой интерполяционным многочленом.

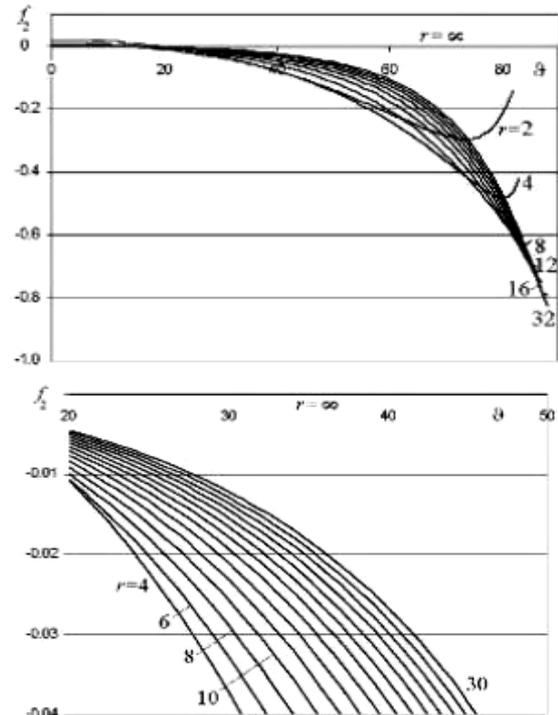


Рисунок 18 - Зависимость $f_2(\vartheta, r)$

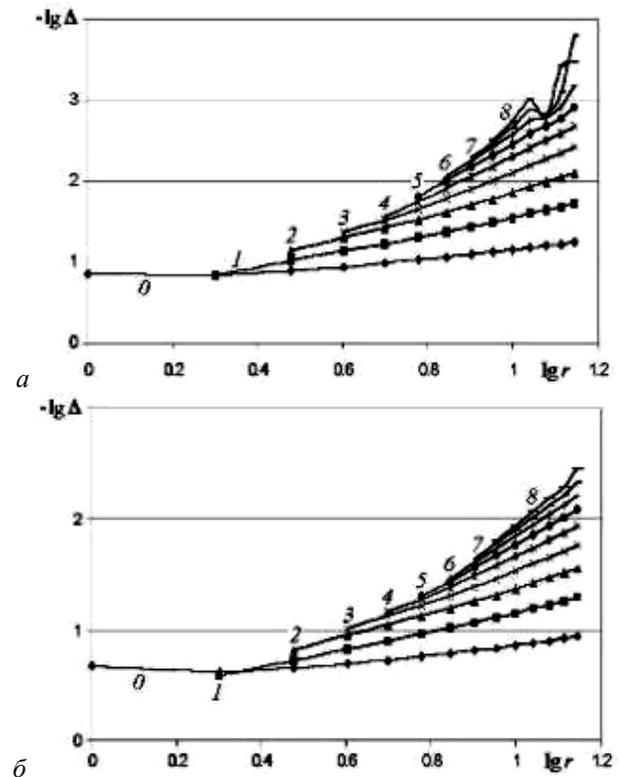


Рисунок 19 - Оценка предельных при $r \rightarrow \infty$ значений параметров: а – $\vartheta = 50^\circ$; б – $\vartheta = 60^\circ$

Некоторые результаты интерполяции представлены на рис. 20, 21.

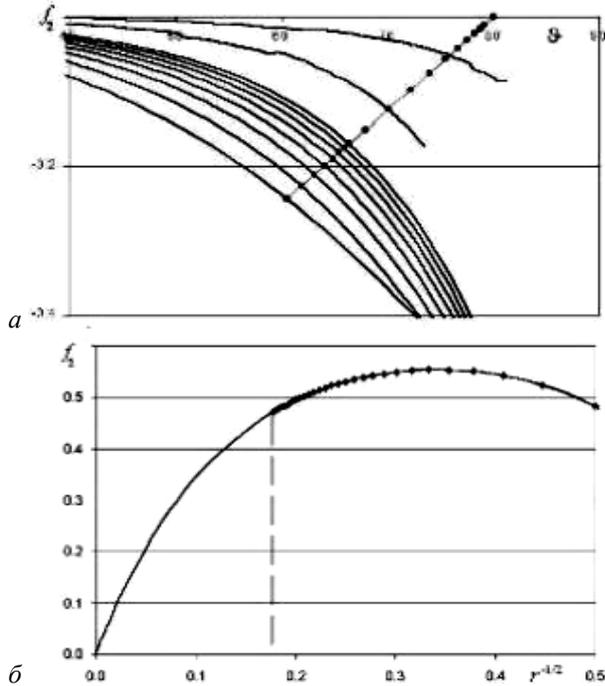


Рисунок 20 - Результаты интерполяции:
а – «по наклонной»; б – при разных r для $\vartheta_0=80^\circ$

На рис. 20,б показаны результаты интерполяции по параметру $1/\sqrt{r}$ для $\vartheta_0=80^\circ$. Правее пунктирной прямой расположены заданные точки, левее (кроме нуля) – полученные с помощью интерполяции. На рисунке совмещены графики, полученные по полной базе и по разреженной (через одну точку). Разница не превышает 10^{-3} .

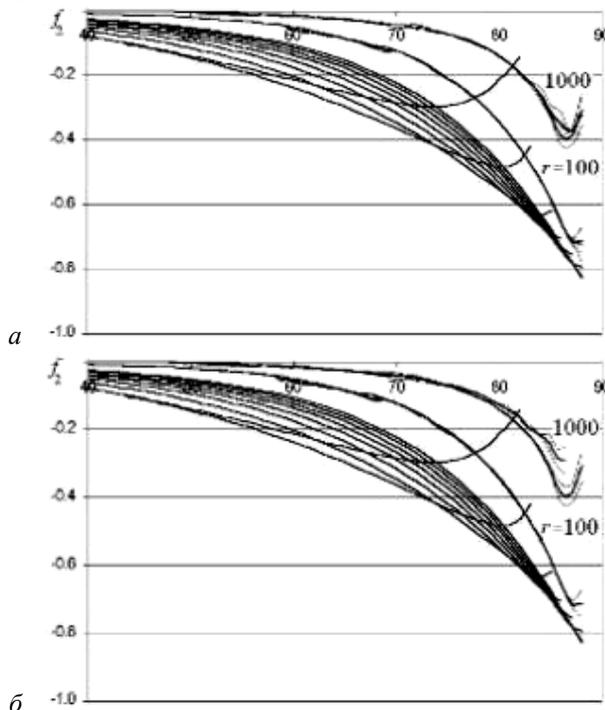


Рисунок 21 - Сравнение результатов интерполяции для $r=100$ и $r=1000$, полученных:
а – по полной и разреженной базе; б – при $f_0=-10$ и ∞

На рис. 21 показаны интерполированные зависимости для $r=100$ и $r=1000$ вместе с оценками погрешностей интерполяции, полученной путем сравнения полиномов с возрастающей степенью. На рис. 21,а совмещены графики, полученные по полной и разреженной базе, на рис. 21,б – для интерполяции при $f_0=-10$ и ∞ . Применяя интерполяцию «по наклонной», необходимо учитывать, что интерполируемая функция имеет особенность по переменной ϑ при $\vartheta \rightarrow 90^\circ$. Это ограничивает возможность вариации параметром наклона f_0 значениями $f_0 \leq -10$, так как иначе возникает дополнительная погрешность (см. рис. 21,б).

Тем самым, согласно оценкам, разработанная модель позволяет определить зависимость $s(\vartheta, r)$ с погрешностью около 1% для $0 \leq \vartheta \leq 85^\circ$.

5. Тестирование приближенной интерполяционной модели с помощью данных задачи предельной обработки

Зависимости зазора от угла в этом случае удобно представить в виде разности

$$f_2(\vartheta, r) = \left(\frac{s(\vartheta, r)}{s_0(r)} - 1 \right) \cos \vartheta \quad (\text{рис. 22}).$$

Как видно из рисунка вид кривых качественно совпадает с тем, что мы имели при расчете стационарного формообразования (рис. 18).

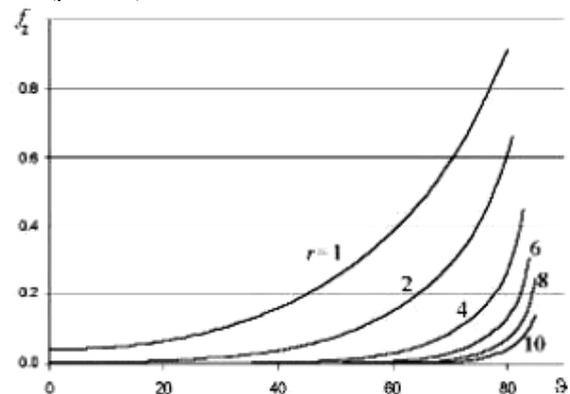


Рисунок 22 - Зависимости $f_2(\vartheta, r)$

Поскольку при предельном формообразовании разность $s_r(r) - s_0(r)$ приближенно представляется экспоненциальной функцией, в качестве параметра (аргумента) интерполяции следует выбрать e^{-kr} (рис. 23). Приведенные кривые показывают, что при разрежении базы данных отличие результатов более значительно, чем на рис. 20,б, однако проявляется при углах, больших 80° .

На рис. 24 показаны интерполированные зависимости для $r=12$ и $r=15$ вместе с оценками погрешностей интерполяции, полученной путем сравнения полиномов с возрастающей степенью.

На рис. 24,а совмещены графики, полученные по полной и разреженной базе, на рис. 24,б – для интерполяции при $f_0=-10$ и ∞ . Тем самым, разработанная модель позволяет определить зависимость

$s(\vartheta, r)$ для предельного формообразования для $0 \leq \vartheta \leq 84^\circ$ с погрешностью около 1%.

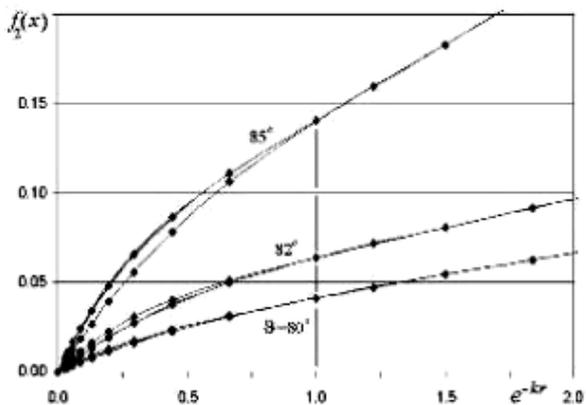


Рисунок 23 - Результаты интерполяции при разных r

Отметим, что данная задача являлась тестовой (в отличие от стационарной), в том смысле, что ограничение значений радиуса, использованных для проведения интерполяции, числом 10 не является существенным. Тем самым, полученные приближенные расчеты и оценки могут быть проверены сравнением с результатами прямого численного решения задачи.

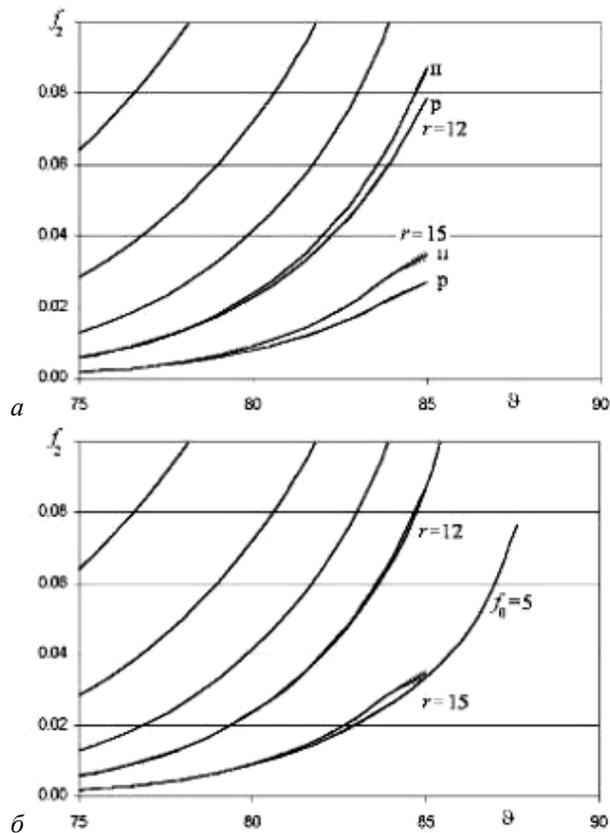


Рисунок 24 - Сравнение результатов интерполяции для $r=12$ и $r=15$, полученных:

a – по полной и разреженной базе; b – при $f_0=10$ и ∞

Из сравнения (рис. 25) следует, что при $r=12$ результаты интерполяции и численного решения сов-

падают с точностью до 10^{-3} , для $r=15$ до 10^{-2} . При увеличении r значения $f_2(\vartheta)$ становятся малыми и входят в диапазон 1%.

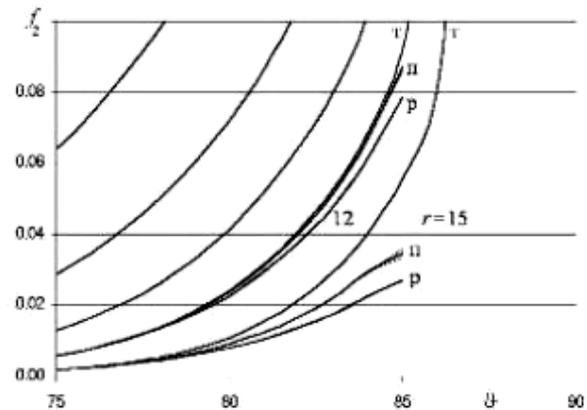


Рисунок 25 - Сравнение результатов интерполяции с результатами численного решения

(«т» – точные значения,
«п» – получены по полной базе,
«р» – по разреженной)

Выводы

Результаты исследований и разработанный способ построения моделей процессов формообразования позволили создать базу данных и программные модули для расчета (с оценкой погрешности) зависимостей зазора от угла наклона участка ЭИ и его кривизны, которые могут быть использованы для практических целей.

Полученные результаты позволяют рассмотреть зазор как функцию следующих параметров: радиального угла наклона, отношения радиуса к характерному размеру. Тем самым приближенно по форме детали можно построить форму ЭИ.

Литература

1. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование // Казань: Казанск. ун-т, 1984. 80 с.
2. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2007. 407 с.
3. Житников В.П., Муксимова Р.Р. Решение задачи нестационарной электрохимической обработки плоским электрод-инструментом с ограниченной неровностью // Вестник УГАТУ, 2011. Т. 15, №1 (41). С. 113-118.
4. Житников В.П., Муксимова Р.Р., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Численная оценка параметров нестационарных процессов электрохимического формообразования // Труды ГОСНИТИ, 2010. Т. 106. С. 67-71.
5. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Многокомпонентный анализ численных результатов. Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 389 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

Казакова А.О.

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

15, Московский пр-т, 428015, Чебоксары, Россия

kazakova_anastasia@bk.ru

Аннотация

Предложен численный метод решения задач изгиба тонких пластинок произвольной формы. Особое внимание уделено граничным задачам для пластинок с заделанными и опертыми краями. В этих случаях задачу можно свести к краевой задаче для полигармонического уравнения высшего порядка, что позволяет применить к ее решению разработанный ранее А.Г. Терентьевым и автором алгоритм решения краевых задач для полигармонических функций. На конкретных примерах с применением компьютерного моделирования показана хорошая точность предложенного метода.

Введение

Тонкой пластинкой называется призматическое тело, высота которого (толщина пластинки) мала по сравнению с другими ее размерами. Деформации пластинки также считаются малыми, т.е. прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной. Теория тонких пластинок с малыми прогибами, как известно (см., например, [1]), базируется на трех допущениях, называемых гипотезами Кирхгофа: гипотеза прямых нормалей, гипотеза об отсутствии давления между слоями пластины и гипотеза о недеформируемости срединной плоскости.

Наиболее полно классическая теория изгиба тонких пластинок изложена в монографии С.П. Тимошенко и С. Войновского-Кригер (см. [2]). В этой и в ряде других работ получены точные решения для некоторых областей частного вида, в основном для прямоугольных и круглых пластинок. В случае же областей сложной формы незаменимым остается применение численных методов. Проблема определения характеристик напряженного состояния пластинки приводит к краевой задаче для неоднородного бигармонического уравнения, которое в ряде случаев можно свести к однородному полигармоническому уравнению высшего порядка. В настоящей работе численный алгоритм, разработанный А.Г. Терентьевым и автором для решения краевых задач для полигармонического уравнения (см. [3]), применяется к решению задач изгиба тонких пластинок.

1. Дифференциальное уравнение изгиба тонкой пластинки

Как уже отмечалось, внутри тонкой пластинки имеется так называемая нейтральная плоскость, на которой отсутствуют деформации. Эта плоскость расположена по середине толщины h пластинки, а по двум ее сторонам деформации имеют противоположные знаки. Расположим пластинку в такой системе координат, чтобы срединная плоскость совпадала с плоскостью $z = 0$ (см. рисунок 1).

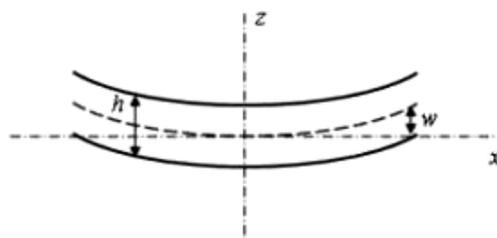


Рисунок 1

В силу гипотез Кирхгофа, смещения точек срединной плоскости вдоль осей x и y можно считать равными нулю, поэтому вектор смещения этих точек имеет вид:

$$u_x^{(0)} = 0, \quad u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = w(x, y).$$

Выражения для напряжений и деформаций при изгибе пластинки имеют вид (см. [4]):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_{yy} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \\ \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xy} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \\ \varepsilon_{zz} &= z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\nu}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга), ν – коэффициент Пуассона.

Как видно из (1), все компоненты тензоров напряжений и деформаций выражаются через одну функцию $w(x, y)$, которая называется

функцией прогибов. Таким образом, решение задачи изгиба пластинки сводится к нахождению в области T , занятой срединной плоскостью пластинки, функции прогибов $w(x, y)$. Эта функция, как известно из теории изгиба пластинок, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\Delta^2 w = \frac{q}{D}, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, q – действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ –

цилиндрическая жесткость пластинки.

Уравнение (2) называется *уравнением изгиба тонкой пластинки*, или уравнением Софи Жермен.

2. Граничные условия

Граничные условия для уравнения (2) записываются в зависимости от способа закрепления края пластинки и в математической их формулировке принимают следующий вид (см. [5]):

I. *Край пластинки заделан*. В этом случае на границе области T должны выполняться условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – внешняя нормаль к границе области ∂T .

II. *Край пластинки опёрт*. Тогда граничные условия имеют вид:

$$w = 0, \quad \nu \Delta w + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 \right\} = 0. \quad (4)$$

III. *Край пластинки свободен*. В этом случае граничные условия запишутся в виде:

$$\nu \Delta w + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} n_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} n_y^2 \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) n_x n_y + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (n_x^2 - n_y^2) \right\} = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial l}$ означает дифференцирование по направлению касательной к границе области ∂T , направленной в сторону положительного обхода.

Механический смысл этих условий можно найти, например, в [6].

3. Интегральные соотношения

В настоящей работе будут подробно рассмотрены задачи I и II, поскольку в этих случаях возможен переход от граничных условий (3), (4) к граничным условиям для системы интегральных урав-

нений, которая получена А.Г. Герентьевым и автором в [3] из интегральной формулы Грина:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_j(P_0) = & \sum_{k=0}^{n-j-1} \int_{\partial T} \left(v_{j+k}(P) G_k(P, P_0) - \right. \\ & \left. - u_{j+k}(P) H_k(P, P_0) \right) ds(P), \quad (5) \\ & (j = \overline{0, n-1}). \end{aligned}$$

где $u_0 = u$ – полигармоническая функция n -го порядка,

$$u_k = \Delta^k u, \quad v_k = \frac{\partial u_k}{\partial n},$$

$$G_k = \frac{1}{2\pi} \frac{r^{2k}}{4^k (k!)^2} \left(\ln \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right), \quad H_k = \frac{\partial G_k}{\partial n},$$

где r – расстояние между точками P и P_0 , P – переменная точка интегрирования, P_0 – фиксированная точка внутри области или на её границе,

$$\varepsilon = \begin{cases} 0.5, & P_0 \in \partial T, \\ 1, & P_0 \in T. \end{cases}$$

Если сила, действующая на единицу площади тонкой пластинки, q является полигармонической функцией порядка $n-2$ (например, многочленом некоторой степени), то из уравнения (2) следует, что w – полигармоническая функция n -го порядка, т.е. удовлетворяет уравнению $\Delta^n w = 0$. В частности, если q – константа, то функция прогибов удовлетворяет полигармоническому уравнению третьего порядка, и интегральные соотношения (5) для нее запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon w(P_0) = & \int_{\partial T} \left[\frac{\partial w}{\partial n} G_0 - w H_0 + \frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 - \right. \\ & \left. - \Delta w H_1 + \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_2 - \Delta^2 w H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w(P_0) = & \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_1 - \Delta^2 w H_1 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta^2 w(P_0) = & \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} G_0 - \Delta^2 w H_0 \right] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом последнее уравнение в (6) обращается в тождество и может быть отброшено.

4. Решение задачи I

В случае заделанного края должны выполняться граничные условия (3). Кроме того, если q – константа, то $\frac{\partial \Delta^2 w}{\partial n} = 0$, поэтому система (6) для задачи I принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon w(P_0) = & \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 - \Delta w H_1 - \frac{q}{D} H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w(P_0) = & \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 - \frac{q}{D} H_1 \right] ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Как было показано в [3], система интегральных уравнений (5) позволяет построить алгоритм

решения полигармонического уравнения на основе метода граничных элементов (см. [7], [8]), суть которого состоит в аппроксимации границы области системой конечного числа N достаточно малых элементов и в аппроксимации рассматриваемых функций на каждом элементе. Тогда система равенств (7) может быть сведена к системе линейных уравнений относительно значений функций в контрольных точках и представлена в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)} & -\mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{A}^{(1)} & -\mathbf{B}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{D} \mathbf{A}^{(1)} \\ -\frac{q}{D} \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{V}^{(1)}$ — вектор-столбцы, компонентами которых являются значения в контрольных точках функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ соответственно, $\mathbf{A}^{(k)}, \mathbf{B}^{(k)}$ — матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием соответствующих функций по граничным элементам:

$$A_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} H_k(P, P_i) ds, \quad B_{i,j}^{(k)} = \int_{\Gamma_j} G_k(P, P_i) ds, \\ (i, j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, 2}).$$

Система уравнений (8) представляет собой систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных компонент вектор-столбцов $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{V}^{(1)}$.

Вообще, система интегральных уравнений (5) может быть аналогично сведена к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных значений функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, если q является полигармонической функцией любого порядка. В этом случае значения всех функций u_k, v_k ($k = \overline{2, n}$) могут быть определены из уравнения Софи Жермен, а функции u_0 и v_0 , в силу граничных условий (3), обращаются в нуль на границе области.

5. Решение задачи II

Рассмотрим теперь задачу II (край пластины оперт). Если перейти к производным по направлениям нормали \mathbf{n} и касательной \mathbf{l} , то второе граничное условие (4) упрощается и принимает вид:

$$\Delta w - (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial l} \frac{\partial w}{\partial n} \right\} = 0, \quad (9)$$

где α — угол, составленный нормалью \mathbf{n} с положительным направлением оси Ox .

Но поскольку $w = 0$ на границе области, то на всей границе равны нулю и производные $\frac{\partial w}{\partial l}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial l^2}$. Тогда из равенства (9) легко выразить граничное значение нормальной производной

функции прогиба через Δw , и окончательно граничные условия задачи II преобразуются к виду:

$$w = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} \frac{\Delta w}{1-\nu}. \quad (10)$$

Интегральные соотношения (6) примут вид:

$$\varepsilon w = \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_1 + \Delta w \left(\frac{1}{1-\nu} \frac{G_0}{\alpha'} - H_1 \right) - \frac{q}{D} H_2 \right] ds, \\ \varepsilon \Delta w = \int_{\partial T} \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} G_0 - \Delta w H_0 - \frac{q}{D} H_1 \right] ds, \quad (11)$$

и после дискретизации этих соотношений получим окончательно систему линейных алгебраических уравнений, матричное представление которой

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}^{(0)} & -\mathbf{B}^{(0)} \\ \mathbf{A}^{(1)} - \frac{1}{1-\nu} \mathbf{B} & -\mathbf{B}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{V}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{D} \mathbf{A}^{(1)} \\ -\frac{q}{D} \mathbf{A}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где \mathbf{B} — матрица, элементы которой вычисляются по формулам:

$$B_{i,j} = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{\partial \alpha / \partial l} G_0(P, P_i) ds, \quad i, j = \overline{1, N},$$

а все остальные обозначения матриц такие же, как в системе (8).

Из системы (12) могут быть найдены граничные значения функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, а далее, зная их, можно определить с помощью первого равенства (11) значение искомой функции прогибов в любой точке пластинки.

Также следует отметить, что, как и в случае заделанного края пластинки (задача I), система интегральных уравнений (11) может быть сведена к системе $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных значений функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, если q является полигармонической функцией любого порядка, в частности, если q является многочленом некоторой степени.

6. Числовые примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу I для алюминиевой эллиптической пластинки с полуосями $a = 1$ м, $b = 0.75$ м толщины $h = 0.02$ м, расположенной горизонтально в поле тяжести ($q = \rho gh$). Точное решение этой задачи известно (см. [2]), и функция прогибов имеет вид:

$$w = \frac{qa^4 b^4}{8D(3a^4 + 3b^4 + 16a^2 b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2.$$

Зная это решение, можно определить точные аналитические значения для функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ на границе области и сравнить их с полученными численно. На рисунке 2 (а) показаны граничные значения функции Δw , на рисунке 2 (б) — гранич-

ные значения функции $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$: сплошными линиями изображены точные графики этих функций, точками – значения, полученные численно при числе граничных элементов $N = 60$.

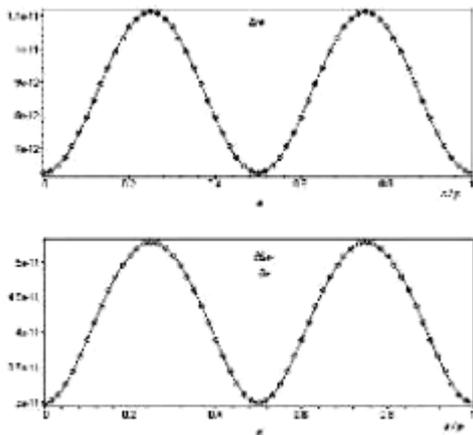


Рисунок 2

Пример 2. Основное преимущество предложенного численного алгоритма состоит в том, что его можно применять для областей произвольной формы. В частности, на рисунке 3 представлены результаты решения задачи I для пластинки в форме области, ограниченной лемнискатою Бута. Эта кривая задается уравнением

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2,$$

где a и b – некоторые параметры.

Для определенности снова считаем, что это алюминиевая пластинка, расположенная горизонтально в поле тяжести, а параметры лемнискаты Бута: $a = 1$, $b = 0.6$. Число элементов на границе области $N = 60$. Зная граничные значения функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$, можно с помощью первой формулы (7) определить значение самой функции прогиба в любой точке пластинки.

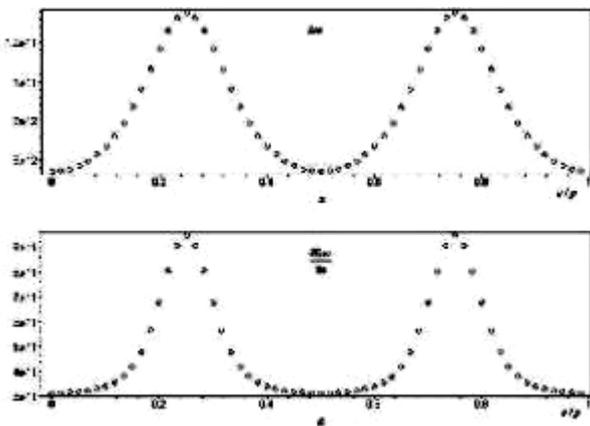


Рисунок 3

Пример 3. Приведем теперь результаты решения задачи II (края оперты) для круглой пластинки радиуса R и толщины h , расположенной горизонтально в поле тяжести ($q = \rho gh$). Точное решение этой задачи можно найти аналитически (см. [4]), и функция прогибов имеет вид:

$$w = 3\rho g \frac{1-\nu^2}{16h^2 E} (R^2 - x^2 - y^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - x^2 - y^2 \right),$$

где ρ, ν, E – плотность, коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластинки соответственно, g – ускорение свободного падения.

Зная это решение, можно определить точные аналитические значения для функций Δw и $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ на границе области. Они будут являться константами на всей окружности. В таблице 1 представлено сравнение численных и аналитических результатов для граничных значений функции Δw для пластинок из различных материалов и с различным отношением толщины пластинки к ее радиусу.

Аналогичные результаты для $\frac{\partial \Delta w}{\partial n}$ представлены в таблице 2.

Таблица 1 - Граничные значения функции $\Delta w \cdot 10^4$

материал	h/R	Точное значение	МГЭ ($N = 40$)
алюминий	0.09	8,0233	8,0233
	0.05	8,0232	8,0228
медь	0.08	6,5376	6,5361
	0.04	26,1503	26,1507
свинец	0.07	60,975	60,968
	0.03	331,972	331,966
сталь	0.06	16,7731	16,7731
	0.02	150,958	150,958

Таблица 2 - Граничные значения функции $\frac{\partial \Delta w}{\partial n} \cdot 10^4$

материал	h/R	Точное значение	МГЭ ($N = 40$)
алюминий	0.09	0,3049	0,3048
	0.05	0,2033	0,2032
медь	0.08	0,7869	0,7859
	0.04	3,1477	3,1496
свинец	0.07	5,9281	5,9280
	0.03	32,2751	32,2751
сталь	0.06	2,3587	2,3586
	0.02	21,2285	21,2277

Пример 4. В [2] получено аналитическое решение задачи об изгибе круглой пластинки, когда правая часть уравнения Софи Жермен является линейной функцией, а именно $q = \frac{px}{R}$, где R – радиус пластинки. Как отмечалось выше, в этом случае уравнение изгиба пластинки можно свести к однородному полигармоническому уравнению третьего порядка и найти по заданным граничным

условиям его решение с помощью метода граничных элементов.

В рамках этого примера ограничимся рассмотрением задачи II. Точное решение этой задачи имеет вид:

$$w = \frac{px}{192DR} (R^2 - x^2 - y^2) \left(\frac{7+\nu}{3+\nu} R^2 - x^2 - y^2 \right),$$

откуда

$$\Delta w = -\frac{px}{8DR} \left(\frac{2(5+\nu)}{3(3+\nu)} R^2 - x^2 - y^2 \right).$$

Тогда можно сравнить граничные значения этой функции, найденные аналитически и численно.

На рисунке 4 показана зависимость граничных значений функции Δw от нормированной дуговой координаты для алюминиевой пластинки радиуса $R=1$ м, толщины $h=0.02$ м; кроме того, здесь для определенности положено $p=1 \text{ Г/л}$. Сплошная линия соответствует точному аналитическому решению, точки – значениям, полученным численно при $N=60$.

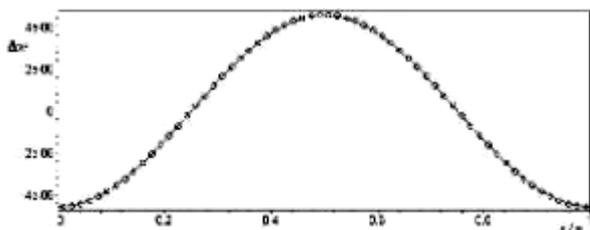


Рисунок 4

Заключение

Численный алгоритм, разработанный А.Г. Терентьевым и автором, позволяет найти решение задач изгиба тонких пластинок в случаях жестко заделанного и опертого края. Особое внимание уделено переходу от краевых условий задач изгиба тонкой пластинки к краевым условиям для системы полигармонических функций,

что позволяет применить численный алгоритм, разработанный А.Г. Терентьевым и автором для решения краевых задач для полигармонического уравнения. Из примеров видно, что наблюдается хорошее совпадение численных результатов и аналитических данных, что свидетельствует об эффективности разработанного численного алгоритма. Он может использоваться для решения задач изгиба тонких пластинок произвольной формы. Обоснование метода следует из интегральной формулы Грина и рассмотрено в [3].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю – Заслуженному деятелю наук РФ, доктору физико-математических наук, профессору А.Г. Терентьеву за постановку задач и оказанное внимание.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности: Учебник для строит. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. Казакова А.О., Терентьев А.Г. Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 52, №11, 2012. С. 2050 – 2059.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
5. Векуа, И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: ФМЛ, 1948. – 296 с.
6. Аменадзе, Ю.А. Теория упругости: Учебник для университетов. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
8. Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987. – 80 с.

CONFORMAL MAPPINGS, PADE APPROXIMANTS AND EXAMPLE OF FLOW WITH SIGNIFICANT DEFORMATION OF FREE BOUNDARY

Karabut E.A., Kuzhuget A.A.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk State University

630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

By using semi-analytic methods, we study the problem of a plane inertial motion of ideal incompressible fluid with a free boundary, which initially has a quadratic velocity field. The whole fluid boundary is free; gravity and surface tension are absent. In the form of a power series in time, a conformal mapping of the domain occupied by a fluid onto the unit circle is sought. Summation of the series is performed by using the Pade approximants.

Introduction

Consider the case of a flat unsteady potential flow of an ideal incompressible fluid. The fluid occupies a bounded simply connected domain, the whole boundary of which is free. At time $t = 0$ the domain is known. Subsequent deformation of the field has a purely inertial nature and it is caused by the given initial velocity field. The goal is to find the shape of domain and the velocity field at subsequent moments of time $t > 0$, if the constant pressure is maintained on the boundary.

Such problem with a free boundary does not have a lot of examples of exact solutions, in contrast to the related flows of Hele-Shaw or to plane Stokes flows for the viscous fluid. Flows with linear velocity fields discovered by Dirichlet in 1860 are the first and probably a unique known class of exact solutions. Its modern treatment can be found in [1-2]. In this case, free surface is a curve of the second order: hyperbole, ellipse or parabola.

For example, if the fluid, occupying the unit circle, has the linear velocity field initially, then at subsequent moments of time the velocity field remains still linear, but the unit circle is deformed into ellipse.

Consider the simplest generalization of this problem. Let the liquid occupy the unit circle at $t = 0$ as before, but let the velocity field be not linear but quadratic at the initial time. It turns out that for small t it remains quadratic accurate to $O(t^2)$. The exact analytic solution of this problem is unknown; this study presents its semi-analytic solution.

Semi-analytic methods (or methods of numerical studies of power series) occupy intermediate position between analytical and numerical methods. In addition to high precision of calculations, in some cases semi-analytic methods allow one to obtain unique analytical information that cannot be obtained separately by using neither purely numerical nor purely analytical methods.

Conformal mapping

Consider the unit circle $|\zeta| < 1$ in the auxiliary plane ζ . We seek the function $Z(\zeta, t)$ – a conformal mapping of the circle $|\zeta| < 1$ onto the domain occupied by liquid (see Fig. 1), and $U(\zeta, t)$ – the complex velocity. To find these two functions that are analytic in the circle $|\zeta| < 1$ there exist two boundary conditions [3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \zeta (Z_\zeta U_t - U_\zeta Z_t + U_\zeta \bar{U}) &= 0, & |\zeta| &= 1, \\ \operatorname{Re}(\zeta Z_\zeta U - Z_t Z_\zeta / \zeta) &= 0, & |\zeta| &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

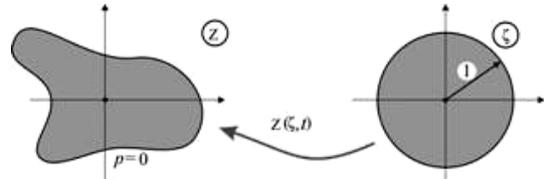


Figure 1 - The conformal mapping of the unit circle in the plane ζ onto the flow domain in the physical plane Z . On the free surface, zero pressure p is maintained.

In comparison with traditional formulations, this approach has a number of advantages. Instead of boundary-value problem in an unknown domain with the moving boundary, we get a fixed boundary in the plane ζ .

The solution is sought in the form of a power series in time:

$$Z(\zeta, t) = Z^{(0)}(\zeta) + Z^{(1)}(\zeta)t + Z^{(2)}(\zeta)t^2 + \dots \quad (2)$$

$$U(\zeta, t) = U^{(0)}(\zeta) + U^{(1)}(\zeta)t + U^{(2)}(\zeta)t^2 + \dots \quad (3)$$

Let us take the coefficients of the series with zero numbers, specifying the initial shape of the domain and the initial velocity field, in the form

$$Z^{(0)}(\zeta) = \zeta, \quad U^{(0)}(\zeta) = \zeta^2$$

The streamlines and the velocity vector at $t = 0$ are shown in Fig. 2. Modulus of the velocity vector on the free surface does not change, i.e., it equals 1 and only the direction of velocity is changes. Subsequent coefficients $U^{(n+1)}$, $Z^{(n+1)}$ are found from the recurrent boundary conditions:

$$\begin{aligned} (n+1) \operatorname{Im} \zeta U^{(n+1)} Z_\zeta^{(0)} &= \\ = \operatorname{Im} \zeta \sum_{j=0}^n \left[(j+1) U_\zeta^{(n-j)} Z^{(j+1)} - \overline{U^{(n-j)}} U_\zeta^{(j)} \right] &- \quad (4) \\ - \operatorname{Im} \zeta \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) Z_\zeta^{(n-j)} U^{(j+1)} & \end{aligned}$$

$$(n+1)\text{Re}Z^{(n+1)}\overline{Z_\zeta^{(0)}}/\zeta =$$

$$= \text{Re}\zeta \left(\sum_{j=0}^n Z_\zeta^{(n-j)} U^{(j)} - \sum_{j=1}^n (n-j+1)\overline{Z_\zeta^{(n-j+1)}} Z_\zeta^{(j)} \right) \quad (5)$$

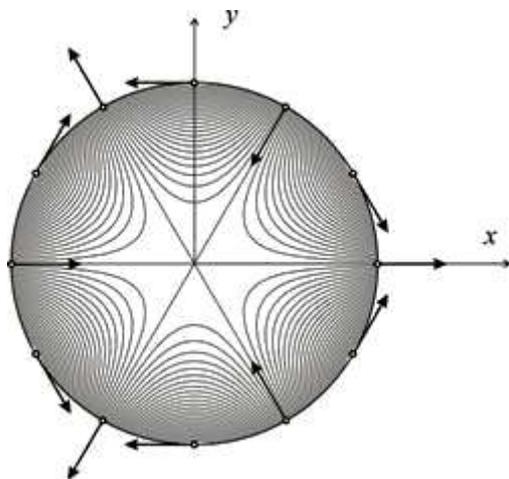


Figure 2 - The streamlines of flow and direction of the velocity vector at the initial time.

Boundary conditions (4) and (5) are obtained by substituting series (2), (3) into (1). Applying successively (4), (5), we find:

$$Z(\zeta, t) = \zeta + \zeta^4 t + (-2\zeta + 3\zeta^7)t^2 +$$

$$+ (-12\zeta^4 + 12\zeta^{10})t^3 + \dots$$

$$U(\zeta, t) = \zeta^2 + 2\zeta^5 t + (-7\zeta^2 + 7\zeta^8)t^2 +$$

$$+ (-36\zeta^5 + 30\zeta^{11})t^3 + \dots$$

The subsequent coefficients of power series are presented in Tables 1 and 2.

In total, we have computed 600 terms of the power series in rational numbers (two days of computing on a laptop). Starting from 601st term, calculations by the recurrence formulas are performed already in real numbers with an initial length of mantissa equal to 1000 decimal points. The loss of accuracy occurs in the process of the calculations due to round-off errors. It was possible to calculate 1100 terms of series; the last terms had accuracy already in 100 decimal points (one day of calculations). The pursuit of the amount of the coefficients can be explained simply: the more coefficients found, the larger are the moments of time a solution can be found for.

Direct summation of power series

Consider power series (2) on the free surface, i.e., at $\zeta = e^{i\theta}$. For a specified parameter θ we find the 150 terms of the series (2). Summing them at some t , we obtain a point in the plane Z .

When changing θ from 0 to 2π , this point describes a closed curve in the plane Z . These curves are presented in Fig. 3.

It is seen that at $t = 0,06$ the series is convergent. The free surface is smooth everywhere, the initial circle has slightly deformed. The greatest time, at which the

series converge at all points of the free surface, is $t = 0,123$.

Table 1 - The coefficients of power series for conformal mapping.

$Z(\zeta, t)$	ζ^1	ζ^4	ζ^7	ζ^{10}
t^0	1			
t^1	0	1		
t^2	-2	0	3	
t^3	0	-12	0	12
t^4	$\frac{29}{2}$	0	-71	0
t^5	0	$\frac{782}{5}$	0	-430
t^6	$-\frac{568}{5}$	0	$\frac{2681}{2}$	0
t^7	0	$-\frac{65826}{35}$	0	$\frac{374708}{35}$
t^8	$\frac{235577}{280}$	0	$-\frac{1520431}{70}$	0

$Z(\zeta, t)$	ζ^{13}	ζ^{16}	ζ^{19}	ζ^{22}	ζ^{25}
t^0					
t^1					
t^2					
t^3					
t^4	55				
t^5	0	273			
t^6	-2652	0	1428		
t^7	0	-16576	0	7752	
t^8	$\frac{5758467}{70}$	0	-104652	0	43263

Table 2 - The coefficients of the power series for the complex velocity.

$U(\zeta, t)$	ζ^2	ζ^5	ζ^8	ζ^{11}
t^0	1			
t^1	0	2		
t^2	-7	0	7	
t^3	0	-36	0	30
t^4	63	0	-209	0
t^5	0	$\frac{2757}{5}$	0	-41262
t^6	$-\frac{2817}{5}$	0	$\frac{22414}{5}$	0
t^7	0	$-\frac{261224}{35}$	0	$\frac{243931}{7}$
t^8	$\frac{335669}{70}$	0	$-\frac{2803172}{35}$	0

$U(\zeta, t)$	ζ^{14}	ζ^{17}	ζ^{20}	ζ^{23}	ζ^{26}
t^0					
t^1					
t^2					
t^3					
t^4	143				
t^5	0	728			
t^6	-7787	0	3876		
t^7	0	-48736	0	21318	
t^8	$\frac{9217184}{35}$	0	-308142	0	120175

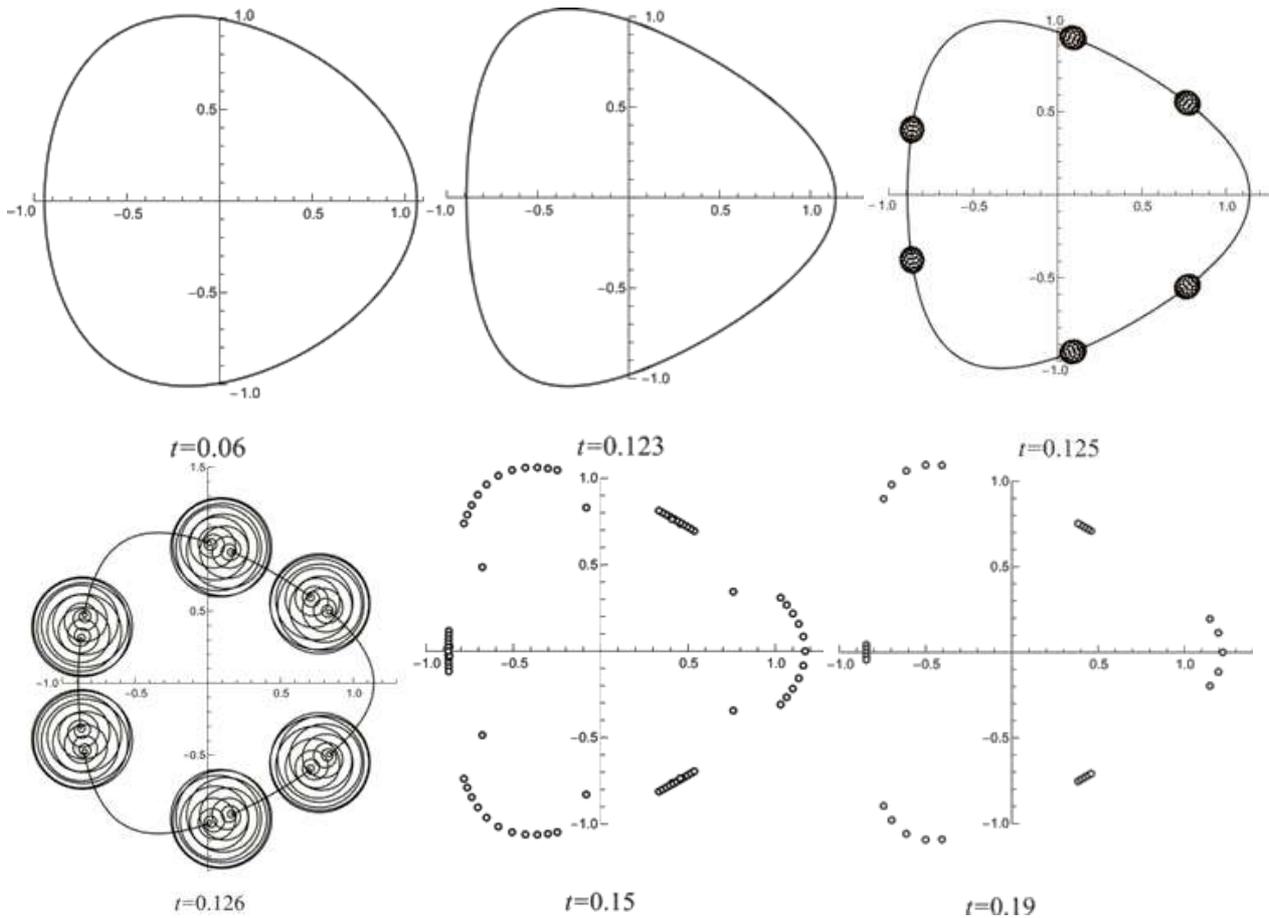


Figure 3 - Free surface obtained by summing the power series at different time moments.

Here, deformations increased although still remain small. At $t = 0,125$ series are divergent at those points of the free boundary, where the value of the parameter Θ is close to $\pi/6 + \pi/3, k \in Z$. Here free surface distortion occurs, which increases at $t = 0,126$. With further increase of time, the distortion completely cover the free surface. Therefore, we sum the series at only 180 points of the free boundary ($\Theta = j\pi/90; j = 0,1, \dots, 180$). For each such summation is obtained a complex number, which is shown in Figure 3 by a small circle. At $t = 0,15$ the free surface "falls apart": it ceases to be smooth and most of the points go outside the figure. This means that the series are divergent. In six points of the free boundary, where the curvature of the free surface is minimum or maximum, the radius of convergence of series is the largest. Here there are small isles of stability: the circles are grouped in smooth lines. At $t = 0,19$ even greater number of markers go beyond the figure but it is possible to guess the general contour of the free surface.

The radius of convergence of series (2) on the free surface is an even function of Θ , which is periodic with period $\pi/3$. To find it, we propose a new graphical method, based on the Jentzsch theorem [4]. According to this theorem, for every power series every point of circumference of convergence is the limiting for zeros of the partial sums of this series.

In Fig. 4 the roots of equations

$$Z^{(0)}(e^{i\Theta}) + Z^{(1)}(e^{i\Theta})t + \dots + Z^{(100)}(e^{i\Theta})t^{100} = 0$$

for different values of Θ are shown in a plane of the complex time t . With good accuracy the roots are arranged uniformly along the almost regular circles. We have a clear and precise way to visually represent the circle of convergence.

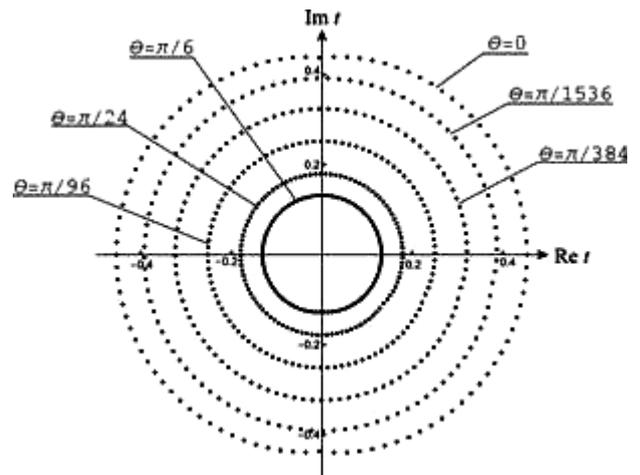


Figure 4 - Zeros of partial sums of the series.

Fig. 4 shows the change in the radius of convergence in the half period at $\Theta \in [0, \pi/6]$. The greatest radius of convergence is achieved at $\Theta = 0$. Next, with a small increase of Θ the radius of convergence decreases sharply and reaches minimum at $\Theta = \pi/6$.

Pade approximants

The most famous and most popular way of analytic continuation of power series outside the circle of convergence is based on the use of the Pade approximants. Are the two functions that have the same first terms of the Taylor series close to each other? The answer here is yes. If one takes an arbitrary function and polynomial --- the partial sum of its Taylor series, these two functions are close in the circle of convergence of the Taylor series. If one takes more complex function instead of the polynomial, for example, the ratio of polynomials, then the domain of closeness is not necessarily a circle, it may be more than the circle of convergence.

The Pade approximant is the ratio of polynomials of degree L and M such that the first $L + M + 1$ of terms of the Taylor series for the Pade approximant and for the approximable functions are the same. For any function $f(t)$, we have the following definition of the Pade approximant:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = [L/M] + O(t^{L+M+1})$$

where the symbol $[L/M]$ denotes the Pade approximant: $[L/M] = P_L(t)/Q_M(t)$. The greater the L and M are, the more accurately the Pade approximant describes the function $f(t)$. Most commonly, the case of $L = M$ is considered.

We first study the convergence of the Pade approximants for the series (2) at the point of the free surface $\zeta = 1$:

$$Z(1,t) = 1 + t + t^2 - \frac{3}{2}t^4 - \frac{3}{5}t^5 + \frac{29}{19}t^6 + \frac{6}{5}t^7 - \dots$$

Transform this number series to the Pade approximants. Table 3 shows the sequence $\{[L/L]\}$ taken at $t = 1$.

Table 3 - The sequence of the Pade approximants for the function $Z(1,t)$ at $t = 1$.

[40/40]	2.46106 00251846022457
[50/50]	2.46106 48872561470996
[60/60]	2.4610650 806608559623
[70/70]	2.46106507 88733588925
[80/80]	2.46106507913 15438477
[90/90]	2.461065079137 8731968
[100/100]	2.4610650791378 819368
[110/110]	2.46106507913793 57731
[120/120]	2.46106507913793 62611
[130/130]	2.46106507913793 29822
[140/140]	2.461065079137933021 8
[150/150]	2.461065079137933021 6
[160/160]	2.4610650791379330217

The correctly computed digits are printed in bold type. As $L \rightarrow \infty$, a good convergence of the sequence is observed. At greater times t , convergence also takes place although at a slower rate. Similarly, it is possible to check that there is convergence at $\zeta = -1$ as well.

Figure 5 shows the dependence of coordinates of the point $\zeta = 1$ and the opposite point $\zeta = -1$ on time.

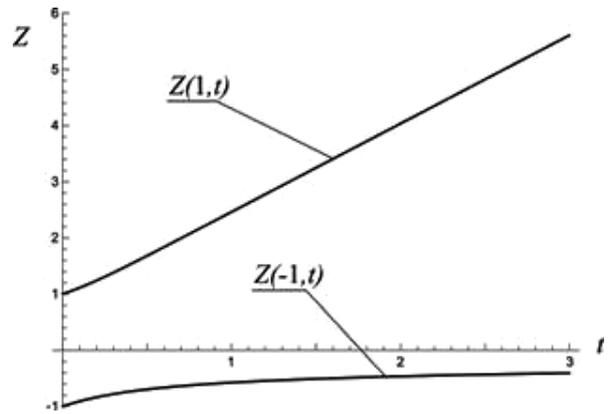


Figure 5 - Moving of two opposite points on the free surface.

At $\zeta = 1$ the curve has an inclined asymptote. Thus at very great times the point $\zeta = 1$ moves with the constant velocity. The dependence of velocity on time is shown in Fig. 6. The following limits are established: $\lim_{t \rightarrow \infty} U(1,t) = 1,5734$, $\lim_{t \rightarrow \infty} U(-1,t) = 0$. In the construction of Figs. 5 and 6 approximants $[300/300]$ were used.

Is a cusp formed on the free surface? The time dependence of maximum curvature of the free surface k achieved at $\zeta = 1$ is shown in a logarithmic scale in Fig. 7. Anywhere smooth curve, free surface sharpening is unlikely to occur at least until time $t = 11$. While constructing the figure, the approximant $[500, 500]$ was used.

Figure 8 demonstrates the convergence of the Pade approximants at other points of the free boundary differing from $\zeta = \pm 1$.

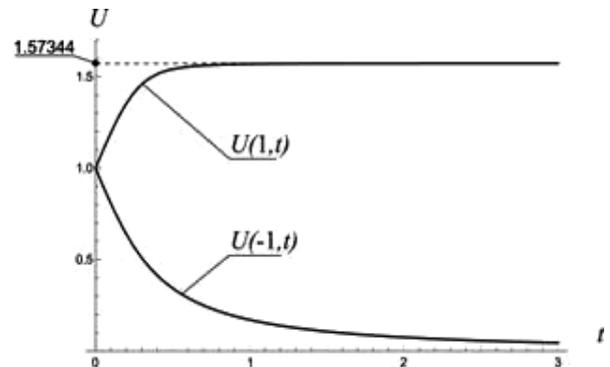


Figure 6 - Velocity dependence on time at two opposite points on the free surface.

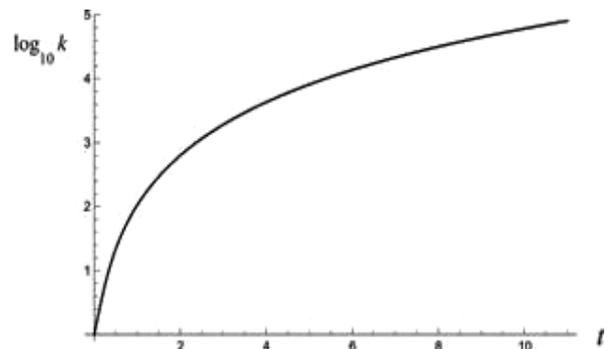


Figure 7 - Time dependence of the curvature k of the free surface at the point $\zeta = 1$.

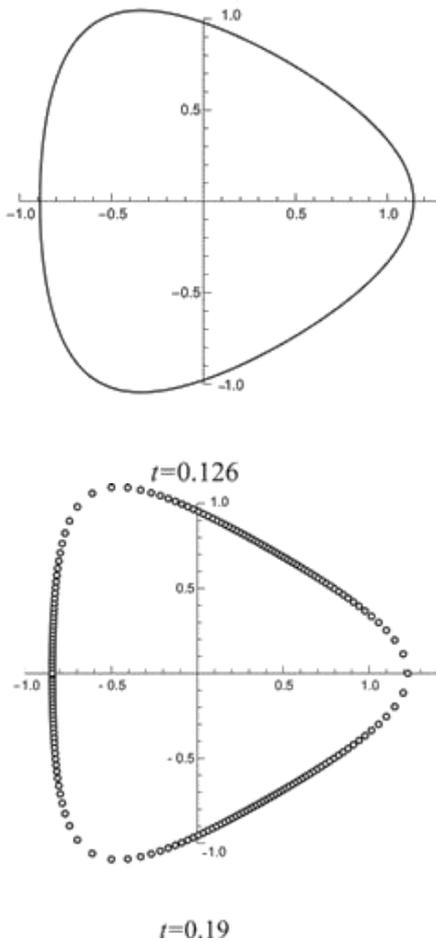


Figure 8 - Free surface obtained by Pade summation of power series.

Here we specially choose two time moments, which have been already used for the construction of the free surface by direct summation of series in Fig. 3. But again, we take 180 points ($\Theta = j\pi/90$; $j = 0, 1, \dots, 180$) and construct power series (2) for each of them. Next, for each such series we find the approximant $[150/150]$ and calculate it at $t = 0,19$. The obtained markers are shown in Fig. 8. If for $t = 0,19$ most of the markers is out of the picture in Fig. 3, then in Fig. 8 all 180 markers "return" to their own places: they are located along the free boundary. At $t = 0,126$ the curve given by the Pade approximant $[150/150]$ in continuous change of Θ from 0 to 2π is shown in Fig. 8. The comparison with Fig. 3 shows that in contrast to the usual summation, the Pade summation "removes" the regions of instability of the free boundary without changing the smooth parts of the boundary.

Change of variables

With increasing t the velocity of convergence of the Pade approximants decreases but in principle the Pade summation allows one to construct a free surface at any moment of time. Although to find a free boundary with reasonable accuracy a great number of terms of the original power series may be required.

A more serious handicap to the construction of a free boundary is a problem noticeable already at $t = 0,19$ in Fig. 8. If points ζ are located on the unit circle $|\zeta| = 1$ uniformly, then in Z -plane, the images of these

points are arranged nonuniformly. Moreover, where there are the largest deformation of the free surface and we would like to have more markers, there are very little of them. With increasing time, this tendency gets worse. This can be seen from Fig. 9a, where the free surface is constructed by the Pade summation at $t = 1,5$. Almost all 180 markers were grouped along the smoothest part of the free boundary. In the vicinity of the point $\zeta = 1$ (namely, point A in the figure) only one marker remains. A large empty segment of the free boundary, which is not filled by markers, is formed. How is it possible to construct here a free surface?

One of the possible ways is the following: to arrange points nonuniformly in the plane ζ . But two difficulties arise here. The first one is that in order to find out at what point of the plane ζ a marker is put, it is necessary to know the module of conformal mapping derivative $|Z_\zeta|$. This value is also given by a power series in time, which is, however, poorly convergent. This is not surprising because at large deformations of the free boundary, the value $|Z_\zeta|$ becomes very large. For example, at $\zeta = 1$ at $t = 1,5$ we have $|Z_\zeta| \sim 10^{22}$. The second difficulty is that the free surface is extremely sensitive to the microscopic variation of the angle Θ . For example, the whole empty segment of the free boundary without markers in the vicinity of the point A in Fig. 9a corresponds to the change of angle from -10^{-22} to 10^{-22} . Construction of a free surface by the direct Pade summation of (2) is practically possible only up to $t = 0,5$. At $t > 0,5$ it already requires serious computational effort.

In this paper, we propose a new method of construction of a free boundary. Instead of (2) the following series is proposed to use:

$$Z(u, t) = \mu + t \left(\frac{2}{3\mu^2} + \frac{\mu^4}{3} \right) + t^2 \left(\frac{11}{36\mu^5} + \frac{2\mu}{9} + \frac{17\mu^7}{36} \right) + \dots \quad (6)$$

The subsequent coefficients of this series are presented in Table 4. In total, we found 200 terms of the series (6) in rational numbers (two days of computing on a laptop).

In the complex plane μ , we take 180 points $\mu = e^{i\alpha}$ ($\alpha = j\pi/90$; $j = 0, 1, \dots, 180$) uniformly located on the unit circle $|\mu| = 1$, and for each of them we form a power series (6). Then, for each such series, we find the approximant $[100/100]$ and calculate it at $t = 1,5$. The markers found by this way are shown in Fig. 9b. It is seen that the obtained free surface coincides with that in Fig. 9a. However, in contrast to Fig. 9a, in the vicinity of A, B, C there are no empty places. Series (6) has a remarkable property: the images of points uniformly located on the circle $|\mu| = 1$ are uniformly located on the free surface.

The idea of obtaining the series (6) is simple. The function $Z(\Theta, t)$, where $t \in [0, 2\pi]$, which gives a parametric representation of the free surface is nonunique. If we change the variables $\Theta = (\alpha, t)$, where Θ is a monotonic function of α and the parameter α varies

from 0 to 2π , then this will give a new function $Z(\alpha, t)$, which will describes the same free boundary. It is necessary only to choose the change so that the images of the points uniformly located on the interval $\alpha \in [0, 2\pi]$ can be uniformly located on the free boundary as well.

Table 4 - The coefficients of a new power series for the free surface after the change of variables.

$Z(\mu, t)$	μ^{-14}	μ^{-11}	μ^{-8}	μ^{-5}	μ^{-2}	μ
t^0						1
t^1					$\frac{2}{3}$	0
t^2				$\frac{11}{36}$	0	$\frac{2}{9}$
t^3			$\frac{31}{81}$	0	$\frac{5}{27}$	0
t^4		$\frac{2633}{3888}$	0	$-\frac{1469}{972}$	0	$\frac{2203}{1296}$
t^5	$\frac{41723}{29160}$	0	$-\frac{21485}{5832}$	0	$\frac{1979}{7290}$	0

$Z(\mu, t)$	μ^4	μ^7	μ^{10}	μ^{13}	μ^{16}
t^0					
t^1	$\frac{1}{3}$				
t^2	0	$\frac{17}{36}$			
t^3	$-\frac{41}{27}$	0	$\frac{77}{81}$		
t^4	0	$-\frac{4487}{972}$	0	$\frac{4375}{1944}$	
t^5	$\frac{35126}{3645}$	0	$-\frac{82267}{5832}$	0	$\frac{170617}{29160}$

If we pass on to the complex variables $\zeta = e^{i\theta}$ and $\mu = e^{i\alpha}$, we have two functions $Z(\zeta, t)$, $Z(\mu, t)$. The first is an analytic function of the complex variable ζ and the second one is that of a complex variable μ . However, if the first function is holomorphic in the circle $|\zeta| \leq 1$, then the second one in general is not holomorphic in the circle $|\mu| \leq 1$. We show how to find a complex change of variables $\mu(\zeta, t)$ so that the function $Z(\zeta, t)$ given by the series (2) can be obtained by substituting this change into the function $Z(\mu, t)$ given by the series (6).

At first, we find the modulus of the conformal mapping derivative. Differentiating (2) with respect to ζ , we obtain

$$Z_\zeta = 1 + 4t\zeta^3 + t^2(-2 + 21\zeta^6) + t^3(-48\zeta^3 + 120\zeta^9) + \dots \quad (7)$$

Taking into account that $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ on the free boundary $|\zeta| = 1$, we obtain

$$\bar{Z}_\zeta = 1 + \frac{4t}{\zeta^3} + t^2\left(-2 + \frac{21}{\zeta^6}\right) + t^3\left(-\frac{48}{\zeta^3} + \frac{120}{\zeta^9}\right) + \dots \quad (8)$$

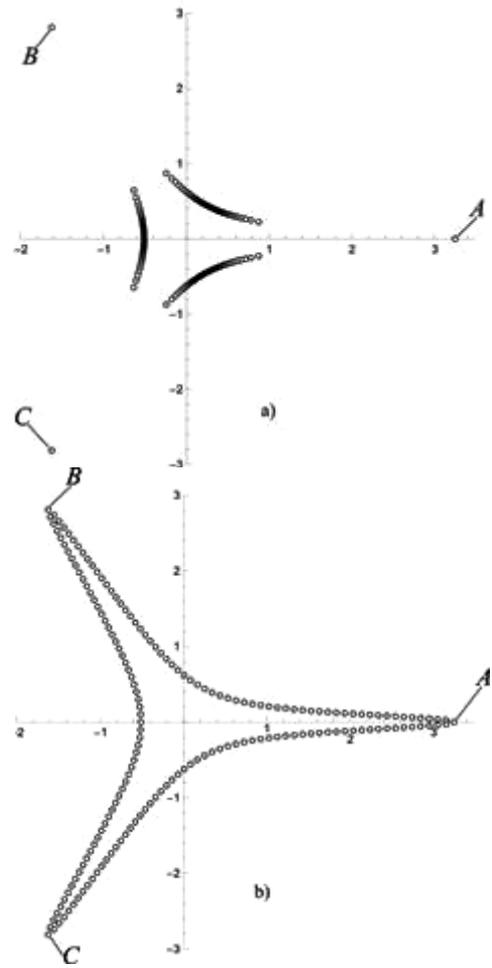


Figure 9 - Free surface form at $t=1,5$.

a) The direct Pade-summation.

b) The Pade-summation after the change of variables.

Multiply the two obtained series (7), (8) and then take the square root of the product. As a result, we have series for the modulus of conformal mapping derivative.

$$|Z_\zeta| = 1 + t\left(\frac{2}{\zeta^3} + 2\zeta^3\right) + t^2\left(\frac{17}{2\zeta^6} + 2 + \frac{17\zeta^6}{2}\right) + t^3\left(\frac{43}{\zeta^9} - \frac{7}{\zeta^3} - 7\zeta^3 + 43\zeta^9\right) + \dots$$

Substituting $\zeta = e^{i\theta}$, we obtain

$$|Z_\zeta| = 1 + 4t \cos 3\theta + t^2(2 + 17 \cos 6\theta) + t^3(-14 \cos 3\theta + 86 \cos 9\theta) + \dots \quad (9)$$

Find now the length of free surface S measured from the point $\zeta = 1$. Integrating series (9) over θ , we get:

$$S = \int_0^\theta |Z_\zeta| d\theta = \theta + \frac{4}{3}t \sin 3\theta + t^2\left(2\theta + \frac{17}{6} \sin 6\theta\right) + t^3\left(-\frac{14}{3} \sin 3\theta + \frac{86}{9} \sin 9\theta\right) + \dots \quad (10)$$

We find total length of the free surface S_0 by substituting $\Theta = 2\pi$ into (10):

$$S_0 = \int_0^{2\pi} |Z_\zeta| d\Theta = 2\pi + 4\pi t^2 - \frac{5\pi}{2} t^4 + \dots \quad (11)$$

We take the parameter α as a linear function of S :

$$\alpha = 2\pi S / S_0 \quad (12)$$

Such choice provides a uniform location of markers on the free boundary. When parameter α varies from 0 to 2π , one turn around the liquid along the free boundary is made. Substitution of series (10), (11) into (12) and carrying out their division, we obtain

$$\begin{aligned} \alpha = & \Theta + \frac{4}{3} t \sin 3\Theta + \frac{17}{6} t^2 \sin 6\Theta + \\ & + t^3 \left(-\frac{22}{3} \sin 3\Theta + \frac{86}{9} \sin 9\Theta \right) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Substituting series (13) into the formulae $\mu = e^{i\alpha}$, we get the change of variables $\mu(\zeta, t)$:

$$\begin{aligned} \mu = & \zeta + t \left(-\frac{2}{3\zeta^2} + \frac{2}{3} \zeta^4 \right) + \\ & + t^2 \left(-\frac{43}{36\zeta^5} - \frac{4\zeta}{9} + \frac{59\zeta^7}{36} \right) + \\ & + t^3 \left(-\frac{629}{162\zeta^8} + \frac{155}{54\zeta^2} - \frac{257\zeta^4}{54} + \frac{935\zeta^{10}}{162} \right) + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Now, if from (14) we obtain the series for the inverse function $\zeta(\mu, t)$, and substitute it into (2), then we have the sought series (6). However, it is easier to seek for the $Z(\mu, t)$ immediately in the following form:

$$\begin{aligned} Z = & \mu + t(\alpha_{1,-2}\mu^{-2} + \alpha_{1,4}\mu^4) + \\ & + t^2(\alpha_{2,-5}\mu^{-5} + \alpha_{2,1}\mu + \alpha_{2,7}) + \\ & + t^3(\alpha_{3,-8}\mu^{-8} + \alpha_{3,-2}\mu^{-2} + \alpha_{3,4}\mu^4 + \alpha_{3,10}\mu^{10}) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Undetermined coefficients $\alpha_{i,j}$ are easily found if we require that after substituting (14) into (15), the original series (2) is obtained.

The free surface form at different time moments obtained by the Pade summation of series (6) is shown in Fig. 10.

Conclusion

The use of conformal mappings is convenient due to the fact that the free surface in the auxiliary plane ζ is fixed. Therefore, methods based on conformal map-

pings are often used for calculation of plane unsteady flows with a free boundary. As an example, we can mention the method of Zakharov-Dyachenko used in the numerical calculation of a long-continued evolution of water waves.

However, conformal mappings have a defect, which is organically common to them. If the domain is substantially deformed, then the conformal mapping becomes a fast-changing function and hardly suitable for the numerical simulation. In this paper, we show one way of correction of this defect when the solution is sought in the form of a power series in time. It is based on the use of some change of variables in the form of a power series too.

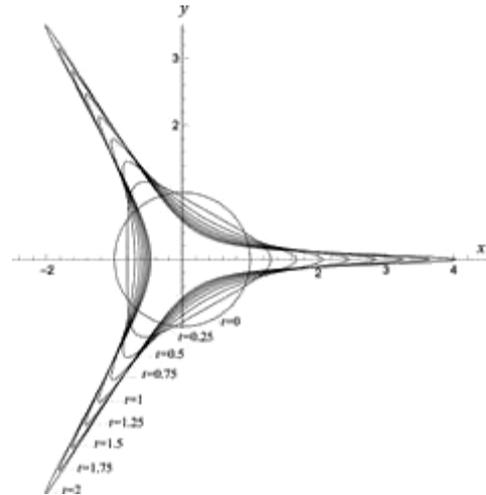


Figure 10 - Time evolution of the free surface.

References

1. L.V. Ovsyannikov. General equation and examples. In book: The Problem of the Unstable Flow with a Free Boundary, Nauka, Novosibirsk, 1967, pp. 5-75 (in Russian).
2. M.S. Longuet-Higgins A class of exact, time-dependent, free surface flows. J. Fluid. Mech. 1972. Vol. 55, No.3 pp. 529-543.
3. E.A. Karabut The use of power series in time in the problem of the motion of cylinder cavity in liquid. I. The finding of coefficients of power series. Dinamica splshnoi sredy. Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk. 1986. (78) pp. 56-73.
4. E.C. Titchmarsh. The theory of functions. Oxford University Press, 1939

ВЛИЯНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ПОВЕДЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ

Махров В.П.¹, Глущенко А.А.², Юрьев А.И.²

¹Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI

²ООО "Компания "ЭЛТА"

4, Volokolamskoe shosse, 125993 Moscow
k608@mai.ru, mr.glushchenko@yahoo.com

Аннотация

В статье рассматриваются результаты теоретического исследования поведения свободных границ каверны, формируемой за телом в высокоскоростном потоке жидкости с помощью гидродинамических особенностей. В практических задачах в качестве таких особенностей используются кольцевые крылья с соответствующим профилем в сечении. Показано, что при использовании кольцевых вихревых особенностей и метода численного решения уравнений Навье-Стокса в среде Flow Vision можно формировать каверны с границами в заданных пределах.

Ключевые слова: каверна; модели; расчётная сетка; кольцевое крыло.

Введение

Течения со свободными поверхностями обладают специфическими свойствами. В высокоскоростной гидродинамике к таким течениям относят явления кавитации, воронкообразования, волнообразования и др. В данной работе (в постановке 2D) рассматривается гидродинамика свободных границ каверны, формируемых искусственным путём за телом-кавитатором под воздействием внешних «гидродинамических особенностей». В практической реализации такими «особенностями» являются кольцевые крылья (насадки) с различными профилями в сечении, а формируемые с их участием кавитационные течения в отличие от «обычных» каверн, являются течениями многопараметрическими и соответствуют течениям Лайтхилла – Шушпанова [1].

В отличие от метода исследования подобных течений рассмотренного в работах [1] и [2] для сложных течений, к которым относятся и рассматриваемые в данной работе, в настоящее время широко используются САД – программы, что делает использование CFD – комплексов, поддерживающих импорт графической модели непосредственно в расчётную среду, удобным для исследования. В данной работе используется отечественный программный комплекс Flow Vision (далее – FV), базирующийся на методе численного решения универсальных уравнений Навье-Стокса, описывающих динамику потока жидкости, взаимодействующей с каверноформирующими элементами.

Программный комплекс FV основан на конечно-объемном методе решения уравнений гидродинамики и использует прямоугольную адаптивную сетку с локальным измельчением. Для

аппроксимации криволинейной геометрии с повышенной точностью FV использует технологию подсеточного разрешения геометрии. Использование этой технологии позволило решить проблему автоматической генерации сетки; чтобы сгенерировать сетку, достаточно задать всего лишь несколько параметров, после чего сетка автоматически генерируется для расчетной области, имеющей геометрию любой степени сложности.

Постановка задачи исследования.

Ставится задача по исследованию влияния присутствия кольцевого крыла и его положения относительно кавернообразующего элемента – кавитатора на границы формирующейся за кавитатором каверны при заданных условиях течения. Дополнительно провести численное решение задачи для условий поддува (вентиляции) каверны газом.

Решение задачи осуществляется поэтапно путём: задания области расчета; выбора математической модели движения; задания граничных условий; генерации расчетной сетки; задания параметров численного моделирования; получения результатов моделирования и их анализа. Рассмотрим кратко принятые решения по этапам.

1. Область расчёта – двухмерная поверхность.

2. Математическая модель движения

Принятая модель движения несжимаемой жидкости описывает течения вязкой жидкости/газа при малых числах Маха ($M < 0.3$), малых и больших (турбулентных) числах Рейнольдса. Допус-

каются малые изменения плотности, что позволяет естественным образом учесть подъёмную силу. В модель входят уравнения Навье-Стокса, энергии и уравнение конвективно-диффузионного переноса концентрации примеси. Рабочая среда является потоком несжимаемой, идеальной и невесомой жидкостью. Это означает, что будут решаться уравнения Навье-Стокса, уравнение переноса энергии и уравнения переноса турбулентных функций. Система указанных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & (\partial \rho V / \partial t) + \nabla \rho (V \times V) = \\ & = - \nabla P + \nabla ((\mu + \mu_t)(\nabla V + (\nabla V)^T)) + S; \quad (1) \\ & (\partial \rho / \partial t) + \nabla (\rho V) = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

где μ_t – турбулентная вязкость; S – источник

$$S = (\rho - \rho_{гид})g + \rho B + R, \quad (3)$$

В формуле (3) обозначены: B – силы вращения; R – силы изотропного и/или анизотропного фильтра сопротивления; $\rho_{гид}$ – гидростатическая плотность среды.

Граничным условием для кавитационных течений принято считать постоянство скорости на свободной границе каверны. В качестве эквивалента в данном случае можно использовать (в предположении квазистационарности потока в момент времени t) число кавитации σ в виде

$$\sigma = 2(p - p_\sigma) / \rho V^2 = const, \quad (4)$$

где p – абсолютное давление в потоке; p_σ – давление в каверне. Давление в каверне измеряется путем создания рассекающих плоскостей в узловых точках пространства.

Примем для дальнейших расчётов в качестве примера следующие входные физические параметры модели движения: скорость $V = 100$ м/с; пульсации – 0,01; масштаб турбулентности – 0,01м; минимальное давление $p = 100$ Па; молекулярная вязкость – $\mu = 1.82 \cdot 10^{-5}$ [кг м⁻¹ с⁻¹].

3. Генерация расчётной сетки. Для разрешения малых деталей геометрии расчетной области и высоких градиентов рассчитываемых величин используется прямоугольная адаптивная локально измельченная сетка (АЛИС). Сущность технологии АЛИС заключается в следующем. Во всей расчетной области вводится прямоугольная сетка. Выделяются подобласти с особенностями геометрии или течения, в которых необходимо провести расчет на более мелкой сетке по сравнению с исходной. При этом, расчетная ячейка, в которую попала выделяемая особенность, делится на 8 равных ячеек в трехмерном случае, а в двумерном – на 4 ячейки. Далее, если необходимо, то ячейки делятся еще раз и так до достижения необходимой точности. Ячейки начальной сетки называются ячейками уровня 0, ячейки, получаемые измельчением уровня 0, называются ячейками уровня 1 и т.д. При генерации АЛИС накладыва-ется условие, что гранями и ребрами могут граничить друг с другом только ячейки с номерами

уровней, отличающимися не более чем на единицу. В отличие от традиционных неструктурированных и структурированных мультиблоковых сеток ячейки АЛИС имеют переменное количество соседей – в трехмерном случае по грани с ячейкой могут соседствовать либо одна, либо четыре соседа. Это обстоятельство затрудняет реализацию численных методов с использованием АЛИС.

Однако АЛИС имеет значительные преимущества по сравнению с распространенными сетками. Во-первых, большая скорость генерации сетки. Во-вторых, АЛИС не предъявляет высоких требований к оперативной памяти компьютера по сравнению с неструктурированными сетками. Это обусловлено древовидной структурой АЛИС, при которой каждая ячейка связана с сеткой нулевого уровня, имеющей полную геометрическую информацию. В-третьих, при генерации АЛИС не появляются «плохие ячейки», которые имеют слишком большие отношения площадей граней. При использовании АЛИС геометрия объектов в расчетной области аппроксимируется первым порядком точности – "ступеньками". Повышение порядка разбиения сетки около поверхностей позволяет уменьшить вносимую такой аппроксимацией погрешность, но может потребовать слишком больших ресурсов компьютера, что не позволяет для САПР. Поэтому в настоящей работе предлагается новый подход описания произвольной криволинейной геометрии на прямоугольной поверхности методом подсеточного разрешения геометрии (см. рис. 1).

4. Задание параметров численного моделирования. В качестве профиля кольцевого крыла были выбраны: профиль с круглым сечением и профиль НАСА- 2204 (профиль Вальхнера). Профиль Вальхнера со скругленной входящей кромкой является скоростным, обладает хорошими гидродинамическими характеристиками и высокой скоростью начала кавитации. Схема, используемого в данном исследовании, каверноформирующего границы каверны кольцевого крыла показана на рисунке 2.

5. Результаты численного моделирования. Рассмотрим в качестве примера результаты численного исследования поведение границ каверны под внешним воздействием кольцевого крыла. При проведении моделирования были приняты: диаметр кавернообразующего диска (кавитатора) $d = 100$ мм; внутренний диаметр крыла $D = var$; расстояние от кавитатора до фронтальной плоскости кольцевого крыла $a = var$; скорость набегающего потока $V = 100$ м/с.

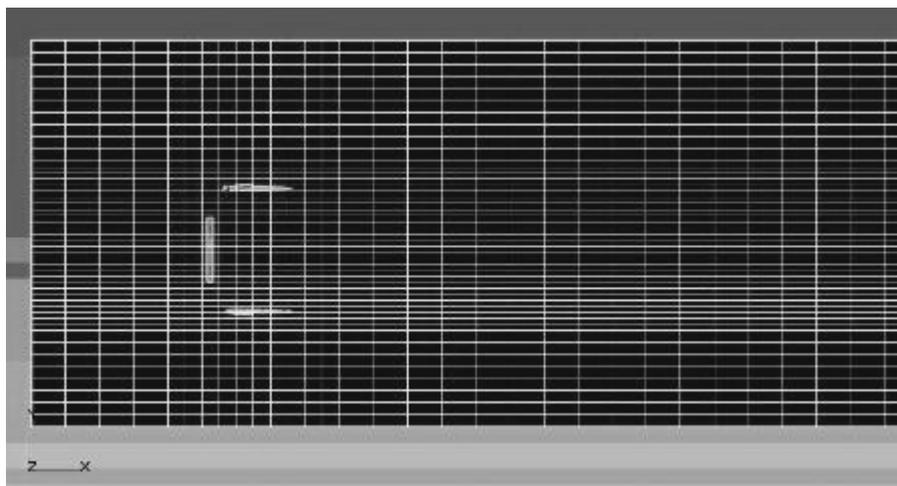


Рисунок 1 - Пример создания сетки

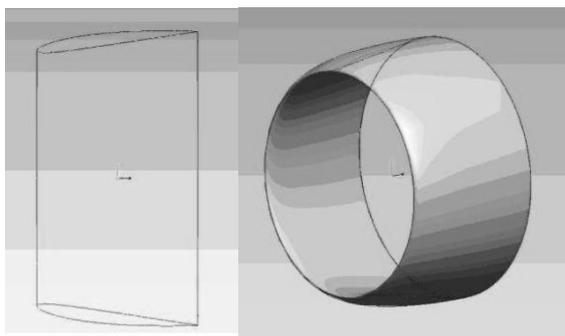


Рисунок 2 - Схема кольцевого крыла

На нижеприведенных в качестве примеров рисунках показаны результаты численного моделирования.

Получены замкнутые границы каверны на длине $L = 500$ мм.

Получены замкнутые границы каверны на длине $L = 950$ мм при $\sigma = -0,05$.

Получены замкнутые границы каверны на длине $L = 500$ мм при $\sigma = -0,1$.

Внутренняя структура каверны неоднородна.

Получены замкнутые границы неустойчивого кавитационного течения на длине $L = 320$ мм, при $\sigma = -0,2$.

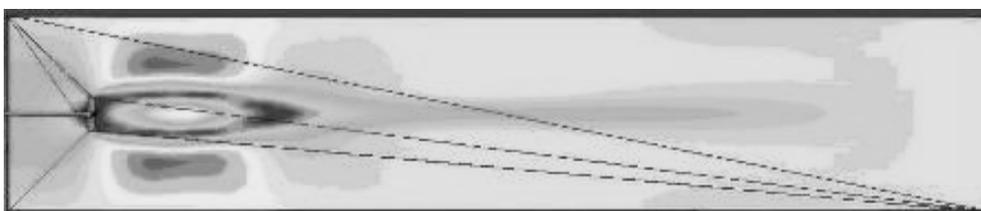


Рисунок 3 - Схема границ каверны за кавитатором- диском (тестовый пример).



Рисунок 4 - Схема границ каверны, формируемых кольцевым крылом с круглым сечением профиля ($D = 160$ мм и $a = 100$ мм).

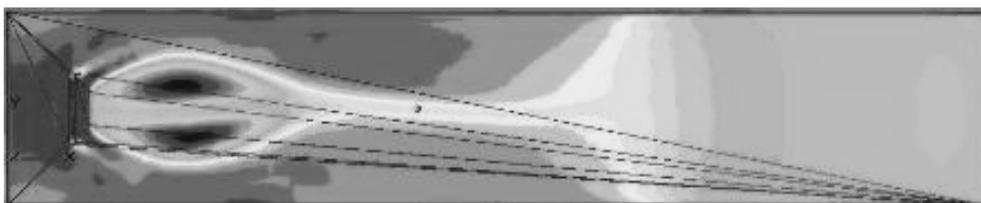


Рисунок 5 - Схема границ каверны при размещении кольцевого крыла с круглым сечением профиля впереди кавитатора ($D = 200$ мм и $a = -50$ мм)



Рисунок 6 - Схема границ каверны при размещении кольцевого крыла с круглым сечением профиля вблизи кавитатора ($D = 130$ мм и $a = 10$ мм).

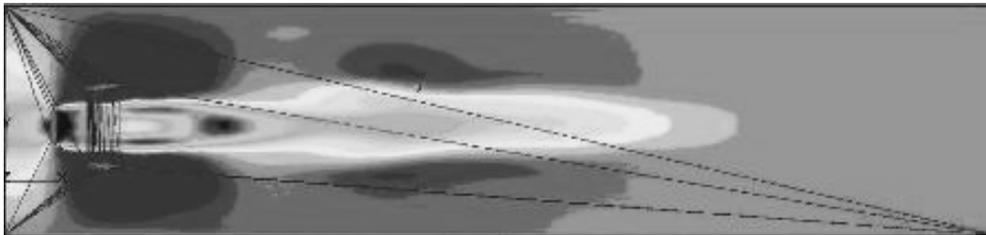


Рисунок 7 - Схема границ каверны при использовании кольцевого крыла с профилем NASA- 2204 при $D = 250$ мм и $a=100$ мм.

Получена замкнутая каверна на длине $L = 2200$ мм при $\sigma = -0,02$. Границы такого кавитационного течения неустойчивы.

Приведём в качестве примера предварительные результаты исследования поведения границ каверны при вдуве воздуха в формируемую каверну. Избыточное давление воздуха во всех расчётах было принято $2,5 \cdot 10^4$ Па.

На рисунках 8 и 9 показаны качественные картины границ формируемых течений.

Получена замкнутая каверна на длине $L > 5000$ мм, каверна однородная, устойчивая $\sigma = 0.9$. На рисунке демонстрируется также след расширяющейся каверны в идеальной жидкости.

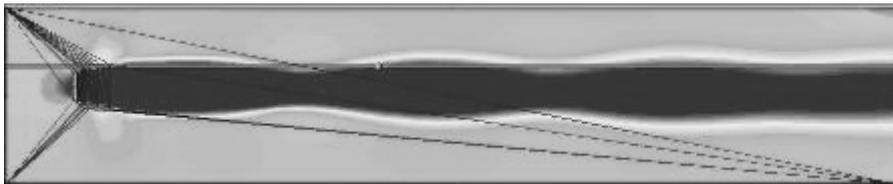


Рисунок 8 - Схема границ кавитационного течения, формируемого кольцевым крылом с профилем NASA - 2204, углом атаки профиля – 7 градусов, $D = 140$ мм, $a = 10$ мм.



Рисунок 9 - Схема свободных границ каверны с профилем NASA – 2204, углом атаки профиля – 7 градусов при $D = 150$ мм и $a = 50$ мм.

Здесь так же получены каверны с замыкающимися границами на длине $L > 5000$ мм. При увеличении диаметра крыла заметно увеличивается диаметр миделевого сечения каверны.

Выводы.

Из полученных предварительных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Комплекс FV может успешно применяться для теоретического исследования поведения границ каверны при вдуве воздуха в формируемую каверну. Избыточное давление воздуха во всех расчётах было принято $2,5 \cdot 10^4$ Па.

2. Поведение границ каверн, формируемых кольцевыми насадками (крыльями) с различными формами профиля в сечении полностью соответствуют концепции формирования таких течений по методу Лайтхилла-Шушпанова, рассмотренному в работах [1,2].

3. При проведении дальнейших работ целесообразно более детально исследовать влияние давления вдуваемого в каверну газа, в том числе с учётом его температуры, на поведение границ формируемого течения.

Литература

1. Махров В.П. Гидродинамика кавитационных течений формируемых внешними гидродинамическими особенностями (научное издание). – М.: Изд-во МАИ, 2011.

2. Махров В.П. Гидродинамика управляемых течений со свободными границами, формируемыми с использованием внешней гидродинамической особенности – кольцевого крыла.// Вестник МАИ, Т.16, №5, 2009. с.264-273.

NONISOTHERMAL VISCOUS FLOW WITH PARTICLES PAST OF THE ROTATING CIRCULAR CYLINDER

Irina V. Morenko¹, Vladimir L. Fedyaev^{1,2}

¹Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center,
Russian Academy of Sciences (IME KazSC RAS)

²Kazan National Research Technical University (KSTU)

2/31, Lobachevsky str., 420111, Kazan, Russia;
10, K. Marx str., 420111, Kazan, Russia

Abstract

The nonisothermal unsteady viscous cross flow with a particles past of the rotating circular cylinder is investigated. The influence of particles on the flow pattern is analyzed. The values of the drag, lift, Nusselt number depending on the rotational speed cylinder is driven.

Nomenclature

A_p	Surface area of the particles
C_D	Drag coefficient
\overline{C}_L	Lift coefficient
c	Heat capacity
D	Cylinder diameter
d_p	Particle diameter
E	Energy
\vec{f}_p	Drag force of the particle
h	Enthalpy
m_p	Particle mass
\overline{Nu}	Average Nusselt number
p	Pressure
\overline{Q}_p	Heat flow
r_p	Particle radius
R_0	Cylinder radius
Re	Reynolds number
St	Stokes number
T	Temperature
t	Time
u_∞	Free-stream velocity
v_0	Rotational velocity of the cylinder
α	Dimensionless rotational velocity
β_∞	Volume concentration
ρ	Mass density
μ	Dynamic viscosity coefficient
ν	Kinematic viscosity coefficient
λ	Thermal conductivity
τ	Local time
γ_∞	Mass concentration
ω_0	Angular velocity of rotation

Introduction

Fluid flow with particles around rotating bodies occurs when applying decorative and protective coatings on the surface; gas-flame and plasma spraying of

metal compounds on the working surface engineering products, abrasive cleaning them, as well as in several other cases. In this case, in addition to the hydroaerodynamics characteristics of the flow near the streamlined bodies of interest heat exchange processes between these bodies and the fluids.

In the experimental and numerical studies of homogeneous viscous fluid flow past of the rotating circular cylinder [1-8] established, that at the Reynolds number $Re \leq 200$ for laminar flow for each value of Re there is a critical rotational dimensionless speed of the cylinder surface α_1^* , α_2^* , α_3^* , that the nature of the fluid flow in the wake of change, the bifurcation flow occurs, the coefficient of drag and lift forces change. Thus, at low relative speeds $\alpha = v_0/u_\infty < \alpha_1^*$, here $v_0 = \omega_0 R_0$, ω_0 – angular velocity of rotation, R_0 – cylinder radius, u_∞ – free-stream velocity, flow around a cylinder is carried out in an oscillatory regime. For the interval $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ characterized by the fact that the instability of the flow disappears flow becomes stationary. The instability of the flow at the $\alpha_2^* < \alpha < \alpha_3^*$, but with a longer wavelength than the previously due to the strong influence of viscous effects near the surface of the cylinder. Finally, at the $\alpha > \alpha_3^*$ the shear rate is high, the flow again becomes stationary.

In contrast to these studies in this paper attention is paid to the influence of the mechanical particles in the incompressible viscous fluid flow as fluid dynamics and heat exchange of the rotating circular cylinder, in particular when the non-dimensional rotational speed of the cylinder varies. Hydrodynamics and heat stationary circular cylinder in a viscous liquid with a particles considered in [9, 10].

Problem Statement

Assuming that the volume concentration of solid particles does not exceed 10% for the mathematical description of related hydrodynamic and thermal processes used Lagrangian approach, according to which

tracked the movement and heat transfer of each particle. In this case, it is assumed as [11].

In the Cartesian coordinate system x_1Ox_2 two-dimensional flow of an incompressible viscous fluid in the absence of gravity is described by the equations:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\bar{f}_{pi}}{\rho}, \quad i=1,2. \quad (2)$$

Here, t – time; u_i, u_j – components of the velocity vector \vec{u} ($i, j=1,2$); p – pressure, ρ – is the fluid density, ν – kinematic viscosity of the fluid, \bar{f}_{pi} – the projection of the volume-averaged drag force of the particle on the axis x_i .

Energy conservation equation is given by:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla(\vec{u}(\rho E + p)) = \nabla(\lambda \nabla T) - \bar{Q}_p. \quad (3)$$

Here, $E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$, h – enthalpy, T – fluid temperature, λ – the thermal conductivity, \bar{Q}_p – volume-averaged heat flux to the particles.

Additionally assumed that the particles have averaged physical and mechanical properties.

In the local Cartesian coordinate system xoy the trajectory of a particle is described by the equations

$$\frac{dx}{d\tau} = u_{px}, \quad \frac{dy}{d\tau} = u_{py}, \quad (4)$$

where τ is the local time; u_{px}, u_{py} is the projection of the velocity vector \vec{u}_p particles on the coordinate axes. With the drag force exerted by the continuous phase on the particle, equation of motion can be written as

$$\frac{d\vec{u}_p}{d\tau} = F_p(\vec{u} - \vec{u}_p). \quad (5)$$

Here, $F_p = 9C_p \text{Re}_p \mu / 12\rho_p d_p^2$, $d_p = 2r_p$,

$\text{Re}_p = \frac{\rho d_p |\vec{u}_p - \vec{u}|}{\mu}$ – Reynolds number of the

particle, $C_p = a_1 + \frac{a_2}{\text{Re}_p} + \frac{a_3}{\text{Re}_p^2}$ – coefficient of force,

a_1, a_2, a_3 – constants.

According to relation (5) the drag force of the particle

$$\vec{f}_p = 0.5\pi C_p r_p^2 \rho |\vec{u} - \vec{u}_p| (\vec{u} - \vec{u}_p).$$

Hence, the volume-averaged components of the drag forces are \bar{f}_{pi} ($i=1,2$), included in the equation (2).

Because small particle size, they are long enough to remain in flow of a fluid of heat exchange with the surroundings is weak, it is assumed that the

thermal state of the particles is characterized by their volume mean temperature T_p .

In the case where the particles are thermally slim body radiant heat is ignored the particle heat balance equation is given by

$$m_p c_p \frac{dT_p}{d\tau} = \alpha_p A_p (T - T_p),$$

where m_p is the mass, c_p is the heat capacity, A_p is the surface area of the particles.

This relationship allows to find the heat flux to the particles in the test volume, to estimate the \bar{Q}_p with the concentration of particles in this volume.

Governing equations (1)–(3) complemented boundary and initial conditions, equations (4)–(5) complemented initial conditions.

Further, as the computational domain is selected rectangle 0.50 m long and 0.40 m wide. The coordinate system origin x_1Ox_2 located in the center of the cylinder with radius $R_0=0.005$ m at a distance 0.10 m from the inlet section at an equal distance from the side boundaries.

The input section, perpendicular to the axis $0x_1$, lets: $u_1 = u_\infty = \text{const}$, $u_2 = 0$; operating pressure $p_0=0.1$ MPa; the temperature of the fluid $T = T_0 = \text{const}$.

At the exit of the computational domain, we use the following boundary conditions: $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$,

$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$, which means that the alignment of the output as the hydrodynamic and thermal characteristics.

The condition on the side boundaries can be written in the form $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$, $u_2 = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$.

It is believed that on the surface of the cylinder realized the carrier medium slip condition: normal component of the velocity of the fluid $u_n = 0$, tangential component $u_\tau = v_0$. The surface temperature of the cylinder remains constant and equal to T_w . In this case, there is a convective heat transfer, heat flux on the surface of the cylinder $q_w = \alpha_w (T_w - T_0)$, here α_w – desired coefficient of convective heat transfer.

At the initial time $t=0$ the fluid begins to move, $u_1 = u_\infty$, $u_2 = 0$, $p = p_0$, $T = T_0$.

In the calculation of the kinematics of the particles the origin of the local coordinate system xoy placed at the point of touch particles in the carrier medium. These points are located along the inlet section, the axis Ox is directed parallel to the axis Ox_1 . At the initial time $\tau=0$ $u_{px} = u_\infty$, $u_{py} = 0$, particle temperature $T_p = T_{p0} = T_0$. In addition to particle velocity the radius is defined, particle density ρ_p , the

mass flow rate G_p , which depends on the number of particles entering the computational domain in the time unit.

If the particle leaves the computational domain, it not be returned. In case of contact with the surface of the body particles bounce off the relevant normal and tangential velocity components.

In carrying out the calculations in the initial stage of the impurity in the carrier medium are not thrown, it remains homogeneous. The particles are thrown into the stream, starting at time moment 100. The density of the liquid (water) $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$; the dynamic viscosity coefficient $\mu = \rho\nu = 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{c)}$; the specific heat at constant pressure $c = 4182 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$; the thermal conductivity $\lambda = 0.6 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; the density of particle material (steel) $\rho_p = 8030 \text{ kg/m}^3$; the specific heat $c_p = 502.48 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$; the thermal conductivity $\lambda_p = 16.27 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $\varepsilon = \rho/\rho_p = 0.1245$.

The Reynolds number $Re = 2R_0u_\infty/\nu$ is set equal to 200, accordingly, the fluid velocity at the inlet $u_1 = u_\infty = 0.02 \text{ m/c}$; angular speed of the rotation of the cylinder ω_0 varies. The temperature of the water and particles at the inlet $T = T_p = T_0 = 300 \text{ K}$; the temperature of the cylinder surface $T_w = 350 \text{ K}$.

Numerical Simulation Results

The integration of the corresponding equations is performed using program complex Fluent (license KSTU). The implicit solver of second order accuracy selected.

Calculation of flow past a rotating cylinder of a homogeneous viscous fluid is conducted to test the program complex. Dimensionless rotation speed α varies from 0.0 to 5.0.

The characteristic pattern of the flow when the flow is left on a rotating counterclockwise cylinder ($\alpha = 1.0$) shown in Figure 1.

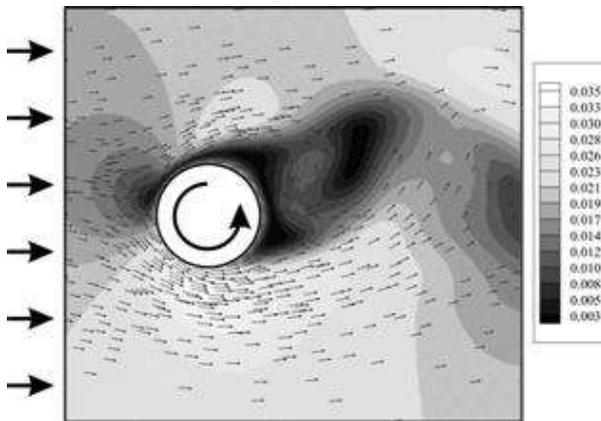


Figure 1 - Areas of constant velocity and velocity vector

There is a shift up the stagnation region, the acceleration of the flow below the cylinder, where a low pressure area. A similar behavior is illustrated by pho-

to (Figure 2) [12]. The streamlines are displayed when the cylinder is rotated counterclockwise.

At unsteady fluid flow around the bodies basic estimated values are coefficient of drag

$$C_D = \frac{F_{x1}}{0.5\rho u_\infty^2 D}, \text{ coefficient of lift } C_L = \frac{F_{x2}}{0.5\rho u_\infty^2 D},$$

average Nusselt number $\overline{Nu} = \overline{\alpha_w} D/\lambda$, which characterizes intensity of heat exchange. Here, $D = 2R_0$ – cylinder diameter, F_{x1} , F_{x2} – projection on the axis Ox_1 , Ox_2 drag force, ω – vortex shedding of the cylinder surface, $\overline{\alpha_w}$ – average convective heat transfer coefficient.

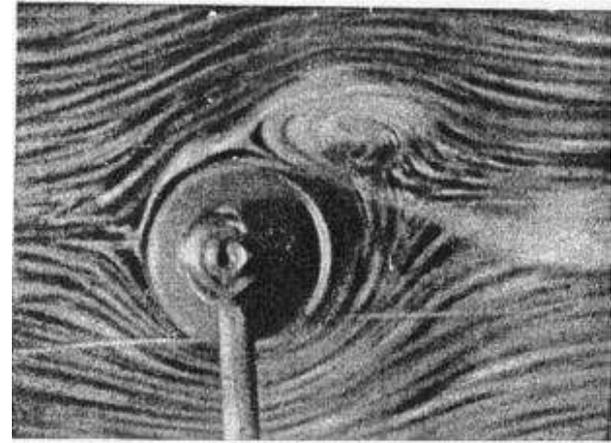


Figure 2 - The streamlines of the flow past of the rotating cylinder [12]

For large values of the time t , when the flow past of the cylinder is stabilized, calculated drag coefficient of the stationary cylinder ($\alpha = 0$) coincides with the value given in the handbook [13] and other publications. The calculation results of the lift coefficient C_L for different values of the dimensionless speed α compared with the values C_L , found by calculation S. Mittal, B. Kumar [5]. There is good agreement between the results obtained and current. It can be seen that when $\alpha_1^* \approx 2.0$, $\alpha_2^* \approx 4.3$, $\alpha_3^* \approx 4.9$ behavior of the coefficient of lift with time and therefore the trace of the body, suddenly changes.

In the limiting case, when the cylinder is not rotated ($\alpha = 0$), according to [13,14] the average Nusselt number is equal to, respectively, 17.60 and 15.13, this a few less than the calculated 18.1.

Along the input boundary the 500 particles sources are placed. The particles with a diameter 10^{-3} m out to the stream. The volume particle concentration at the inlet β_∞ is 1.5%, mass concentration is $\gamma_\infty = 11.0\%$. In this case, the particle Stokes number is

$$Stk = \frac{d_p^2 u_\infty \rho_p}{18\mu D} = 0.9.$$

As can be seen from Figure 3, throw in a stream of particles leads to an increase the average drag coefficient of the cylinder. However, the influence of particles depending on α appears different. If at $\alpha < \alpha_1^*$

drag coefficient increases on average 20%, at the $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ increases on 165%, at the $\alpha_2^* < \alpha < \alpha_3^*$ – on 65%. Thus, the greatest relative impact of particles on the drag of the cylinder is observed at such rotation speeds when in the body wake is stationary. It's interesting that when $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ the drag coefficient of the cylinder in a uniform flow around it as well as two-phase flow reaches a minimum, and the presence of particles leads to a shift of the minimum towards lower values of the velocity α .

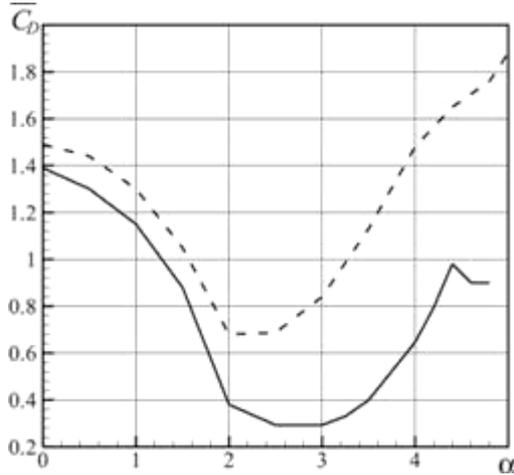


Figure 3 - Dependence of the average drag coefficient from the dimensionless rotation speed: solid line – homogeneous flow, dotted line – water flow with particles

In contrast, the average drag coefficient of the cylinder, the presence of particles in the stream decreases the mean coefficient of lift \bar{C}_L (Figure 4a). The effect of the particles is greater, the higher the dimensionless rotation velocity of the cylinder. So when $\alpha = 5.0$ coefficient \bar{C}_L decreases on 41%.

In the case of a homogeneous medium the amplitude of the lift coefficient ΔC_L has the largest value when the flow is unstable ($\alpha < \alpha_1^*, \alpha > \alpha_3^*$), and is equal to zero $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$ (Figure 4b). The presence of particles in the flow has a noticeable effect on the amplitude ΔC_L at the $3.0 < \alpha < \alpha_2^*$ and $\alpha_2^* < \alpha < \alpha_3^*$: in the first case it increases, in the second – reducing significantly (about 8 times).

Change in the average Nusselt number \bar{Nu} with increasing the dimensionless rotation speed of the cylinder is shown in Figure 5. With respect to heat transfer cylinder, two-phase fluid flow can be divided into three specific intervals of α : $0 < \alpha < 3.0$, $3.0 < \alpha < \alpha_2^*$, $\alpha_2^* < \alpha < \alpha_3^*$. At the $\alpha < 3.0$ throw particles in a homogeneous flow of a viscous fluid few intensifies heat transfer, the Nusselt number \bar{Nu} increased approximately by 15%. Further increase in rotation speed of the cylinder leads to the fact that the $3.0 < \alpha < \alpha_2^*$ heat transfer sharply worsens, \bar{Nu} reduced by 55%.

During subsequent growth α ($\alpha_2^* < \alpha < \alpha_3^*$) the heat transfer rate is reduced, the value of the Nusselt number for the flow with particles approaching to the Nusselt number for the homogeneous flow.

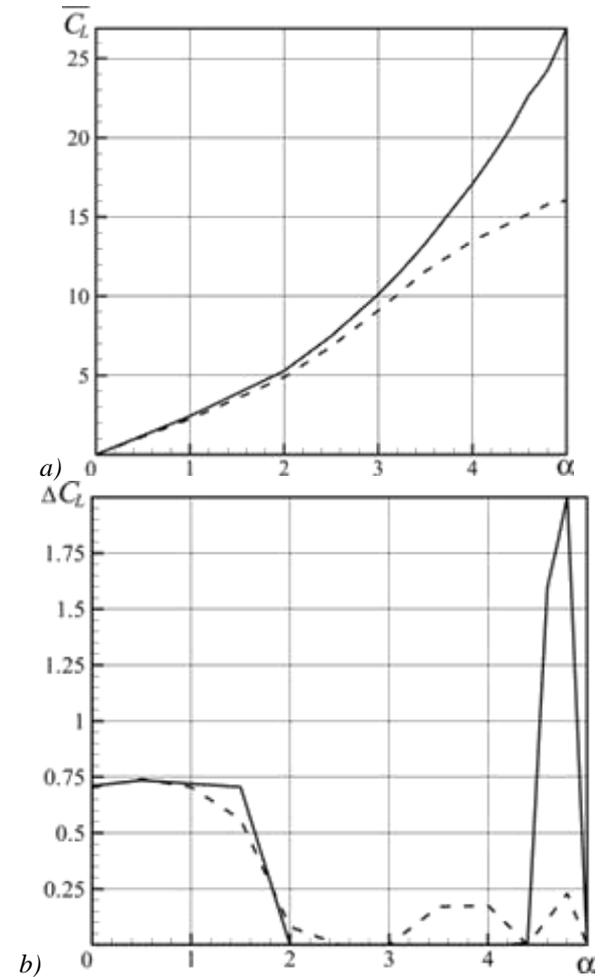


Fig. 4 Dependence of the average lift coefficient (a), the amplitude of the lift coefficient (b) from the dimensionless rotation speed α : solid line – homogeneous flow, dotted line – water flow with particles

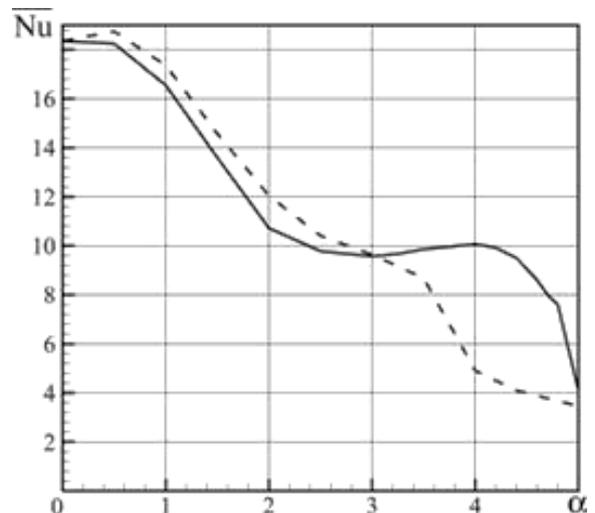


Fig. 5 Dependence of the average Nusselt number from the dimensionless rotation speed:

solid line – homogeneous flow,
dotted line – water flow with particles

Conclusions

Adding particles to the flow past of the rotating circular cylinder leads to the substantial change in the hydrodynamic and thermal characteristics of the body. The drag of the cylinder increases, the lift is reduced. Heat transfer cylinder increases with the dimensionless speed $\alpha < 3.0$ and decreases at the $\alpha > 3.0$.

Acknowledgments

Work performed under the Federal Program "Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia" for 2009-2013 (state contract N 14.V37.21.0644).

References

1. Hu G.H., Sun D.J., Yin X.Y., Tong B.G. Hopf bifurcation in wake behind a rotating and translating circular cylinder // *Phys. Fluids*. 1996. 8(7). P.1972-1974.
2. Kang S., Choi H., Lee S. Laminar flow past circular cylinder // *Physics of Fluids*. 1999. 11(11). P.3312-3321.
3. Barnes F.J. Vortex shedding in the wake of a rotating circular cylinder at low Reynolds numbers // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2000. N33. P.141-144.
4. Stojkovic D., Breuer M., Durst F. Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder // *Physics of Fluids*. 2002. 14(9). P.3160-3178.
5. Mittal S., Kumar B. Flow past a rotating cylinder // *J. Fluid Mech.* 2003. vol. 476. P. 303-334.
6. Morenko I.V., Mazo A.B. Numerical simulation of viscosity separated flow past a rotating circular cylinder. // *Second International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics»*, June 27 – July 3, 2004. Cheboksary. P. 307-311.
7. Mazo A.B., Morenko I.V. The interaction of a viscous fluid flow with a rotating circular cylinder // *Proc. Mat. Center. N.I.Lobachevsky. Vol. 27. Models of continuum mechanics. Proceedings of the XVII session of the intern. on models of continuum mechanics*, 4 – 10 July, 2004, Kazan. - Kazan: Kazan. Math. of the Society. 2002. P. 161-171.
8. Akoury R., Braza M., Perrin R., Harran G., Hoarau Y. The three-dimensional transition in the flow around a rotating cylinder // *J. Fluid Mech.* 2008. vol. 607. P.1-11.
9. Morenko I.V., Fedyaev V.L. Features of flow past a cylinder in the two-phase flow // *Ecological Bulletin scientific centers of Black Sea Economic Cooperation*. 2010. N.4. P. 52-58.
10. Morenko I.V., Fedyaev V.L. Nonisothermal monodispersed mixture flow around a circular cylinder // *Thermal processes in engineering*. 2011. T. 3. N.6. P. 242-252.
11. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. Part I. M.: Nauka, 1987. 464 p.
12. The current state of the fluid dynamics of a viscous liquid. The theories and experimental work on the boundary layer, the turbulent motion and movement in the wake. Vol.1. / Ed. N.Ya. Fabrikant. M.: Gos. izd. literature, 1948. 378 p.
13. Kutateladze S.S. Heat transfer and flow resistance: A Reference Guide., M.: Energoatomizdat, 1990. 367 p.
14. Dorfman L.A. Hydrodynamic resistance and heat transfer of rotating bodies. M.: Gos. publishing house of sci. literature, 1960. 260 p.

ДВУХСЛОЙНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ

Снигеров Б.А.

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН

420111, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Лобачевского, 2/31

Snigerev@mail.knc.ru

Аннотация

Работа посвящена численному моделированию двухслойного течения нелинейно-вязких жидкостей в плоском канале. Движение жидкостей описывается уравнениями сохранения массы и импульса, дополненные реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости по модели Карро. Приводится методика численного решения задачи на основе метода конечных элементов. Получены результаты по полю скоростей, положению границы раздела в двухслойном потоке в зависимости от реологических свойств жидкости и режимов течения.

Обозначения

ρ	Плотность
v	Скорость
p	Давление
τ_{ij}	Девиатор напряжения
σ_{ij}	Полное напряжение
μ	Динамическая вязкость
D_{ij}	Тензор скоростей деформаций
η_0	Наименьшая динамическая вязкость
η_∞	Наибольшая динамическая вязкость
I_2	Второй инвариант тензора скоростей деформаций
σ_{ij}	Единичный тензор
H	Главная кривизна поверхности
n_i, t_i	Компоненты единичного вектора нормали
Индексы	
1	Жидкость 1
2	Жидкость 2
i, j	Индексы по пространству

Введение

Многие изделия в химической, фармацевтической, пищевой и других отраслях промышленности выпускаются с использованием многослойных материалов. В последнее время на рынке многослойных изделий повысились требования к их потребительским свойствам, таким как качество материала, равномерность толщины слоев, плотности и др. Таким образом, в последнее время остро стоит задача повышения качества технологий нанесения многослойных покрытий на различные поверхности. Исследование двухслойных течений неньютоновских жидкостей в каналах позволит лучше определить необходимые параметры технологических процессов изготовления многослойных изделий [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим течение двух несмешивающихся неньютоновских жидкостей в сходящемся канале, схема которого представлена на рис. 1. Для описания двухслойного течения жидкостей вводится декартова система координат x_1, x_2 , начало которой располагается в точке О (рис. 1.), ось x_1 направляется горизонтально. Введем следующие обозначения для границ: S_1^k, S_2^k - входное и выходное сечения для жидкости k ($k=1,2$), S_3^k, S_4^k - твердые непроницаемые стенки, S_5 - подвижная граница раздела двух несмешивающихся жидкостей.

Предполагается, что течение обеих жидкостей установившееся, ламинарное, безволновое. Уравнения движения имеют вид

$$\rho^k \left(\frac{\partial v_i^k}{\partial t} + v_j^k \frac{\partial v_i^k}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p^k}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^k}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i^k}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где $k=1,2$ - жидкости с индексом 1 и 2 соответственно. В (1) v_i, v_j - компоненты вектора скорости \vec{v} , x_i, x_j - координаты ($i, j=1,2$), t - время, p - давление, ρ - плотность, τ_{ij} - девиатор напряжения. Жидкости считаются нелинейно-вязкими, для которых девиатор напряжения зависит от тензора скоростей деформаций в виде [2,3]

$$\tau_{ij}^k = \eta^k (I_2) D_{ij}^k,$$

$$\eta^k (I_2) = \eta_\infty^k + (\eta^k - \eta_\infty^k) \left[1 + (\lambda I_2)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}$$

Здесь η_0^k, η_∞^k - наибольшая и наименьшая эффективные сдвиговые вязкости полимерной жидко-

сти k соответственно, $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ - тензор

скоростей деформаций, I_2 - второй инвариант тензора скоростей деформаций, λ, n - параметры модели. На входе в расчетную область задается скорость w^k и давление на входе p_0^k для жидкости k соответственно, тогда граничные условия для потоков запишутся в виде $S_1^k: v_1^k = w^k, v_2^k = 0, p^k = p_0^k$; $S_2^k: \partial v_1^k / \partial x_1 = 0$; $S_3^k: v_1^k = v_2^k = 0$. На поверхности раздела двух жидкостей S_5 должно выполняться кинематическое условие непротекания $v_i^k \cdot n_i = 0$, а также равенство касательных скоростей $v_i^k \cdot t_i = v_i^2 \cdot t_i$, где n_i, t_i - компоненты единичного вектора нормали и касательной к поверхности S_5 . Для полного тензора напряжения, определяемого как $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$, где δ_{ij} - компоненты единичного тензора, выполняются два динамических условия [4,5]

$$\sigma_{ij}^1 \cdot n_j = \sigma_{ij}^2 \cdot n_j + 2\gamma H n_j, \sigma_{ij}^1 \cdot t_j = \sigma_{ij}^2 \cdot t_j \quad (3)$$

Здесь γ - коэффициент поверхностного натяжения, H - главная кривизна поверхности раздела. В двумерном случае поверхность раздела описывается уравнением $F(x_1, x_2, t) = 0$, тогда выполняется следующее условие [6]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_i^k \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

2. Метод решения

Для численного решения задачи (1) - (2) применяется метод конечных элементов [5,7]. Область течения разбивается на две расчетные области Ω_1 и Ω_2 , занимаемые жидкостями 1 и 2 соответственно. Для удовлетворения граничного условия разрыва нормальных напряжений (3), граница S_5 покрывается сеткой сдвоенных узлов, имеющих различные номера, но одинаковые координаты. Численное решение задачи в областях Ω_1 и Ω_2 , с неизвестным положением границы раздела S_5 строится с помощью следующего итерационного алгоритма. На первом этапе, считая положение границы S_5 на n итерации известным, численно решаются уравнения (1)-(2) в областях Ω_1 и Ω_2 со следующими упрощенными граничными условиями на S_5 для области Ω_1

$$\begin{aligned} v_i^k \cdot t_i \Big|_{n+1} &= v_i^k \cdot t_i \Big|_n, \quad v_i^k \cdot n_i \Big|_{n+1} = 0 \\ \sigma_i^k \cdot n_i \Big|_{n+1} &= \sigma_i^k \cdot n_i \Big|_n + 2\gamma H n_j, \\ \sigma_i^k \cdot t_i \Big|_{n+1} &= \sigma_i^k \cdot t_i \Big|_n \end{aligned}$$

Затем аналогичная задача решается для области Ω_2 , когда значения на границе S_5 вычисляются по известному решению в области Ω_1 . После

первого этапа определяется поле скоростей, давлений и напряжений в обеих областях на $n+1$ итерации. Затем с помощью численной аппроксимации кинематического условия (4), определяется положение новой границы раздела $F_5^k \Big|_{n+1}$ для областей Ω_1 и Ω_2 . Новое положение границы берется в виде линейной интерполяции функций F_5^k . Далее возможен переход к первому этапу с известным новым положением границы и решением задачи на предыдущей итерации.

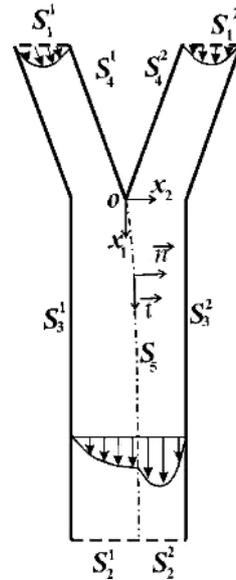


Рисунок 1 - Схема расчетной области двухслойного потока жидкости

3. Результаты расчетов

Установившаяся безволновая картина течения двухслойной жидкости для двух линейно вязких жидкостей с равенствами плотностей $\rho_1 = \rho_2$, расходов на входе $Q_1 = Q_2$, но с различными вязкостями, удовлетворяющих соотношению $\eta_1 / \eta_2 = 10$, показана на рис. 2 в виде линий тока.

Из рис. 2 видно, что граница раздела потоков совпадает с линией тока, исходящей из точки на границе, являющейся точкой схода двух слоев жидкости. На рис. 3 приведены профили границы раздела для течения двух ньютоновских жидкостей в канале при $\rho_1 = \rho_2, Q_1 = Q_2$, но с различными отношениями вязкостей в сечении $x = 5h$, где h - ширина канала. Профиль скорости в данном сечении считается установившимся. Берутся отношения η_1 / η_2 равные следующим значениям $\eta_1 / \eta_2 = 2, 5, 10, 20$. Видно, что увеличение вязкости жидкости (с индексом 2) нижнего слоя приводит к тому, что положение границы раздела смещается в сторону менее вязкой жидкости. В случае течения двух одинаковых жидкостей, при условии равенства их расхода, граница раздела располагается в середине канала на высоте $h/2$. Обозначим через l_1, l_2 - ширины потоков несмешивающихся жидко-

стей. Введем безразмерную величину h_f как $h_f = 2l_1/h$, показывающую степень изменения ширины потока при совместном течении в канале. Расчеты показывают, что при увеличении вязкости нижнего слоя для выбранных значений величина h_f изменяется как $h_f = 1.09, 1.14, 1.17, 1.22$. Видно, что при совместном течении двух жидкостей в плоском канале для $\eta_1/\eta_2 = 10$ приводит к тому, что ширина потока более вязкой жидкости увеличивается на 22 %.

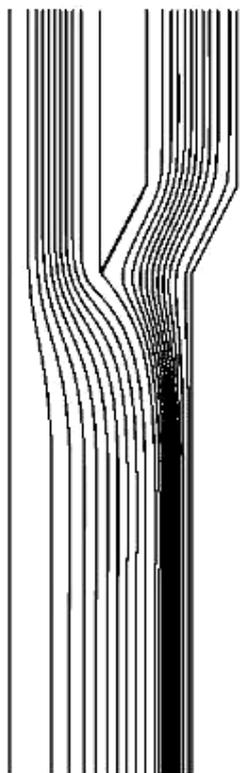


Рисунок 2 - Линии тока течения двух ньютоновских жидкостей для $\eta_1/\eta_2 = 10$

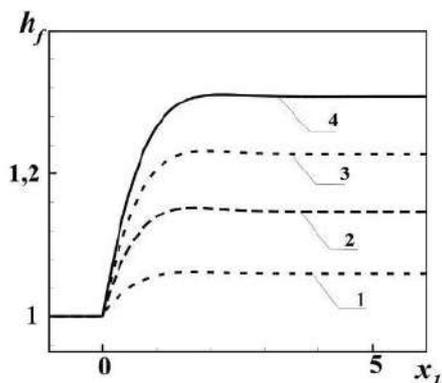


Рисунок 3 - Форма профиля границы раздела жидкостей при различных отношениях вязкостей η_1/η_2 : 1- $\eta_1/\eta_2 = 2, 2-5, 3-10, 4-20$

Форма профиля скорости для течения двух жидкостей с отношениями вязкостей $\eta_1/\eta_2 = 2, 5, 10, 20$ приведена на рис. 4. Следует

отметить также, что с увеличением вязкости нижнего слоя профиль скорости становится более вогнутым, при этом значение скорости на границе раздела уменьшается. Безразмерное значение скорости жидкости в точке границы раздела для выбранных отношений вязкостей жидкости в сечении $x_1 = 5h$ (рис. 4а) равняется $v_1/w = 0.95, 0.91, 0.87, 0.65$. На рис. 4б приведены соответствующие профили скорости в сечении $x_1 = 0.1h$. В данном сечении, расположенном на расстоянии $x_1 = 0.1h$ от точки схода двух потоков, происходит трансформация профилей скорости из за значительной разницы вязкостей набегающих потоков. Профиль скорости еще не установившегося потока характерен тем, что с увеличением вязкости скорость жидкости на границе раздела также уменьшается.

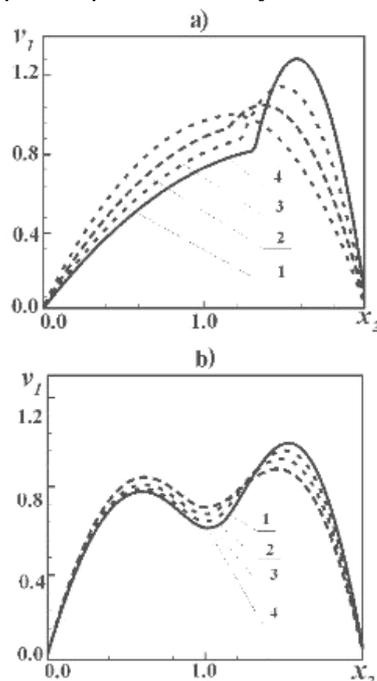


Рисунок 4 - Распределение осевой скорости при различных отношениях вязкостей η_1/η_2 : 1- $\eta_1/\eta_2 = 2, 2-5, 3-10, 4-20$ в вертикальном сечении для а) для $x_1 = 5h$; б) $x_1 = 0.1h$

Рассмотрено также совместное течение для линейно вязкой жидкости в области Ω_1 и нелинейно вязкой в области Ω_2 . Плотности, расходы жидкостей совпадают, наибольшая эффективная сдвиговая вязкость неньютоновской жидкости в области 2 выбирается равной вязкости ньютоновской жидкости в области 1 ($\eta_0^2 = \eta_1$), но изменяется степень аномалии нелинейно вязкой жидкости (индекс течения n). На рис. 5а показаны профили скорости в дальнем сечении $x_1 = 5h$ для значений индекса течения $n = 0.9, 0.6, 0.4$, а на рис. 5б в ближнем сечении $x_1 = 0.1h$ соответственно.

Профиль скорости еще не установившегося потока характерен тем, что с увеличением вязкости скорость жидкости на границе раздела также уменьшается. Увеличение степени аномалии вязко-

сти приводит уменьшению ширины потока верхнего слоя, значения параметра h_f соответственно равны $h_f = 1,01, 1,09, 1,12$.

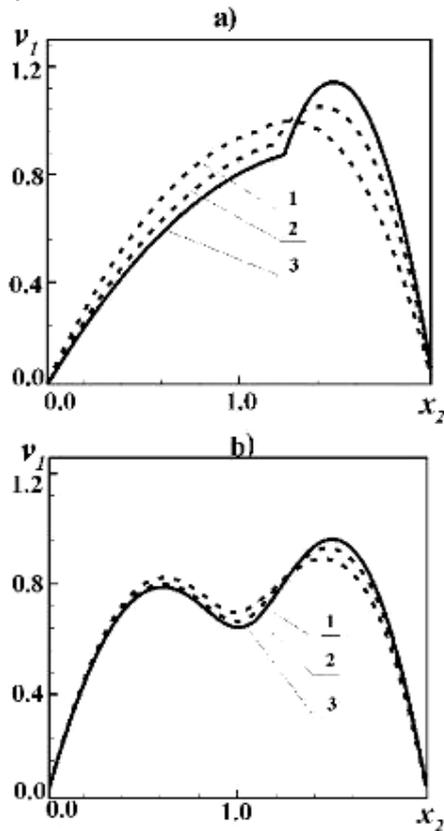


Рисунок 5 - Профили скорости в сечении канала для различных значений индекса течения $n = 0.9, 0.6, 0.4$ а) $x_1 = 5h$; б) $x_1 = 0.1h$

Заключение

В настоящей работе рассмотрено двухслойное течение нелинейно-вязких несмешивающихся жидкостей в плоском канале. Определены основные

гидродинамические параметры процесса совместного течения. Получены результаты о толщине слоев потоков в зависимости от реологических и физических свойств жидкостей и кинематических характеристик течения.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (гос. контракт № 14. В37. 21. 0644).

Литература

1. Янков В.И., Глот И.О., Труфанова Н.М. Митрофанова О.В. Г Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика. Изд-во УРС, Ижевск, 2010. 368с.
2. Назмеев Ю.Г. Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных жидкостей. М.: Энергоатомиздат. 1996, 229с.
3. Литвинов В.Г. Движение нелинейно вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376с.
4. Torres A., Нгумак А.Н., Vlachopoulos J. Boundary conditions for contact lines in coextrusion flows // Rheologica Acta. 1993. Vol. 32. p. 513-525.
5. Снигерев Б.А, Алиев К.М., Тазюков Ф.Х. О форме выходящей струи при выдавливании вязкоупругой жидкости из плоского щелевого канала// Вестник Самарского государственного университета. 2009. 2012 г. №6(72). С. 103-138.
6. Keunings R. An algorithm for simulation of transient viscoelastic flows with free surface//J. Comp. Phys. 1986. Vol.62. P.199-220.
7. Nickell R. E., Tanner R.I., Caswell B. The solution of viscous incompressible jet and free surface flow using finite element method//J. Fluid. Mech. 1974. Vol.65, №1. P.189-206.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Стакун А.А.

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

428015 Чебоксары, Московский пр-т 15

asail@mail.ru

Реферат

Изложен метод решения задачи Дирихле для уравнений вида

$$q(x)u_{tt} + u_{xx} + R(x)u = 0,$$

$$q(x) = |x|^b \operatorname{sign}(x)r(x), r(x) > 0,$$

на прямоугольнике $t \in [0; T]$, $x \in [-a; c]$, $T, a, c > 0$ и на бесконечной полосе $t \in [0; T]$, $x \in [-a; +\infty)$. Во втором случае, на поведение $q(x)$, $R(x)$ на бесконечности налагаются дополнительные ограничения. При этом $b > -1$, либо $b = 0$, либо $b = -1$, так что, вышеуказанное уравнение можно считать уравнением типа Чаплыгина или типа Лаврентьева-Бицадзе (в зависимости от значения b).

THE DIRICHLET BOUNDARY PROBLEM ASSOCIATED WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS ABOUT A DIFFERENT TYPE

Stakun Alfred Antonovich

kandidat of physics and mathematical sciences

assistent professor of H. mathematics Department,

Chuvash State University, Russia, Cheboksary

asail@mail.ru

Abstract

The present article considers Dirichlet problem for some classes equations about a different type. The indefinite inner product is useful for classification of this problem. The consideration concerned with the author's researches associated with differential operators about a singular turning point.

Key words: operator, resolvent, discrete and continuous spectra, indefinite metric, eigenfunctions, asymptotic, expansion, boundary problem, contour integral, equations about a different type, Dirichlet boundary problem, bounded, unbounded domain

Уравнение Лаврентьева-Бицадзе, известное в аэродинамике больших скоростей [8, с.303], имеет вид $u_{tt} + \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^\gamma u_{xx} = 0$, $0 \leq \gamma < 2$. В данной работе будет изложено рассмотрена задача Дирихле на бесконечной полосе и на прямоугольнике для случая $\gamma = 1$ (для компактности изложения – случай $1 < \gamma < 2$ рассматривается аналогично, случай же $0 \leq \gamma < 1$, в силу используемой нами методики, в этой работе удобнее рассматривать вместе с уравнением типа Чаплыгина). Для уравнения более общего вида $u_{tt} + p(x)u_{xx} + P(x)u = 0$, где $p(x) = x/r(x)$, $r > 0$, т.е., $p(x)$, $P(x)$ - произвольны (с ограничениями на гладкость).

1. Постановка задач. Спектральные задачи.

Рассмотрим краевую задачу

$$q(x)u_{tt} + u_{xx} + \theta(x)u + F(x)u = 0, F = R(x) - \theta;$$

$$q(x) = r(x)/x, r(x) > 0, r(0) = 1;$$

$$x \in [-\alpha; +\infty),$$

$$\alpha > 0; t \in [0; T]; T > 0; r(x) \in C^2[-\alpha; +\infty);$$

$$B = [-\alpha; +\infty) \times [0; T]; \quad (1)$$

$$u(x; 0) = \varphi(x); u(x; T) = \psi(x); \quad (2)$$

$$u(-\alpha; t) = a(t). \quad (3)$$

На бесконечности требуется ограниченность решения уравнения (1) (фактически, в ряде случаев, решения стремятся к нулю). Условия сопряжения решений при $x = 0$ будут указаны позднее.

Требования на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $a(t)$ будут указаны. Вид функции $\theta(x)$ указывается ниже:

$$\xi(x) = \int_0^x \sqrt{q(t)} dt; \arg(\xi) = 0, x \geq 0;$$

$$\arg(\xi) = \pi/2, x \leq 0; w(x) = (\xi/2)^2;$$

$$\theta(x) = -\sqrt{w'(x)}(1/\sqrt{w'(x)})'';$$

$$\begin{aligned}
& q(x), R(x) \in C^2[-\alpha; +\infty); \\
& q'(x) = O(q), x \rightarrow +\infty; q(x) \geq q_0 > 0, x > 1; \\
& |F(x)q^{-1/2}(x)| \in L^1[1; +\infty); \\
& -X'' - \lambda^2 q(x)X - \theta(x)X = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Отметим, что при $q(x) = 1/x$ имеем $\theta(x) \equiv 0$. Позднее, также, будут указаны условия сопряжения решений уравнения (1) при переходе через линию $x = 0$. Пока, предположим:

$$\begin{aligned}
& a(t) \in C^2[0; T], a(0) = a(T) = 0; \\
& \varphi(x), \psi(x) \in C([-\alpha; +\infty) \cap L_{2,q}[-\alpha; +\infty)), \\
& \varphi(-\alpha) = \psi(-\alpha) = 0
\end{aligned}$$

(позднее, требования будут уточнены).

Нам часто придется использовать индефинитную [1, с.13] форму

$$[g; f] = \int_{-\alpha}^{+\infty} q(x) \bar{g}(x) f(x) dx, \quad (5)$$

где интеграл в (5), при необходимости, понимается в смысле главного значения по Коши. Очевидно, что форма (5) определена на всем $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$, т.е., на гильбертовом пространстве с метрикой

$$(g; f) = \int_{-\alpha}^{+\infty} |q(x)| \bar{g}(x) f(x) dx, \quad (6)$$

и индефинитной метрикой (5) [1, с.34]. Если считать, для определенности, что $r(x) \geq c > 0$, то $L_{2,q}[-\alpha; +\infty) \subset L_2[-\alpha; +\infty)$. Ограничиться пространством $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$ мы не можем, потому что базисы, с которыми приходится работать, вообще говоря, не принадлежит этому пространству (векторы этого пространства – по ним разлагаются, но не только они). Решения уравнения (при разделении переменных), например, надо включать в рассмотрение, а они, большей частью, не принадлежат $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$. Форма же (5) на них определена. Вообще, (5) определена на всюду плотном множестве в $L_2[-\alpha; +\infty)$ (то же, для $L_2[-\alpha; +\beta]$, $\beta > 0$).

Разделим переменные в задаче (1) – (3), положив $u(x; t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{T''}{T} = -\frac{X'' + R(x)X}{q(x)X} = \lambda^2. \quad (7)$$

Рассмотрим первой задачу (1) – (2) – (3)₀, где индекс 0, здесь и везде, означает однородное (нулевое) условие. Из (7) возникает спектральная задача

$$\begin{aligned}
& -X'' - \lambda^2 q(x)X - R(x)X = 0, \quad (8) \\
& X(-\alpha) = 0. \quad (9)
\end{aligned}$$

На бесконечности – требуется принадлежность $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$. С уравнением (8) тесно связано «эталонное уравнение» [5, 6] следующего вида

$$-X'' - \lambda^2 q(x)X - \theta(x)X = 0.$$

Решениями этого уравнения (см. (4)) являются функции вида

$$v(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} (\lambda \xi(x)) Z_1(\lambda \xi(x)), \quad (10)$$

где Z_1 в (10) функция Бесселя порядка 1 [9, с.179]. Основным является вопрос продолжения («склейки») решений уравнения (8) через точку $x = 0$ (неинтегрируемая особенность). Безусловно требование существования и единственности продолжения на весь интервал $[-\alpha; +\infty)$ решения, заданного, например, данными Коши в точке $x = -\alpha$ (или любой другой точке $x \neq 0, x \in [-\alpha; +\infty)$). «Естественное» продолжение обходом (в комплексной плоскости) точки $x = 0$ («аналитическое» продолжение), на практике, не рассматривается, ибо приводит к «частично» комплексным решениям. В работе автора [7] требуемые условия получены:

$$1. v(-0; \lambda) = v(+0; \lambda) = v(0; \lambda); \quad (11)$$

$$2. \forall v \exists \lim_{x \rightarrow \pm 0} (v'(x; \lambda) / \ln|x|) = R_2(\lambda); \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& 3. (v'(x; \lambda) - R_2 \ln|x|)|_{+0} = \\
& = (v'(x; \lambda) - R_2 \ln|x|)|_{-0} = v'_{reg}(0; \lambda). \quad (13)
\end{aligned}$$

Причем, $v(0; \lambda), v'_{reg}(0; \lambda)$ – играют роль начальных условий, решение $v(x; \lambda)$, при любом $x \in [-\alpha; \infty)$ аналитично по λ в области аналитичности $v(0; \lambda), v'_{reg}(0; \lambda)$ по λ . Любое решение, заданное на $[-\alpha; 0]$ однозначно продолжается вправо (и наоборот). Вронскиан любой пары решений, «склеенных» по принципу (11) – (13), не меняется на всем интервале $[-\alpha; \infty)$. Из (11) – (13) следует, что, если решение $v(x; \lambda) \in C^1[-\alpha; \beta]$, то оно продолжается через $x = 0$ обычным образом. Заметим, что для решений уравнения (8) (с избранным продолжением) определена индефинитная форма $[g; f]_\beta$ вида

$$[g; f]_\beta = \int_{-\alpha}^{\beta} q \bar{g} f dx, \beta > 0. \quad (14)$$

Форма (5) для них определена, если, к тому же, интеграл в (5) сходится на бесконечности.

Условия (11) – (13) являются дополнительными для задачи (8) – (9). Условия (11) – (13) показывают вид дополнительных условий сопряжения решений при переходе через $x = 0$ для задачи (1) – (3), именно:

$$u(-0; \lambda) = u(+0; \lambda); \exists \lim_{x \rightarrow 0} u_x(x; t) / \ln|x| = R_2(t);$$

$$(u_x(x; t) - R_2 \ln|x|)|_{-0} = (u_x - R_2 \ln|x|)|_{+0}. \quad (15)$$

Рассмотрим решения «эталонного уравнения» (см.(10)) вида: $x \in [0; +\infty)$,

$$v_j(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} (\lambda \xi(x)) H_1^{(j)}(\lambda \xi(x)), j = 1, 2;$$

$$V_j(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} (\lambda \xi) H_1^{(j)}(\lambda \xi(x)), x \in [-\alpha; 0];$$

$$W[v_1; v_2] = c\lambda^2; W[V_1; V_2] = c_1\lambda^2; \quad (16)$$

Отметим, что решения (16) продолжаются через точку $x = -\alpha$ аналогично (11)-(13) (как решения «эталонного уравнения»). Используя асимптотические методы, получаются соответствующие формулы для решений уравнения (8). Отметим

$$v_j = O(q^{-1/4}(x)|\lambda|^{1/2} \exp((-1)^{j-1} \operatorname{Im} \lambda \cdot \xi(x)),$$

$$\operatorname{Im} \lambda \geq 0, x \in [1; +\infty)$$

(см. [9, с.190, с.222]). Нам понадобятся решения уравнения (8) вида:

$$U(x; \lambda) \cong v_1(x; \lambda), x \in [0; +\infty),$$

$$\operatorname{Im} \lambda \geq 0, U \in L_{2,q}[1; +\infty); \quad (17)$$

$$y(x; \lambda) : y(-\alpha) = 0, y'(-\alpha) = 1;$$

$$y(x; -\lambda) = y(x; \lambda) = 0, \operatorname{Im} \lambda = 0;$$

$$y(x; \lambda) = O(q^{-1/4}(x)|\lambda|^{-1} \exp(\operatorname{Im} \lambda \cdot \xi(x)),$$

$$\operatorname{Im} \lambda \geq 0, x \in [1; +\infty). \quad (18)$$

Причем, асимптотика (17) может быть использована при $\forall \lambda, \operatorname{Im} \lambda \geq 0, x \rightarrow \infty$ и при $x \in [1; +\infty), \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \lambda \rightarrow \infty$. Оценка (18) может быть уточнена до оценки вида (17), если $\lambda = \lambda_m$ - собственное значение. Оценки (17-18) получаются с помощью асимптотических формул, соотношений (11-13) и свойств бесселевых функций [9, с.182, 190, 222].

Рассмотрим ядро резольвенты, связанной с задачей (8) – (9), (11) – (13)

$$G(x; t; \lambda) = y(x)U(t)/W[y; U], x \leq t. \quad (19)$$

Оператор с ядром (19) изучаем аналогично рассмотрению, приведенному автором в работах [5,6,7] в подобной ситуации.

Исходя из свойств функций $y(x), U(x)$ из (17)-(18), асимптотических формул и соответствующих свойств бесселевых функций [9, с.182, с.192] и из свойств характеристического определителя $\Delta(\lambda) = W[y, U] = -U(-\alpha; \lambda)$, получаем:

Теорема 1. $\lambda^2 \in [0; +\infty)$ ($\lambda \in (-\infty; +\infty)$) - область непрерывного спектра задачи (8) – (9), (11) – (13)), так как ядро (19) имеет скачок при переходе через луч ($\lambda^2 \in [0; +\infty)$). Кроме того имеется бесконечный дискретный отрицательный спектр $\lambda^2 < 0$ (при $R(x) \leq 0$ комплексный спектр отсутствует – это предполагается в дальнейшем), совпадающий с λ_m^2 , где λ_m - нули $\Delta(\lambda)$.

Асимптотику λ_m (из которой и следует бесконечность дискретного спектра) найдем далее. Асимптотика характеристического определителя $\Delta(\lambda) = -U(-\alpha; \lambda)$ выписывается явно через

функции Бесселя. Используя их асимптотические свойства [9, с.222], получаем главный член асимптотики $\Delta(\lambda)$ при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0, \lambda \rightarrow \infty$:

$$\Delta(\lambda) \cong c\lambda^\omega [d_1 e^{-\lambda|\xi(-\alpha)|} + d_2 e^{\lambda|\xi(-\alpha)|}]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что $\Delta(\lambda), \operatorname{Im} \lambda \geq 0$ - функция класса \mathbf{K} [4, с.318]. Из свойств функций класса \mathbf{K} [4, с.322] получаем асимптотику дискретного спектра λ_m и оценку $\Delta(\lambda)$ «снизу»:

$$\lambda_m = \frac{i\pi}{|\xi(-\alpha)|} [m - 1/4 + O(1/m)], m \rightarrow \infty; \quad (21)$$

$$|\Delta(\lambda)| = |U(-\alpha; \lambda)| \geq$$

$$\geq \delta |\lambda|^\omega [e^{-|\xi(-\alpha)| \operatorname{Re} \lambda} + e^{|\xi(-\alpha)| \operatorname{Re} \lambda}],$$

$$\operatorname{Im} \lambda \geq 0, |\lambda| \geq \lambda_0 \gg 1. \quad (22)$$

Оценка (22) справедлива вне кружков сколь угодно малого фиксированного радиуса $\eta > 0$ с

центрами в точках $\tilde{\lambda}_m = \frac{i\pi}{|\xi(-\alpha)|} [m - 1/4]$.

Используя выражение ядра (19), асимптотики (17)-(18), асимптотические свойства бесселевых функций [9, с.222], неравенство (22) и методику оценки резольвенты в условиях наличия погранслоя, использованную автором в работах [5, 6, 7], получаем

$$|G| \leq \frac{c}{|\lambda|} q^{-1/4}(x) q^{-1/4}(t) \exp[-\operatorname{Im} \lambda |\xi(x) - \xi(t)|],$$

$$x \geq 1 \vee t \geq 1; |G(x; t; \lambda)| \leq \frac{c}{|\lambda|}, x \leq 1 \wedge t \leq 1. \quad (23)$$

Оценка (23) имеет место в области выполнения неравенства (22), указанной выше (вне кружков с центрами в точках $\tilde{\lambda}_m$).

В дальнейшем всегда считаем, что $R(x) \leq 0$, тогда дискретный спектр действителен, можно выбрать «нормированные», относительно формы (5), собственные функции $X_m(x)$ и справедливо

$$[X_{m_1}(x); X_{m_2}(x)] = 0, m_1 \neq m_2;$$

$$[X_m; X_m] = -1; |X_m(x)| \leq c, \forall m,$$

$$x \in [-\alpha; +\infty); |X_m(x)| \leq c e^{-\varepsilon \xi(x)}, x \geq 1, \varepsilon > 0;$$

$$[X(x; \lambda); X(x; \mu)] = \delta(\lambda - \mu); |X(x; \lambda)| \leq c, x \in [-\alpha; +\infty), \lambda \in [0; +\infty). \quad (24)$$

В (24) $X(x; \lambda)$ - «собственные» функции, отвечающие непрерывному спектру $\lambda \in [0; +\infty)$.

2. Разложение по собственным функциям. Решение краевой задачи.

Пусть $q^{-1} l_\lambda u = f$, тогда $l_\lambda^{-1} q f = u$ (т.е. u «истокообразно» представима через ядро (19)). Рассмотрим интеграл по расширяющимся контурам

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_S} \frac{1}{\lambda} l_\lambda^{-1} q f d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_S} \frac{u}{\lambda} d\lambda, \quad (25)$$

где $\Gamma_S = C_S \cup [\rho; S] \cup \gamma_\rho \cup [-S; -\rho]$;

$$C_S : |\lambda| = S, \operatorname{Im} \lambda \geq 0; \gamma_\rho : |\lambda| = \rho, \operatorname{Im} \lambda \geq 0.$$

Контур Γ_S обходится против часовой стрелки, подразумевается, что $\rho \rightarrow 0, S \rightarrow \infty$. Особенности резольвенты (ядра (19)) - полюсы λ_m и скачок на разрезе $\lambda^2 \in [0; +\infty)$ ($\operatorname{Im} \lambda = 0$). Мы не будем здесь полностью разбирать метод контурного интегрирования, отсылая к работе автора [7]. Используются (23) – (24).

Укажем результат:

$$\forall u : u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m X_m(x) + \int_0^{+\infty} A_u(\lambda) X(x; \lambda) d\lambda, \quad (26)$$

$$u_m = [X_m; u(x)], A_u(\lambda) = [X(x; \lambda); u(x)]. \quad (27)$$

Сходимость в (26) равномерна на каждом конечном интервале. Здесь мы не обсуждаем вопросы, связанные с распространением (26)-(27) на все пространство $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$ и описанием всего множества разлагаемых функций u . Поскольку строим гладкие (классические) решения исходной краевой задачи (обобщенные решения – не рассматриваем). Поэтому u считаем достаточно гладкими, обращающимися в нуль при $x = 0$ (возможно, с некоторыми производными) и достаточно быстро стремящимися к нулю на бесконечности. Для таких u метод контурного интегрирования при выводе формул (26)-(27) заведомо проходит [7]. Можно даже, при необходимости, вывести аналог равенства Парсевеля. В этой статье это не рассматривается.

Введем $D' = D^q \cup D^s$, где D^q - множество $u \in L_{2,q}$ в (26), для которых ($\tau = 0, 1, 2$):

$$\sum_m (|u_m| m^\tau) < \infty \wedge \int_0^{+\infty} |A_u(\lambda)| \lambda^\tau d\lambda < \infty. \quad (28)$$

Уже говорилось о предполагаемых свойствах функций u . Здесь, для компактности изложения, не рассматриваются достаточные условия на u , обеспечивающие (28). Хотя они, формулируются достаточно просто, но их обоснование технически громоздко.

Множество D^s - это множество всевозможных сумм вида

$$\sum_m C_m X_m(x) + \int_0^{+\infty} C(\lambda) X(x; \lambda) d\lambda,$$

где

$$\sum_m (|C_m| m^\tau) < \infty \wedge \int_0^{+\infty} |C(\lambda)| \lambda^\tau d\lambda < \infty. \quad (29)$$

Ясно из (28) – (29), что классы D^q и D^s пересекаются. Мы специально выделяем D^q , ибо для него можно указывать разные достаточные условия принадлежности функций этому классу. Класс D^s описывается вполне конструктивно.

Очевидно, что для класса D' имеют смысл и выполняются (11-13), функции этого класса принадлежат

$$C[-\alpha; +\infty) \cap (C^2[-\alpha; 0] \cap C^2(0; +\infty)).$$

Класс D' представим в виде

$$D' = D'_- + D'_+; D_- : \sum_m C_m X_m;$$

$$D_+ : \int_0^{+\infty} C(\lambda) X(x; \lambda) d\lambda. \quad (30)$$

В (30) сумма $D'_- + D'_+$ ортогональна относительно формы (5), $\forall g \in D' : g = g_- + g_+$, $g_- \in D'_-, g_+ \in D'_+, g_- \perp g_+$ (относительно (5)), g_-, g_+ определяются однозначно, $[g_-; g_-] < 0$, $[g_+; g_+] \geq 0$. Отметим, что, если $u \in L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$, «проекции» g_-, g_+ не обязательно принадлежат этому пространству (из-за их поведения около $x = 0$).

Замечание. Вообще говоря, на D' имеет место аналог равенства Парсевеля (оно для нас не является необходимым, ибо строим классические решения - со стандартным выполнением граничных условий), поэтому и не приводим его здесь.

Теперь, построим, пока, формальное решение задач (1) – (3), (15). Предположим дополнительно, что $\varphi(x), \psi(x)$ в (2) принадлежат D' , т.е.

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m X_m(x) + \int_0^{+\infty} A_\varphi(\lambda) X(x; \lambda) d\lambda, \quad (31)$$

$\psi(x)$ - разлагается аналогично. Из (7) следует, что решение задачи (1) – (3) имеет вид

$$u(x; t) = u_-(x; t) + u_+(x; t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m(x) + \int_0^{+\infty} T_\lambda(t) X(x; \lambda) d\lambda, \quad (32)$$

$$T_m(t) = \varphi_m \cos|\lambda_m|t + \frac{\psi_m - \varphi_m \cos(|\lambda_m|T)}{\sin|\lambda_m|T} \sin|\lambda_m|t; \quad (33)$$

$$T_\lambda(t) = (1 - e^{-2\lambda T})^{-1} [(A_\varphi - A_\psi e^{-\lambda T}) e^{-\lambda t}] + (1 - e^{-2\lambda T})^{-1} [(A_\psi - A_\varphi e^{-\lambda T}) e^{-\lambda(T-t)}]. \quad (34)$$

В силу (28) – (29), (34)

$$u_+(x; t) \in C([-\alpha; +\infty) \times [0; T]) \cap \cap (C^2([-\alpha; 0] \times (0; T)) \cap C^2((0; +\infty) \times (0; T))),$$

$|u_+(x;t)| \leq C$ и $u_+(x;t)$ удовлетворяет условиям (15). Что касается $u_-(x;t)$, т.е. (33), то эта часть решения имеет такую же гладкость, при выполнении условия

$$|\sin|\lambda_m|T| \geq \delta_1 > 0. \quad (35)$$

Вообще, условие существования (33) есть

$$|\lambda_m|T \neq \pi, \quad (36)$$

что соотносится с соответствующими условиями в [2], [3]. Дополнительно, предположим, что условие (36) может нарушаться только для конечного числа $m \in M$ ($n \in N$) и, кроме того, при

$$m \in M : |\lambda_m|T - \pi \geq \delta_2 > 0$$

(тогда выполняется и (35)). Достаточным условием выполнения этого дополнительного требования, например, является следующее: пусть $T/|\xi(-\alpha)| = k/s$ - несократимая рациональная дробь, тогда вышеуказанное дополнительное условие выполняется при k - нечетном - это следует из асимптотики (21). Иные достаточные условия здесь не рассматриваются, данное - достигается небольшой вариацией входных параметров решаемой задачи. В силу непрерывности $u(x;t)$ вплоть до границы граничное условие (2) выполняется стандартным образом.

Если (36) нарушается (для конечного числа $m \in M$), тогда должно быть:

$$\varphi_m, \psi_m = 0, m \in M, \text{ т.е.}$$

$$\varphi(x), \psi(x) \perp X_m(x), m \in M. \quad (37)$$

Ортогональность в (37) - относительно формы [5]. При выполнении (37) анализ решения аналогичен сделанному выше. Задача (1) - (2) - (3)₀, (15) решена, для вышеуказанного класса граничных функций $\varphi(x), \psi(x)$. Решение, в данном классе граничных условий, единственно (с учетом (37)). Это следует из базисности набора собственных функций (24). Подробнее, здесь, на этом вопросе не останавливаемся.

Решим задачу (1) - (2)₀ - (3), (15). Из (7) получаем

$$T_n(t) = \sqrt{2/T} \sin \frac{\pi n t}{T}, n = \overline{1, \infty}. \quad (38)$$

Для $X_n(x)$ из (7) получаем теперь

$$-X_n'' - \lambda_n^2 q(x)X - R(x)X_n = 0, \quad (39)$$

$$\lambda_n^2 = -\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2, X_n(-\alpha) = 1, |X_n(x)| \leq C.$$

Если выполняется (36), то в качестве $X_n(x)$ можно взять (см.(17))

$$X_n(x) = U\left(x; i \frac{\pi n}{T}\right) / U\left(-\alpha; i \frac{\pi n}{T}\right). \quad (40)$$

В силу дополнительных к (36) требований $\lambda_n = i\pi n/T$ попадает в область выполнения неравенства (22), поэтому $|X_n(x)| < C$ - равномерно ограничены, более того при

$$x \geq 1 : |X_n(x)| \leq Cq^{-1/4}(x)e^{-\varepsilon\xi(x)},$$

$\varepsilon > 0$ - малое фиксированное число.

Решение задачи (1) - (2)₀ - (3), (15) имеет вид

$$u_1(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(t) X_n(x), \quad (41)$$

где a_n - коэффициенты разложения $a(t)$ по базису Фурье $T_n(t), n = \overline{1, \infty}$. Если $a(t) \in C^3[0;T]$, $a''(0) = a''(T) = 0$ (в дополнение к ранее наложенным на $a(t)$ условиям), то $\sum_n n^\tau |a_n| < \infty, \tau = 0, 1, 2$. Тогда для решения (41)

выполняется (15) и

$$u_1(x;t) \in C[[0;T] \times [-\alpha; \infty)] \cap \cap (C^2([-\alpha;0] \times (0;T)) \cap C^2((0;+\infty) \times (0;T))),$$

причем, имеем $|u(t;x)| \leq Cq^{-1/4}(x)e^{-\varepsilon\xi(x)}, x \geq 1$.

Если (36) нарушается для конечного числа $n \in N$, то должно быть: $a_n = 0, n \in N$, т.е. $a(t) \perp T_n(t), n \in N$ (ортогональность в метрике $L_2[0;T]$). Анализ решения, такой как и прежде. Задача (1) - (2)₀ - (3), (15) - решена. Здесь не рассматривается вопрос единственности решения, определяемый базисностью набора функций и единственностью решения краевых задач, как достаточно очевидный.

3. Ограниченный случай. Прямоугольник.

Рассмотрим уравнение (1) на прямоугольнике $B_\beta = [-\alpha; \beta] \times [0;T], \beta > 0$. Условия на коэффициенты остаются в силе, но только, теперь, они отнесены к отрезку $[-\alpha; \beta]$. Граничное условие, теперь, имеет вид (аналог (2)):

$$u(x;0) = \varphi(x), u(x;T) = \psi(x), x \in [-\alpha; \beta];$$

$$\varphi(x), \psi(x) \in C[-\alpha; \beta], \quad (42)$$

$$\varphi(-\alpha) = \varphi(\beta) = \psi(-\alpha) = \psi(\beta) = 0.$$

В дальнейшем требования на φ, ψ будут уточнены. Условие (3), теперь:

$$u(-\alpha;t) = a(t), u(\beta;t) = b(t), \quad (43)$$

где $a(t), b(t) \in C^2[-\alpha; \beta]; a, b = 0$ при $t = 0, T$. Здесь также используются функции, заданные в (4), пространство $L_{2,q}[-\alpha; \beta]$ с общей

метрикой $(g; f)_\beta = \int_{-\alpha}^{\beta} |q| \bar{g} f dx$ и индефинитной метрикой $[g; f]_\beta$ (см. (14)).

Условия (11) – (13) продолжения решений уравнения (8) при переходе через точку $x = 0$, носят локальный характер и, здесь, мы их по-прежнему используем. Следовательно, для задачи (1), (42), (43) необходимо использовать, еще, дополнительные условия (15) сопряжения решений при переходе через линию $x = 0$.

Разделение переменных $u(x;t) = X(x)T(t)$, как и ранее, приводит к соотношению (7).

Рассмотрим задачу (1), (42), (43)₀, (15). Из (7) получается спектральная задача, связанная с уравнением (8) и граничным условием

$$X(-\alpha) = 0, \quad X(\beta) = 0 \quad (44)$$

Спектральная задача (8), (44), (11) – (13) изучена автором в работе [7]. Здесь будут приведены только необходимые сведения. Спектральная задача (8), (44), (11) – (13) (оператор $l_\lambda^\beta u = -u'' - \lambda^2 qu - R(x)u$, $u(-\alpha) = u(\beta) = 0$) имеет чисто дискретный, в основном, действительный (при $R(x) \leq 0$ - только действительный) спектр, состоящий из двух бесконечных ветвей $\lambda_{-m}^2 < 0, \lambda_{+m}^2 > 0$ асимптотиками: (21) для λ_{-m} ; для λ_{+m} , соответственно,

$$\lambda_{+m} = \frac{\pi}{\xi(\beta)} [m - 1/4 + O(1/m)], m \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Для компактности изложения, будем предполагать, что $R(x) \leq 0$ и, следовательно, спектр только действительный.

Характеристический определитель задачи (8), (44), (11)-(13) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = -U(-\alpha; \lambda) = y(\beta; \lambda), \quad (46)$$

где $y(x; \lambda)$ аналогично предыдущему (см. (17)), $U(x; \lambda) : U(\beta) = 0, U'(\beta) = 1$. Для $\Delta(\lambda)$ можно, как и ранее, указать главный член асимптотики.

Отметим, что $\Delta(\lambda)$ - является функцией класса К [4, с. 318]. Для $\Delta(\lambda)$ имеет место оценка «снизу»

$$\begin{aligned} |\Delta(\lambda)| &\geq \delta(\eta) [e^{\Omega_2} + e^{-\Omega_2} + e^{\Omega_3} + e^{-\Omega_3}] |\lambda|^\chi; \\ \Omega_2 &= |\xi(-\alpha)| \operatorname{Re} \lambda + \xi(\beta) \operatorname{Im} \lambda, \\ \Omega_3 &= |\xi(-\alpha)| \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Im} \lambda \cdot \xi(\beta); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\delta(\eta) > 0, \quad -\varepsilon \leq \arg \lambda \leq \pi + \varepsilon, \quad |\lambda| \geq \lambda_0 \gg 1,$$

вне кружков сколь угодно малого фиксированного радиуса $\eta > 0$, с центрами в точках $\tilde{\lambda}_{+m}$ и $\tilde{\lambda}_{-m}$.

Для любой функции g из области определения оператора $l_\lambda^\beta u$ имеет место разложение в равномерно сходящийся ряд

$$\begin{aligned} g &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{-m} X_{-m}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} g_{+m} X_{+m}(x), \\ g_{\pm m} &= [X_{\pm m}(x); g(x)]_\beta. \end{aligned} \quad (48)$$

В (48) $X_{\pm m}(x)$ - собственные функции, «нормированные» с использованием формы (14). Эти функции «ортогональны» относительно индексной формы (14):

$$\begin{aligned} [X_k; X_s]_\beta &= 0, k \neq s; [X_{-m}; X_{-m}]_\beta = -1; \\ [X_{+m}; X_{+m}]_\beta &= 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Кроме того $X_{\pm m}(x)$ равномерно ограничены по $x \in [\alpha; \beta]$ и m , т.е. $|X_{\pm m}(x)| \leq C$.

Введем пространство функций

$$D_\beta^1 = D_\beta^q \cup D_\beta^s,$$

где $D_\beta^q \subset L_{2,q}[-\alpha; +\infty) : \sum_m m^\tau |g_{\pm m}| < \infty$. Функции из D_β^s - суммы рядов $\sum_m C_{\pm m} X_{\pm m}(x)$, таких, что $\sum_m m^\tau |C_{\pm m}| < \infty, \tau = 0, 1, 2$.

Очевидно, что функции из D_β^1 удовлетворяют условиям (11) – (13). Формальное решение задачи (1), (42), (43)₀, (15) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x;t) &= u_-(x;t) + u_+(x;t) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} T_{\pm m}(t) X_{\pm m}(x) \end{aligned} \quad ; \quad (50)$$

$$\begin{aligned} T_{+m}(t) &= \frac{\varphi_{+m} - \psi_{+m} e^{-\lambda_{+m} T}}{1 - e^{-2\lambda_{+m} T}} e^{-\lambda_{+m} t} + \\ &+ \frac{\psi_{+m} - \varphi_{+m} e^{-\lambda_{+m} T}}{1 - e^{-2\lambda_{+m} T}} e^{-\lambda_{+m} (T-t)}; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} T_{-m}(t) &= \frac{\psi_{-m} - \varphi_{-m} \cos(|\lambda_{-m}| T)}{\sin(|\lambda_{-m}| T)} \sin(|\lambda_{-m}| t) + \\ &+ \varphi_{-m} \cos(|\lambda_{-m}| t). \end{aligned} \quad (52)$$

Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in D_\beta^1$, тогда из (50-52) следует

$$\begin{aligned} u_+(x;t) &\in C([-\alpha; \beta] \times [0; T]) \cap \\ &(C^2([-\alpha; 0] \times [0; T]) \cap C^2((0; \beta] \times [0; T])) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям (15). Если потребовать, чтобы

$$|\sin(|\lambda_{-m}| T)| \geq \delta_1 > 0, \quad (53)$$

это же утверждение справедливо и для $u_-(x;t)$. Тем самым задача (1), (42), (43)₀, (15) – решена.

Остановимся на условии (53). Условие существования формального решения (50), (52) $u_-(x;t)$ имеет вид

$$|\lambda_{-m}| T \neq \pi. \quad (54)$$

Условие (54) соотносится с условием в [2] и условием в [3]. Предположим, дополнительно, что (54) может нарушаться только для конечного числа индексов $-m \in M$ (конечного числа $n \in N$) и что для $-m \notin M$ ($n \notin N$), где M может быть и

пусто, выполняется $|\lambda_m|T - \pi n| \geq \delta_2 > 0$, т.е. выполняется (53). Мы здесь не анализируем все возможные достаточные условия для выполнения дополнительного к (54) предположения. Укажем, лишь одно:

$$T/|\xi(-\alpha)| = s/k -$$

рациональная дробь и s – нечетное число (это следует из асимптотики (21)).

Если (54) нарушается, по условию, для конечного числа $-m \in M$, то должно быть: $\varphi_{-m}, \psi_{-m} = 0, -m \in M$, т.е. $\varphi(x), \psi(x)$ ортогональны относительно формы (14) к конечномерному подпространству, натянутому на векторы $X_{-m}(x), -m \in M$. Тогда, опять-таки получается решение вышеуказанной гладкости. Полученное решение, в рассматриваемом классе начальных условий, а, значит, и решений, (с учетом (54)) – единственно.

Рассмотрим, теперь, задачу (1), (52)₀, (53), (15). Функции $\{T_n(t) = \sqrt{2/T} \sin \pi n t / T, n = \overline{1, \infty}\}$ являются решениями уравнения (8) для $T(t) : \langle T_n(0) = T_n(T) = 0 \rangle$. Соответствующие уравнения (8) для $X_n(x)$:

$$-X''_n - \left(\frac{\pi n}{T}\right)^2 q(x)X_n - R(x)X_n = 0. \quad (55)$$

Если выполняется условие (54), то определены решения уравнения (55):

$$y_n^{left}(x) = U\left(x; i\frac{\pi n}{T}\right) / U\left(-\alpha; i\frac{\pi n}{T}\right),$$

$$y_n^{right}(x) = y\left(x; i\frac{\pi n}{T}\right) / y\left(\beta; i\frac{\pi n}{T}\right).$$

Отметим, что, в силу определения $y, U : y_n^{left}(-\alpha) = 1, y_n^{left}(\beta) = 0, y_n^{right}(-\alpha) = 0, y_n^{right}(\beta) = 1$. Если выполняются дополнительные к (54) условия, то $\lambda_n = i\frac{\pi n}{T}$ при $n \geq N_0 \gg 1$ попадает в область действия неравенства (47) (для $\Delta(\lambda), y(\beta; \lambda), U(-\alpha; \lambda)$) при соответствующем выборе $\eta > 0$. Поэтому y_n^{left}, y_n^{right} – равномерно ограничены, т.е.,

$$\forall x \in [-\alpha; \beta], n : |y_n^{left}(x), y_n^{right}(x)| \leq C.$$

Далее предположим дополнительно, что

$$\begin{aligned} a(t), b(t) &\in C^3[-\alpha; \beta] \wedge a''(0) = \\ &= a''(T) = b''(0) = b''(T) = 0 \end{aligned}$$

тогда $\sum_n n^\tau (|a_n| + |b_n|) < \infty, \tau = 0, 1, 2$ – это следует из теории рядов Фурье.

Решение задачи (1), (52)₀, (53), (15) имеет вид:

$$u_1(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) [a_n y_n^{left}(x) + b_n y_n^{right}(x)]. \quad (56)$$

При вышеуказанных условиях

$$u_1(x; t) \in C[-\alpha; \beta] \times [0; T] \cap$$

$$(C^2[-\alpha; 0] \times [0; T]) \cap C^2[(0; \beta] \times [0; T]).$$

Если условие (54) нарушается для конечного числа $-m \in M$, значит для конечного числа $n \in N$, то, очевидно, требование $a_n, b_n = 0, n \in N$, т.е. $a(t), b(t) \perp \{T_n(t), n \in N\}$, ортогональность в метрике $L_2[0; T]$. При этом условии решение (56) имеет вышеуказанную гладкость.

Единственность найденных решений, следует из базисности $X_{\pm m}(x)$ (либо $T_n(t)$) и единственности решения соответствующих краевых задач. Подробнее это здесь не рассматривается.

4. Уравнение типа Чаплыгина

Изложим метод решения задачи Дирихле для уравнений вида

$$q(x)u_{tt} + u_{xx} + R(x)u = 0,$$

$$q(x) = |x|^b \text{sign}(x)r(x), r(x) > 0, b > -1 \quad (57)$$

на прямоугольнике

$$t \in [0; T], x \in [-\alpha; \beta], T, \alpha, \beta > 0$$

и на бесконечной полосе $t \in [0; T], x \in [-\alpha; +\infty)$.

Во втором случае, на поведение $q(x), R(x)$ на бесконечности налагаются дополнительные ограничения вида (4). Отметим только, что

$$\arg(\xi) = (b+2)\pi/2, x \leq 0;$$

$$w(x) = ((b+2)\xi/2)^{2/(b+2)}.$$

Вид $\theta(x)$ и эталонного уравнения (4) сохраняются. Решения уравнения (4) теперь имеют вид (см.(10))

$$v(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} (\lambda \xi(x))^{1/(b+2)} Z_{1/(b+2)}(\lambda \xi(x)).$$

Отметим, что случай $0 \geq b > -1$, обычно, относят к уравнению типа Лаврентьева-Бицадзе. Но, учитывая используемый нами метод, этот случай более органичен здесь. Это случай интегрируемой особенности, когда решения продолжаются через точку (линию) $x = 0$ естественным образом, форма (5) (или (14)) определена на всем соответствующем гильбертовом пространстве, интеграл (в форме) сходится абсолютно и порождает во всем этом пространстве индефинитную метрику [1, с.34] – со всеми вытекающими последствиями из общей теории таких пространств. Рассмотрение случая $0 \geq b > -1$ несущественно отличается от случая $b > 0$, только лишь иногда необходимо делать оговорки, связанные с возможным разрывом, при $x = 0$, вторых производных решений соответствующих уравнений..

Рассмотрения будем проводить, в основном, в пространстве $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$ с метрикой

$$(f; g) = \int_{-\alpha}^{+\infty} |q(x)| \overline{f(x)} g(x) dx, \quad (58)$$

и индефинитной метрикой

$$[f; g] = \int_{-\alpha}^{+\infty} q(x) \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (59)$$

Или в $L_{2,q}[-\alpha; \beta]$ с соответствующей метрикой $(f; g)_\beta$ и индефинитной метрикой (14).

Изложим результаты, имея в виду, определенную аналогию с рассмотренными трех предыдущих параграфов. За подробностями отсылаем к работам автора [5,6].

Рассмотрим уравнение (57) на полуполосе $B = [0; T] \times [-\alpha; +\infty)$ и граничные условия (2)-(3) (предполагается выполнение требований, аналогичных приведенным в (1),(4)). Разделение переменных приводит соотношениям (7)-(8) и к спектральной задаче (8)-(9) (здесь, тоже, предполагаем, что $R(x) \leq 0$). Для спектральной задачи вида (8)-(9) справедливы утверждения Теоремы 1 из первого параграфа. Асимптотика отрицательного дискретного спектра (тоже обозначаем λ_m^2) имеет вид (см.(21)):

$$\lambda_m = \frac{i\pi}{|\xi(-\alpha)|} [m + c(b) + O(1/m)], \quad (60)$$

$m \rightarrow \infty$.

Для характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = -U(-\alpha; \lambda)$$

задачи (8-9), определяемого через аналог решения $U(x; \lambda)$ - см. (17), имеет место оценка «снизу» аналогичная (22). Для собственных функций задачи (сохраняем прежние обозначения) справедливы соотношения (24).

Но представление вида (26)-(27) имеет место для любой функции $u(x) \in L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$. При этом, в общем случае, сходимость в (26) в метрике (58). При дополнительных условиях на $u(x)$, сходимость равномерная, вместе с производными до определенного порядка. Так, если выполняется требование (28), то сумма (26) дважды непрерывно дифференцируема на полуоси. Кроме того, имеет место равенство Парсеваля (в метрике (59)):

$$\begin{aligned} \forall f \in L_{2,q}; [f; f] &= [f_-; f_-] + [f_+; f_+] \\ &= -\sum_{m=1}^{\infty} |f_m|^2 + \int_0^{+\infty} |A_f|^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (61)$$

Из (26)-(27) и вышесказанного следует, что, соответственно спектральной задаче (8)-(9), пространство $L_{2,q}[-\alpha; +\infty)$ разлагается в ортогональную в индефинитной метрике (59) сумму отрицательного и положительного подпространств:

$$\begin{aligned} L_{2,q}[-\alpha; +\infty) &= \Pi_- + \Pi_+; \\ \forall f \in L_{2,q}; f(x) &= f_-(x) + f_+(x), f_- \in \Pi_-, \\ f_- &= \sum_m f_m X_m, f_+ \in \Pi_+ \\ f_+ &= \int_{-\alpha}^{+\infty} A_f(\lambda) X(x; \lambda) d\lambda, f_- \perp f_+, \\ [f; f] &= [f_-; f_-] + [f_+; f_+], [f_-; f_+] < 0, \\ [f_+; f_+] &> 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Формальное решение $u(x; t)$ задачи (57),(2),(3)₀, учитывая сохраненные обозначения, тоже имеет вид (32)-(34). При этом, если выполняется условие вида (28) и условие вида (35), то $u(x; t) \in C^2(B)$ при $b > 0$ и является классическим решением. Если $0 \geq b > -1$, то надо учитывать возможный разрыв производных второго порядка при $x = 0$.

Выполнимость условия (35) мы здесь не обсуждаем ибо есть большая аналогия с рассмотренным ранее. Можно привести также достаточные условия, опираясь на асимптотическую формулу (60). Случай нарушения условия вида (35) тоже аналогичен ранее рассмотренному.

Заметим, что можно рассмотреть более общие условия на $\varphi(x), \psi(x)$, отличные от (28). Например, данные в начале первого параграфа:

$$\begin{aligned} \varphi(x), \psi(x) &\in C([-\alpha; +\infty) \cap L_{2,q}[-\alpha; +\infty)); \\ \varphi(-\alpha) &= \psi(-\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

При выполнении (63) и (35), решение вида (32),(34) $u_+(x; t)$ является классическим, но граничные условия (2), вообще говоря, выполняются в метрике (58). Доказывается это с использованием (61)-(62). Что касается решения вида (32),(33) $u_-(x; t)$, то оно, вообще говоря, должно пониматься как обобщенное, граничные условия тоже выполняются в среднем. Детальнее здесь этот вопрос не обсуждается, ибо выходит за рамки этой статьи.

Обсуждение решения задачи (57),(2),(3)₀ считаем завершенным. Вопрос единственности обсуждался во втором параграфе, здесь он аналогичен.

Перейдем к рассмотрению задачи (57),(2)₀,(3). В этом параграфе мы уже рассматривали решение уравнения (8)

$$\begin{aligned} U(x; \lambda) &\equiv v_1(x; \lambda), x \in [0; +\infty), \\ \text{Im } \lambda &\geq 0, U \in L_{2,q}[1; +\infty); \end{aligned} \quad (64)$$

Асимптотика в (64) равномерная (двойная),

$$v_1(x; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} (\lambda \xi(x))^{1/(b+2)} H^{(1)}_{1/(b+2)}(\lambda \xi(x)),$$

$$v_1 = O(q^{-1/4}(x) |\lambda|^{-d} \exp(-\text{Im } \lambda \cdot \xi(x))),$$

$$\text{Im } \lambda \geq 0, d = b/2(b+2), x \in [1; +\infty), \quad (65)$$

(см.[9,с.190,с.222]), где $H_{1/(b+2)}^{(1)}$ - функция Ганкеля [9,с.182]. Указывалось также, что $-U(-\alpha; \lambda) = \Delta(\lambda)$

играет роль характеристического определителя задачи вида (8)-(9) и что для него имеет место асимптотика вида (20) и оценка снизу вида (22) (вне кружков сколь угодно малого фиксированного радиуса с центрами в точках

$$\lambda'_m = \frac{i\pi}{|\xi(-\alpha)|} [m + c(b)].$$

Все вышеперечисленное и (64),(65) позволяют применить к решению задачи (57),(2)₀,(3) схему, использованную во втором параграфе для задачи (1),(2)₀,(3) и получить формулы аналогичные (38),(39),(40),(41). Полученное решение

$$u_1(x; t) \in C([0; T] \times [-\alpha; \infty]) \cap C^2([-\alpha; +\infty) \times (0; T)), b > 0,$$

причем, имеем $|u(t; x)| \leq Cq^{-1/4}(x)e^{-\varepsilon\xi(x)}$, $x \geq 1$.

При $0 \geq b > -1$, нужно учитывать разрыв вторых производных.

Коротко рассмотрим решение задачи Дирихле для уравнения (57) на прямоугольнике $B_\beta : t \in [0; T], x \in [-\alpha; \beta], T, \alpha, \beta > 0$. Граничные условия имеют вид аналогичный (42),(43). Соответствующая спектральная задача состоит из уравнения вида (8) и граничных условий (44). Рассмотрения в пространстве $L_{2,q}[-\alpha; \beta]$:

$$(f; g)_\beta = \int_{-\alpha}^{\beta} |q(x)| \overline{f(x)} g(x) dx; \quad (66)$$

$$[f; g]_\beta = \int_{-\alpha}^{\beta} q(x) \overline{f(x)} g(x) dx; \quad (67)$$

Соответственно основная метрика и индефинитная метрика в этом пространстве. Характеристический определитель задачи (8),(44)

$$\Delta(\lambda) = -U(-\alpha; \lambda) = y(\beta; \lambda), \quad (68)$$

где U, y решения уравнения (8), с условиями:

$$U(\beta) = 0, U'(\beta) = 1; y(-\alpha) = 0, y'(-\alpha) = 1.$$

Спектр (8),(44) дискретен, при $R(x) \leq 0$, действителен, состоит из двух ветвей

$$\lambda_{-m}^2 < 0, \lambda_{+m}^2 > 0.$$

Для первой (отрицательной) асимптотика вида (60).

Для второй (положительной) асимптотика:

$$\lambda_{+m} = \frac{\pi}{\xi(\beta)} [m + d(b) + O(1/m)], \quad (69)$$

$m \rightarrow \infty$.

Собственные функции можно выбрать «ортонормированными» в индефинитной метрике (67):

$$[X_k; X_s]_\beta = 0, k \neq s; [X_{-m}; X_{-m}]_\beta = -1; [X_{+m}; X_{+m}]_\beta = 1, |X_m| < c. \quad (70)$$

Имеет место разложение:

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} g_{-m} X_{-m}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} g_{+m} X_{+m}(x),$$

$$g_{\pm m} = [X_{\pm m}(x); g(x)]_\beta, \forall g \in L_{2,q}[-\alpha; \beta];$$

$$[g; g]_\beta = -\sum_{m=1}^{\infty} |g_{-m}|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |g_{+m}|^2. \quad (71)$$

В общем случае, ряды в (71) сходятся в метрике (66). Из (66)-(71) следует, что пространство $L_{2,q}[-\alpha; \beta]$ представимо в виде ортогональной, в метрике (67), суммы

$$L_{2,q}[-\alpha; +\infty) = \Pi_- + \Pi_+;$$

$$\forall f \in L_{2,q} : f(x) = f_-(x) + f_+(x), f_- \in \Pi_-,$$

$$f_- = \sum_m f_{-m} X_{-m}, f_+ \in \Pi_+, f_+ = \sum_m f_{+m} X_{+m},$$

$$f_- \perp f_+, [f; f] = [f_-; f_-] + [f_+; f_+], [f_-; f_-] < 0, [f_+; f_+] > 0. \quad (72)$$

Для характеристического определителя (68) имеет место оценка снизу аналогичная (47) (вне кружков сколь угодно малого фиксированного радиуса с центрами в точках $\lambda'_{-m}, \lambda'_{+m}$).

Вышеизложенное позволяет решить задачу вида (57),(42),(43)₀ по схеме (50)-(52). При этом, если выполняется условие (53) и

$$\sum_m |\varphi_{\pm m}| m^2 < \infty, \sum_m |\psi_{\pm m}| m^2 < \infty,$$

то полученное решение

$$u(x; t) \in C^2([-\alpha; \beta] \times [0; T]), b > 0.$$

При $0 \geq b > -1$, нужно учитывать разрыв вторых производных.

Опять-таки, предыдущая информация позволяет решить задачу (57),(42)₀,(43) по схеме (55)-(56). Полученное решение

$$u_1(x; t) \in C^2([-\alpha; \beta] \times [0; T]), b > 0.$$

Задача Дирихле для уравнений смешанного типа рассмотрена в работе [3], где имеется обширная библиография.

Литература

1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я.Азизов. М.: Наука, 1986.
2. Нахушев А.М. Критерий единственности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа / А.М.Нахушев // Дифференц. уравнения., 1970. Т.6, №1. С.190-191.
3. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа второго рода в прямоугольной области / К.Б.Сабитов // Известия вузов.Математика., 2007. №4. С.45-52.
4. Садовничий В.А. Теория операторов / В.А. Садовничий. М.: Высшая школа, 1999.
5. Стакун А.А. Краевые задачи, связанные с дифференциальными операторами с точкой поворота / А.А.Стакун // Вестник ЧувГУ., 2012. №3. С.32-40. Чебоксары.: ЧувГУ .

6. Стакун А.А. О свойствах дифференциального оператора с кратной точкой поворота / А.А.Стакун // Дифференц. уравнения., 1987. Т. 23. № 6. С. 993-999.

7. Стакун А.А. Спектральные свойства дифференциального оператора с особенностью типа полюса / А.А.Стакун // Сб. научных трудов «Мате-

матические модели и их приложения», 2013. Вып. 15. С. 61-68. Чебоксары.: ЧувГУ.

8. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике / Ф.И.Франкль. М.: Наука, 1973.

9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции / Янке Е. М.: Наука, 1968.

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Шерыхалина Н.М., Поречный С.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет

450000 Россия, Уфа, ул. К. Маркса, 12
porechny@mail.ru

Аннотация

Предлагается усовершенствованная методика постпроцессорной обработки данных численного эксперимента. Цели применения этой методики состоят в получении оценки погрешности, ее проверке и обоснованию достоверности, а также в уточнении и наглядном представлении результатов анализа работы численных алгоритмов и программ.

Введение

Комплексное исследование научных проблем с применением современных технологий математического моделирования, вычислительного эксперимента и разработкой комплексов программ для проведения этого эксперимента представляет собой сложный процесс, достоверность результатов которого необходимо обосновывать, поскольку решение многопараметрической задачи сопровождается появлением на всех этапах различных видов погрешности, а именно: погрешности математического моделирования, погрешности исходных данных, погрешности округления, погрешности численного метода и дополнительной ненаблюдаемой погрешности. Источниками этих видов погрешности является ограниченность времени, памяти, разрядности и надежности.

Анализ большого количества работ по этой тематике показывает, что в настоящее время достаточно мало внимания уделяется вопросам обоснования достоверности полученных с помощью математического моделирования результатов. В вычислительной практике преобладают упрощенные методы обоснования достоверности и оценки погрешности, которые не обладают необходимой надежностью. Во многих опубликованных численных результатах содержатся ошибки в разрядах, которые декларируются как верные. Проверка опубликованных численных данных представляет существенно большую сложность по сравнению с математическими преобразованиями, поскольку значительная часть работы (например, программа расчета) остается скрытой. Качество анализа численных погрешностей существенно зависит от опыта и интуиции исследователя, применяющего различные приемы, не поддающиеся описанию и остающиеся за рамками научных публикаций. Сравнение численных данных с результатами физических экспериментов, которое часто используется для оценки погрешности, дает возможность оценить только погрешность аппроксимации, которая содержит в себе погрешность модели, погрешность эксперимента и погрешность вычислений

$$\delta_{\text{аппроксимации}} = \delta_{\text{модели}} + \delta_{\text{эксперимента}} + \delta_{\text{вычислений}}$$

В отсутствие оценки вычислительной погрешности эта сумма не дает возможности оценить погреш-

ность математической модели. В связи с этим предложенная методика должна обеспечить физическую достоверность получаемых результатов и их оценок. Физическая достоверность может быть достигнута путем получения приближенного значения искомого параметра (называемого ниже эталоном), оценки его погрешности (интервала неопределенности) и проверки факта пересечения интервалов, полученных разными способами [1-3].

1. Математическая модель вычислительного процесса

Математическая модель процесса вычисления многими численными методами некоторой величины z может быть представлена в виде зависимости

$$z_n = z + c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_L f_L(n) + \Delta(n), \quad (1)$$

где z – точное значение; z_n – приближенный результат, полученный при числе узловых точек, равном n ; f_1, \dots, f_L – некоторые функции числа узлов. Все входящие константы и функции могут иметь как действительные, так и комплексные значения.

Для разностных формул численного дифференцирования, квадратурных формул Ньютона-Котеса $f_j(n) = n^{-k_j}$, k_j – действительные числа, что основано на разложении по формуле Тейлора и на формуле Эйлера-Маклорена [4]. Для разностных методов решения задач для уравнений математической физики наличие нескольких компонент зависимости погрешности от n указанного вида подтверждается вычислительным экспериментом [3].

Некоторым численным методам, в частности, рассмотренным в [1], соответствуют функции

$$f_j(n) = \lambda_j^n, \text{ где } |\lambda_j| < 1.$$

В $\Delta(n)$ могут входить не вошедшие в сумму (1) слагаемые того же вида, остаточный член, погрешность округления и многие другие составляющие, обусловленные как численным методом, так и конкретной программной реализацией. Поэтому $\Delta(n)$ не стремится к нулю при увеличении n , а в большинстве случаев возрастает.

Пусть имеется конечная последовательность $z_{n_i}^{(0)} = z_{n_i}$, $i = 1, \dots, I$ вычисленных результатов. Тогда можно записать систему равенств

цифрами 1,2 и т.д. – точности результатов первой, второй и т.д. фильтрации.

На рис. 1,а каждая линия имеет два четко выделенных участка. Первый участок имеет наклон, соответствующий показателю степенной функции. Поведение линий на втором участке, в отличие от первого, носит хаотический характер, угловой коэффициент приблизительно равен -2 . Это связано с преобладанием составляющей погрешности $\Delta(n)$. При этом применение экстраполяции Ричардсона неправомерно, так как она возможна только при преобладании составляющей, имеющей вид степенной функции с определенным показателем.

В диапазоне, где преобладает нерегулярная погрешность, меняющая знак, в качестве оценки погрешности можно использовать разность пар значений. В экстраполяционной формуле Ричардсона эта разность делится на достаточно большое число $Q^{kj} - 1$. Поэтому разница приближенного и экстраполированного результатов оказывается малой и оценка по Рунге дает завышенные по точности результаты. С этим связан сдвиг вверх (при увеличении количества фильтраций) участков линий, соответствующих условию преобладания нерегулярной погрешности. Сравнивая рис. 1,а и 1,б нетрудно заметить, что оценка по Рунге соответствует реальной погрешности в диапазоне, отделенном хотя бы половиной масштабной единицы от уровня нерегулярной погрешности $y=19-2 \cdot \lg n$.

4. Оценка погрешности

Для оценки погрешности часто применяется правило Рунге [4], которое заключается в сравнении приближенного и отфильтрованного значений, т.е. оценкой служит второе слагаемое правой части равенства (3). Следует отметить, что это правило дает верные оценки при условии преобладания конкретного слагаемого суммы (1) (а именно, исключаемого на данном шаге фильтрации) над остальными. Если же преобладает, например, последнее слагаемое (1), которое может иметь хаотичный характер вследствие наличия погрешности округления, то оценка погрешности, полученная по правилу Рунге, может оказаться намного меньше реальной погрешности [2]. С этим связан сдвиг вверх (при увеличении количества фильтраций) участков линий, соответствующих условию преобладания нерегулярной погрешности (рис. 1, а) по сравнению с результатом сравнения с точным значением (рис. 1, б, тонкие кривые).

В связи с этим в [2] предложено сравнивать вычисленные и отфильтрованные значения с единым числом, названным «эталоном». Ошибка в выборе эталона лишена отмеченного недостатка правила Рунге («кажущегося уточнения»), вызванного зависимостью оценки от конкретной закономерности изменения погрешности, поскольку при выборе эталона с погрешностью происходит ограничение оценок на уровне этой погрешности (рис. 1, б, толстые кривые).

Однако «экспертный» выбор эталона неудобен вследствие необходимости вмешательства эксперта в процесс оценки в интерактивном режиме.

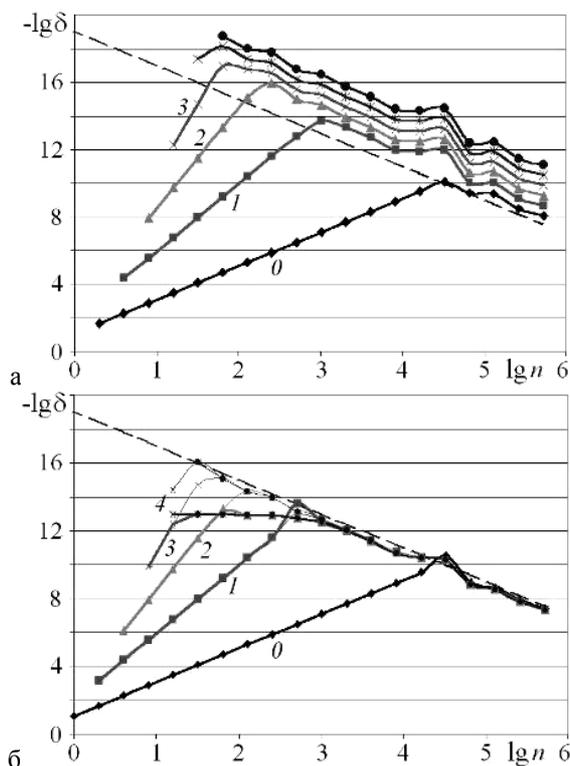


Рисунок 1 - Оценки точности при вычислении второй производной: а – по правилу Рунге; б – сравнение с точным значением.

Прямая $y=19-2 \cdot \lg n$

5. Правило выбора эталона

Для формализации процедуры выбора эталона предлагается двухэтапный метод.

Повторяя фильтрацию, каждый раз приходим к последовательности вида (2), каждый член которой содержит, по крайней мере, два неизвестных: искомое z и погрешность.

Во избежание неопределенности предлагается разделить этапы оценки погрешности и определения искомого z . Для этого на первом этапе проводится фильтрация по формуле

$$z_{n_{i-1}}^{(0)} = z_{n_{i-1}} - z_{n_i}, \quad (4)$$

исключающая из системы (2) неизвестное искомое z . Тем самым, дальнейшая фильтрация по формуле (3) служит оценкой погрешности, независимой от выбора эталона z (рис. 2, а).

Полученная таким способом оценка позволяет выбрать наилучшие, с точки зрения минимума погрешности (или комбинации близких по погрешности значений), соотношения n_i и $j=j_0$. Тем самым, мы приходим к задаче минимизации: при некотором постоянном $k=0,1,2,\dots$ найти минимум $\bar{\Delta}$ по i и j при ограничениях

$$\begin{aligned} -\bar{\Delta} &\leq z_{n_i}^{(j)} \leq \bar{\Delta}, \\ -\bar{\Delta} &\leq z_{n_{i+k}}^{(j)} \leq \bar{\Delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения n_i и $j=j_0$, которые получаются при решении задачи минимизации, используются для определения значения $\hat{z} = z_{n_i}^{(j_0)}$ (эталона) путем фильтра-

ции последовательности $z_{n_i}^{(0)} = z_{n_i}$ по формуле (3). Наложением графиков, полученных попарным вычитанием (4) и сравнением с эталоном, проверяется правильность выбора эталона. Из рис. 2,б видно, что результаты совпадают с оцененной точностью.

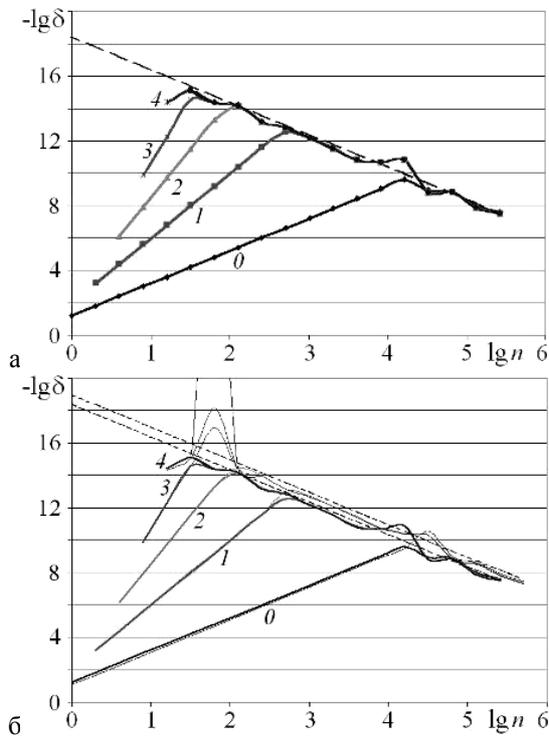


Рисунок 2 - Результаты двухэтапной оценки погрешности с исключением искомого по формуле (4): а – оценка разностей; б – сравнение с эталоном и наложение на график а

Отметим, что преобразование (4) изменяет компоненты зависимости (1)

$$z_{n_{i-1}}^{(0)} = \dots + [f_j(n_{i-1}) - f_j(n_i)]c_j^{(j-1)} + \dots = \dots + [1 - R_j^{-1}]c_j^{(j-1)}f_j(n_{i-1}) + \dots \quad (6)$$

однако при $|R_j| \gg 1$ это изменение незначительно (рис. 2, б).

В случае больших отличий изменение компонент погрешности (6) может быть учтено за счет видоизменения преобразований (4), (3)

$$z_{n_i}^{(0)} = \frac{z_{n_i} - z_{n_{i+1}}}{1 - R_1^{-1}},$$

$$z_{n_i}^{(j)} = \left[z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{R_j - 1} \right] \frac{R_j^{-1}}{1 - R_{j+1}^{-1}}, \quad j=1,2,\dots$$

Тем самым, определена формальная процедура определения эталона $\hat{z} = z_{n_i}^{(j_0)}$. В совокупности с оценкой (5) определяется некоторое множество $[\hat{z} - \bar{\Delta}, \hat{z} + \bar{\Delta}]$ – интервал неопределенности.

Для определения других компонент зависимости (1) в [7] предложен метод идентификации, основанный на фильтрации, устраняющей из (1) константу и видоизменяющий (1) так, что на первом месте в разложении по очереди оказывается c_1, c_2 и т.д. Тогда последовательное определение этих констант проводится рассмотренным выше двухэтапным методом фильтрации.

Выводы

Таким образом, фильтрация, выполняемая на этапе постпроцессорной обработки данных численного эксперимента, дает возможность получить достоверные оценки погрешности и существенно повысить эффективность численных алгоритмов. Тестирование с помощью точных или приближенных (полученных другим способом) частных решений позволяет подтвердить или опровергнуть эти оценки.

С точки зрения практики при оценке погрешности могут быть полезны две задачи: первая – получение эталона с наибольшей возможной для данного эксперимента точностью, вторая – определение диапазона n и δ , в котором оценка погрешности по более простым правилам (типа Рунге и Ромберга) дает приемлемые результаты. Обе задачи решаются методами фильтрации.

Литература

1. Житников В. П., Шерыхалина Н.М. Применение многократной фильтрации при численном решении задач методами теории функций комплексного переменного. 2013. Том 18, № 1. С. 15-23.
2. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(80), СПб. С. 105-110.
3. Житников В. П., Шерыхалина Н.М. Моделирование течений вязкой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Уфа: Гилем. 2009. 336 с.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы. М.: Изд. дом МЭИ. 2008. 672 с.
5. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
6. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Оценка достоверности численных результатов при наличии нескольких методов решения задачи // Вычислительные технологии. 1999. Том 4, № 6. С. 77-87.
7. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Поречный С.С. Решение задачи идентификации при оценке погрешностей численных результатов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 1(93)/2010, СПб., 2010. С. 60-63.

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОСНОВАНИЙ ОТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ГРУНТА

Пилягин А.В.

Чебоксарский политехнический институт (филиал) МГОУ

428022, Чебоксары, ул. П. Лумумбы, 8

Аннотация

Приводится методика определения вертикальных напряжений в основании фундаментов от собственного веса грунта

Annotation

The methods for determining the vertical stress at the base of the foundations of its own weight of soil.

Природное напряженное состояние, т. е. напряженное состояние от собственного веса грунта, действующее до приложения нагрузки от веса зданий и сооружений, необходимо знать для правильного прогноза деформированного состояния оснований, расчета по предельным состояниям, для оценки изменения напряженного состояния основания определяются по формуле:

$$\sigma_{zy} = \gamma z, \quad (1)$$

где γ - удельный вес грунта; z - вертикальная координата (глубина).

Значения компонент горизонтальных напряжений можно получить из рассмотрения закона Гука.

В соответствии с законом Гука относительные деформации грунта по направлениям осей x , y , z вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \xi_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \xi_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \xi_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если учесть отсутствие горизонтальных деформаций при испытании грунта в компрессионных приборах и $\sigma_x = \sigma_y$, то:

$$\xi_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_x = \mu(\sigma_x + \sigma_z), \quad \sigma_x(1 - \mu) = \mu\sigma_z,$$

тогда:

$$\sigma_x = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_z = \xi \sigma_z \quad (4)$$

Следует иметь в виду, что условия $\xi_x = \xi_y$ справедливы только в сечениях по центру образца и на границе (контакте) грунта с кольцом

ваний при вскрытии котлованов и устройстве насыпей.

При испытании грунтов в компрессионных приборах, т.е. при отсутствии горизонтальных перемещений, общие вертикальные напряжения от собственного веса грунт

компрессионного прибора. Следовательно, при компрессионных испытаниях развивается как объемная, так и сдвиговая деформации.

В литературе можно встретить рекомендации по назначению коэффициента бокового давления (0,4-0,42 для несвязных и 0,7-0,75 для глинистых грунтов). Данный коэффициент, к сожалению, пу-

тают с $\xi_o = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z}$ для условий природного

залегания грунтов. Как будет показано ниже, для нормально уплотненных грунтов естественного сложения $\xi_o = 1$. К сожалению, в расчетах по деформациям оснований также принимают равенство горизонтальных напряжений

$$\sigma_x = \sigma_y = \xi \sigma_z = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_z. \text{ Следует иметь вви-}$$

ду, что нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma_y$ только для центральной вертикали круглого и квадратного фундаментов.

Легко показать, что для фундаментов прямоугольной формы относительная вертикальная деформация будет равна:

$$\xi_z = \frac{\sigma_z}{E} = (1 - k\mu) = \frac{\sigma_z}{E} \beta \quad (5)$$

$$k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sigma_z}; \quad \beta = 1 - k\mu.$$

Природное напряженное состояние будет зависеть от условий их формирования. Если нормально уплотненные грунты испытывают только

собственный вес грунта, то их напряженное состояние должно отвечать условию $\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y$, тогда коэффициент Пуассона должен быть равен $\mu = 0,5$, а коэффициент бокового давления $\xi = 1,0$. Следовательно, мы имеем геостатическое напряженное состояние оснований. Проверим данное положение прямым интегрированием компонент нормальных напряжений ($\sigma_z, \sigma_x, \sigma_y$) от единичной сосредоточенной силы по бесконечно большой площади загрузки основания.

Формулы определения напряжений в основании под действием единичной силы P , приложенной на поверхности грунта были получены Ж. Бу-синеском:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5},$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{y^2 \cdot z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 \cdot R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right] \quad (6)$$

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 \cdot z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 \cdot R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right],$$

где x, y, z - координаты рассматриваемой точки.

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от начала координат до рассматриваемой точки.

Из выражения (2)

$$\xi_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

получим $\sigma_z = 2\mu\sigma_x$ при условии, что $\sigma_x = \sigma_y$.

Так как вертикальные напряжения не зависят от μ , то лучше записать:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_z}{2\mu}.$$

Из данной записи видно, что при $\mu < 0,5$ горизонтальные напряжения будут больше вертикальных. Поэтому данное соотношение имеет место только при $\mu = 0,5$, тогда $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, а коэффициент бокового давления $\xi = 1,0$.

Значения компонент нормальных напряжений от собственного веса грунта ($\rho = \gamma \cdot z$), распределенного по линии равны (аналог задачи Фламана):

$$\sigma_z = \frac{3P \cdot z^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[x^2 + (y-\xi)^2 + z^2]^{5/2}} = \frac{2Pz^3}{\pi(x^2 + z^2)^2},$$

$$\sigma_x = \frac{3P \cdot x^2 \cdot z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[x^2 + (y-\xi)^2 + z^2]^{5/2}} = \frac{2P \cdot z \cdot x^2}{\pi(x^2 + z^2)^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_y = \frac{3P \cdot y^2 \cdot z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\xi)^2 dy}{[x^2 + (y-\xi)^2 + z^2]^{5/2}} = \frac{P \cdot z}{\pi(x^2 + z^2)^2}.$$

Интегралы по переменной x в пределах оси $-\infty$ до $+\infty$ лучше брать как сумму двух интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} :$$

$$\sigma_{z1} = \frac{2P \cdot z^3}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{2Pz^3}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{\xi+x}{2z^2[(x+\xi)^2 + z^2]} + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\xi+x}{z}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{z \cdot x + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x^2 + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot z^2}{z^3(x^2 + z^2)} \right]; \quad (8)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \left[\frac{\xi+x}{2z^2[(x+\xi)^2 + z^2]} \right] = 0;$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{\xi+x}{z}\right) = \frac{\pi}{4z^3};$$

Окончательно имеем:

$$\sigma_{z1} = \frac{P}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} - \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \right]; \quad (9)$$

Значение второго интеграла равно:

$$\sigma_{z2} = \frac{2P \cdot z^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{2Pz^3}{\pi} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{\xi-x}{2z^2[(x-\xi)^2 + z^2]} + \frac{1}{2z^3} \arctg\left(\frac{\xi-x}{z}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{z \cdot x + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x^2 + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot z^2}{z^3(x^2 + z^2)} \right]$$

или

$$\sigma_{z2} = \frac{P}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \right]. \quad (10)$$

$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P,$$

т.е. $\sigma_z = \gamma \cdot z$ - общеизвестная формула определения вертикальных напряжений от собственного веса грунта.

Значение горизонтальных напряжений можно вычислить аналогично:

$$\sigma_{x1} = \frac{2P \cdot z}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(x-\xi)^2 d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{2Pz}{\pi} \times \left[\frac{\frac{\xi}{2[(x+\xi)^2 + z^2]} - \frac{x}{2[(x+\xi)^2 + z^2]} + \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\xi+x}{z}\right) - \frac{z \cdot x + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot x^2 + \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \cdot z^2}{2z(x^2 + z^2)} \right] \quad (11)$$

$$\sigma_{x1} = \frac{P}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} - \arctg\left(\frac{x}{z}\right) \right];$$

$$\sigma_{x2} = \frac{2P \cdot z}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(x-\xi)^2 d\xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} =$$

$$= \frac{P}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{z} \right) \right] \quad (12);$$

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = P = \gamma \cdot z \quad (13).$$

Значения напряжений σ_y зависят:

$$\sigma_y = \frac{P \cdot z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[(x-\xi)^2 + z^2]} = P = \gamma \cdot z \quad (14);$$

Выполненный анализ указывает на равенство нормальных напряжений $\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$ для природного напряженного состояния нормально уплотненных грунтов с горизонтальной поверхностью. Для переуплотненных грунтов значения горизонтальных напряжений могут быть больше вертикальных, а коэффициент бокового давления $\xi > 1,0$.

Полученные выводы относятся к случаю, когда поверхность грунта горизонтальная. Компоненты напряжений от собственного веса грунта будут изменяться в зависимости от отклонения его

поверхности от горизонтальной (вскрытие котлована, образование насыпей). Полученные выше

формулы для полубесконечных нагрузок, т.е. $\int_{-\infty}^0$

и \int_0^{∞} , позволяют определить напряжения от соб-

ственного веса грунта при наличии котлована с вертикальными стенками. Некоторые результаты вычисления вертикальных напряжений для полубесконечных нагрузок, т.е. для зданий с подвалами приведены в табл.1.

Ниже отметки дна котлована напряжение от собственного веса грунта вычисляются обычным способом, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \gamma \cdot z$. Указанные напряжения должны суммироваться с напряжением, вычисленным для ломанного контура.

Литература

1. Пилягин А.В. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений. АСВ, г.Москва, 2011. – 311 с.

ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ДВС С ИСКРОВОМ ЗАЖИГАНИЕМ, РАБОТАЮЩЕГО НА БИНАРНОМ ТОПЛИВЕ

Жолобов Л.А., Ушаков М.Ю., Фролов С.А.

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия

Россия, 603107, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 97
jolobovlev@yandex.ru; frolsa2007@mail.ru.

Реферат

В статье описывается программно-вычислительный комплекс, позволяющий получать данные с двигателя внутреннего сгорания, работающего на бензине, на газе и на бензо-газовой смеси. Программно-вычислительный комплекс позволяет в компьютере отображать данные с двигателя в виде таблиц и графиков. Основные показатели (частота вращения коленчатого вала, абсолютное давление во впускном коллекторе, массовый расход воздуха, угол опережения зажигания, данные с датчика положения дроссельной заслонки, напряжение датчика кислорода) располагаются на главном окне программы. Программно-вычислительный комплекс позволяет скачивать данные из «черного ящика» и после просматривать данные в табличном и графическом виде. Применение данного комплекса подходит для большинства бензиновых двигателей, что делает его универсальным для исследований.

Ключевые слова: персональный компьютер, двигатель внутреннего сгорания, программа, блок управления

Abstract

The article describes the software and computer system, allowing obtaining necessary my data from the internal combustion engine running on gasoline, gas and petrol-gas mixture. Software and computer system consists of several windows that display data from the engine in the form of tables and graphs. Key indicators (crankshaft of the shaft, the absolute pressure in the intake manifold, the instantaneous mass flow rate of air, the ignition timing, the data from the throttle position sensor, the data from the oxygen sensor) located on the main window. Software and computer system allows you to store data received from the engine in the «black box», and then, if necessary, can transfer the data to a text file for easy processing. The use of this complex suitable for many types of gasoline engines, making it versatile for research.

Key words: personal computer, the internal combustion engine, a program control unit

Программно-вычислительный комплекс предназначен для контроля работы электронного блока управления бензиновым двигателем, работающем по бензо-газовой системе топливоподачи и получения информации с блока управления и передачи её на персональный компьютер. Блок управления разработан специально для исследования двигателей внутреннего сгорания (ДВС), обладает богатыми аппаратными возможностями и оригинальными алгоритмами с относительно произвольным набором типов датчиков и исполнительных устройств.

Для работы программно-вычислительного комплекса в реальном времени следует соединить блок управления и компьютер с помощью адаптера – преобразователя интерфейса (USB)RS-232 - K-Line. После запуска программы на компьютере, главное окно «Диагностика впрыска TMS320F2806/08/09 v.3xx» предоставляет возможность активировать связь с контроллером по интерфейсу COMxx (физическому RS-232 или виртуальному). При этом из полного списка следует выбрать номер COM-порта, подключенного к БУ через K-Line- преобразователь интерфейса. На рис.1 выбран COM4. Скорость приёма/передачи, фиксированная 38400 бод. Протокол свой, несовме-

стимый с KWP2000. Посылка содержит 10-байтный заголовок, не имеет ограничений на длину, нет процедур инициализации и поддержания сеанса связи. Наличие отклика контроллера отражается в самом низу главной формы (0 с Time по reply - связь в норме). При отсутствии отклика счетчик времени увеличивается каждые 2 секунды и показывает время отсутствия связи.

Слева от окна выбора номера COM-порта располагается компонент выбора группы данных, запрашиваемых компьютером у БУ. По умолчанию устанавливается группа 0x08 – (основные параметры). Периодичность запросов (Period of request) вместо стартовых 2000 мс, можно изменить на другое значение (рекомендуемый минимум – 200 мс).

После выбора COM-порта, к которому подключен интерфейс, программа на персональный компьютер периодически выдаёт запросы. Прекратить выдачу запросов или возобновить их можно кнопкой справа от индикаторов «Com Tx Rx» (True сменится на False, или наоборот).

На рис.1 можно увидеть следующие значения: adc[2]=199 ед. Аналого-цифровой преобразователь (АЦП) и соответствующее этому каналу напряжение с датчика дроссельной заслонки с

учёт входного делителя равно 236 мВ. Аналогично представлены остальные каналы, ниже перечислим их:

0 – мгновенный расход воздуха (кг/ч), 1 – абсолютное давление во впускном коллекторе (кПа), 2 – напряжение с датчика положения дроссельной заслонки (мВ), 3 - резервный канал, может быть использован для подключения любого сигнала, все цепи в блоке управления и контакт в разъёме (54) именуются, 4 – температура воздуха на впуске ($^{\circ}\text{C}$), 5 – температура охлаждения ($^{\circ}\text{C}$), 6 – температура блока (датчик внутри блока) ($^{\circ}\text{C}$), 7 – напряжение

+5В, используемое для внешних измерительных цепей (мВ), 8 – напряжение с главного реле (мВ), 9 - напряжение с датчика кислорода (мВ), 10 - напряжение с компаратора датчика положения коленчатого вала (диагностика обрыва) (мВ), 11 – напряжение с датчика детонации (мВ), 12 – напряжение в первичной цепи зажигания (1,4 канал), (мВ), 13 – ток в первичной цепи зажигания (1,4 канал) (мА), 14 – напряжение в первичной цепи зажигания (2,3 канал), (мВ), 15 – ток в первичной цепи зажигания (2,3 канал), (мА).

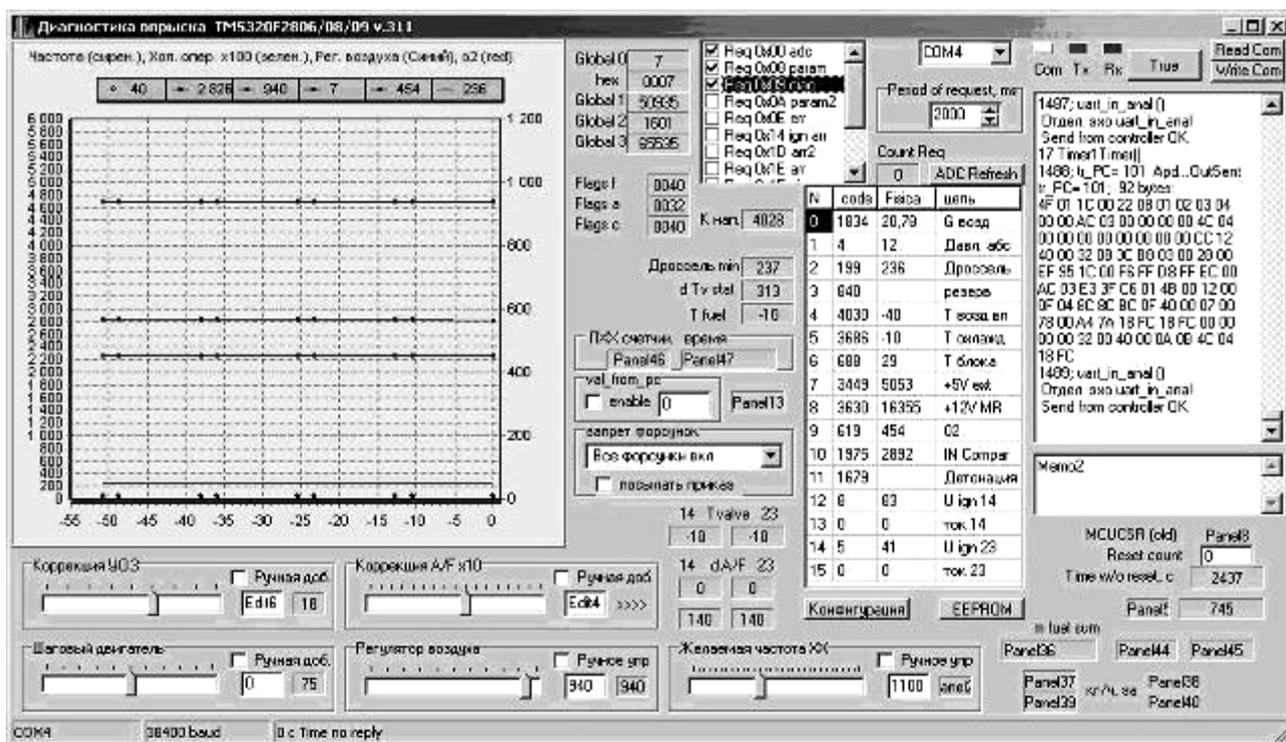


Рисунок 1 - Главное окно программы

Слева на главной форме отображены графики некоторых важных текущих параметров: 1. частота вращения коленчатого вала (минимальное значение $40/60 \text{ мин}^{-1}$ для 6/4 цилиндров), 5. напряжение с кислородного датчика (454мВ), 6. напряжение с датчика положения дроссельной заслонки (236мВ). С течением времени текущие значения параметров сдвигаются влево и пропадают с экрана через 55 секунд. Если приостановить обмен данными с блоком управления, то через 5 секунд график остановится, позволяя наблюдать фиксированные значения параметров.

Внизу главной формы имеются компоненты контроля регулировочных параметров, а также их ручной коррекции, если галочка ручного управления установлена.

Программа для персонального компьютера помимо главной формы имеет ещё семь форм. Любые формы могут быть перемещены оптимальным образом в пределах экрана или на второй монитор, если компьютер оборудован двумя мониторами. Это решение позволяет видеть максимум информации при решении различных задач.

На следующем рисунке (рис.2) представлена форма 4 с тремя закладками, одна из которых – "Дискретное управление 6230" позволяет наблюдать состояние 8-ми маломощных дискретных выходов блока управления, а при желании – и управлять ими вручную. К примеру, можно управлять лампой диагностики, как и другими нагрузками при включенном ручном управлении соответствующей кнопкой ON/OFF. При отключенном ручном управлении состояние выхода отображается надписью на кнопке и индикатором (для лампы, например, индикатор горит ярким жёлтым цветом, главное реле также включено). Справа от каждой из кнопок выводятся диагностические биты (3 – норма, при обрыве – будет 1). При наведении курсором на диагностические биты будет выводиться подсказка, например, " норма (ток < 1.5А, Т < 170С) " или "обрыв цепи (U < 3V)"... Диагностические данные передаются в персональный компьютер при установленном запросе «0x09» на главной форме.

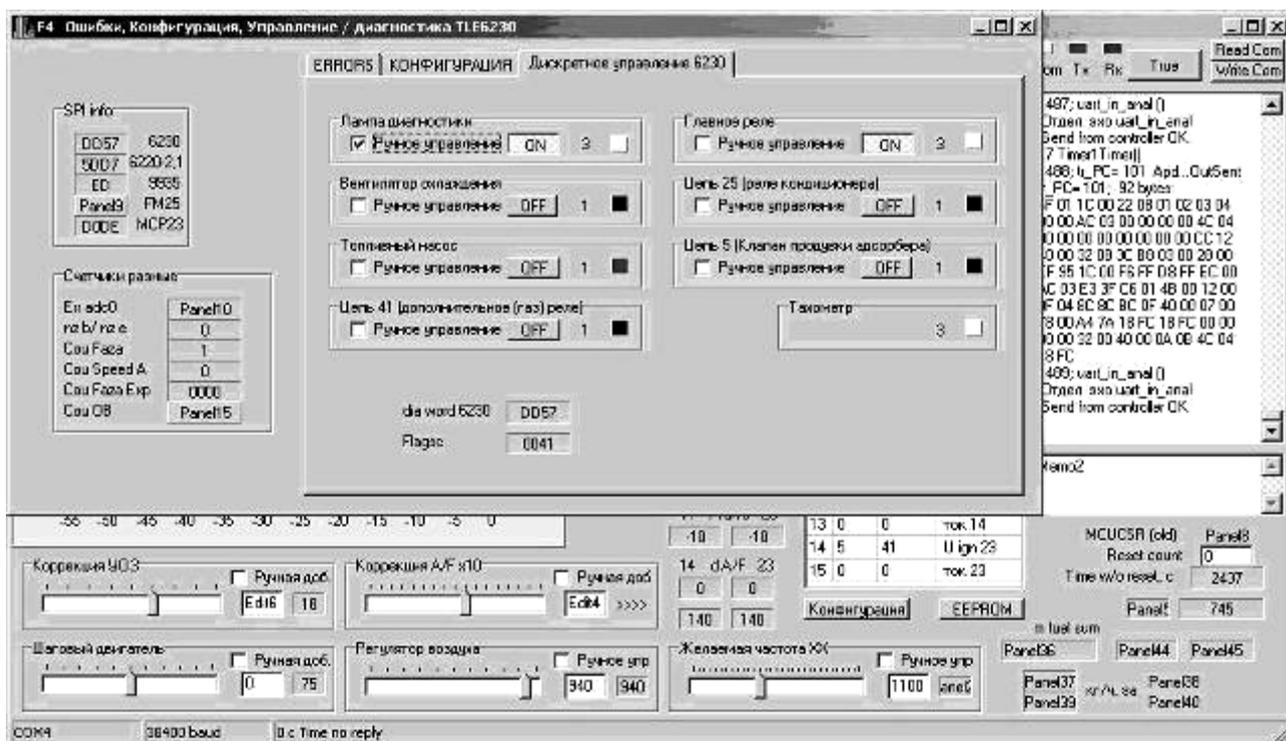


Рисунок 2 - Дискретное управление слаботочными нагрузками

Программа позволяет увидеть осциллограммы мгновенного расхода воздуха и давления в ресивере в пределах нескольких последовательных циклов (от 1 до 10).

Данные о мгновенных расходе воздуха и давления, получаемых из блока управления представляют потактовые структуры, включающие служебную информацию и непосредственно два массива мгновенных значений расхода воздуха и давления (точнее – сырых данных в единицах АЦП) через 6 град. поворота коленчатого вала. Число точек для четырёхцилиндрового двигателя – 32, для шестицилиндрового – 22, т.е. по две лишние точки – одной в начале и другой – в конце массива. Это сделано для контроля, когда сшиваются данные из последовательных тактов, и "лишние" точки обязаны совпадать.

Чёрный ящик по мере вращения двигателя постоянно перезаписывается, фиксируя около 40 параметров. Здесь единица времени – один такт, для 4-цилиндрового двигателя такт соответствует половине оборота коленчатого вала. Некоторые параметры записываются в каждом такте (например, цикловой воздух, цикловой воздух с датчика, все акты впрыска), другие – 1 раз за оборот (такие как три группы флагов, соотношения воздух/топливо групп цилиндров, положение регулятора воздуха и шагового двигателя и т.д.), и третьи – один раз за 32 такта (например, температуры). Данные черного ящика могут быть просмотрены как в табличном, так и в графическом виде. Данные сохраняются в двух форматах - двоичном и текстовом, причём данные двоичного формата могут быть заново загружены в программу для просмотра. Емкости памяти чёрного ящика хватает примерно на 30-70 км пробега.

Из меню «File» на форме 3 можно сохранить загруженные в компьютер данные в двоичный файл *.bin, а также загрузить в компьютер ранее сохра-

нённые данные из файла. В файл записываются все 8К страниц независимо от того, были ли они скачаны все или лишь частично. Если файл содержит не все страницы, а черный ящик блока управления ещё содержит актуальную информацию, то такая загрузка позволит продолжить скачивание и иметь более полную информацию. При сохранении или чтении данных из двоичного файла в заголовке форм 3 и 7 появляется полный путь с именем файла. В имени файла отражаем номер версии программы, круга, последней страницы, на которой остановилась запись или диапазон скачанных страниц и т.д.

На форме 7 выводятся данные чёрного ящика в графическом виде (рис.3). Данные предварительно должны быть загружены в компьютер либо из двоичного файла (из меню формы 3), либо непосредственно из блока управления.

На форме 6 представлены сигналы с датчика детонации (рис.4). Исходный массив данных считывается из блока управления после команды с компьютера. Блок управления оцифровывает сигнал с датчика детонации с темпом 12 мкс между соседними точками. Если сигнал с датчика слишком велик, то его можно ослабить, установив галочку "Atten" – сигнал ослабнет примерно втрое. Записи привязаны к рабочему ходу 4 или 6 цилиндра, как наиболее "горячих" в двигателях с соответствующим числом цилиндров. Момент начала записи фиксированный и составляет 6 градусов поворота коленчатого вала после верхней мёртвой точки. Нижняя горизонтальная ось – в метках времени – одна единица равна 50нс. Верхняя горизонтальная ось – в градусах поворота коленчатого вала. Сиреневый график – это исходный сигнал, а зелёный – сигнал после цифровой фильтрации. Справа от графика в таблице представлены данные в цифровом виде.

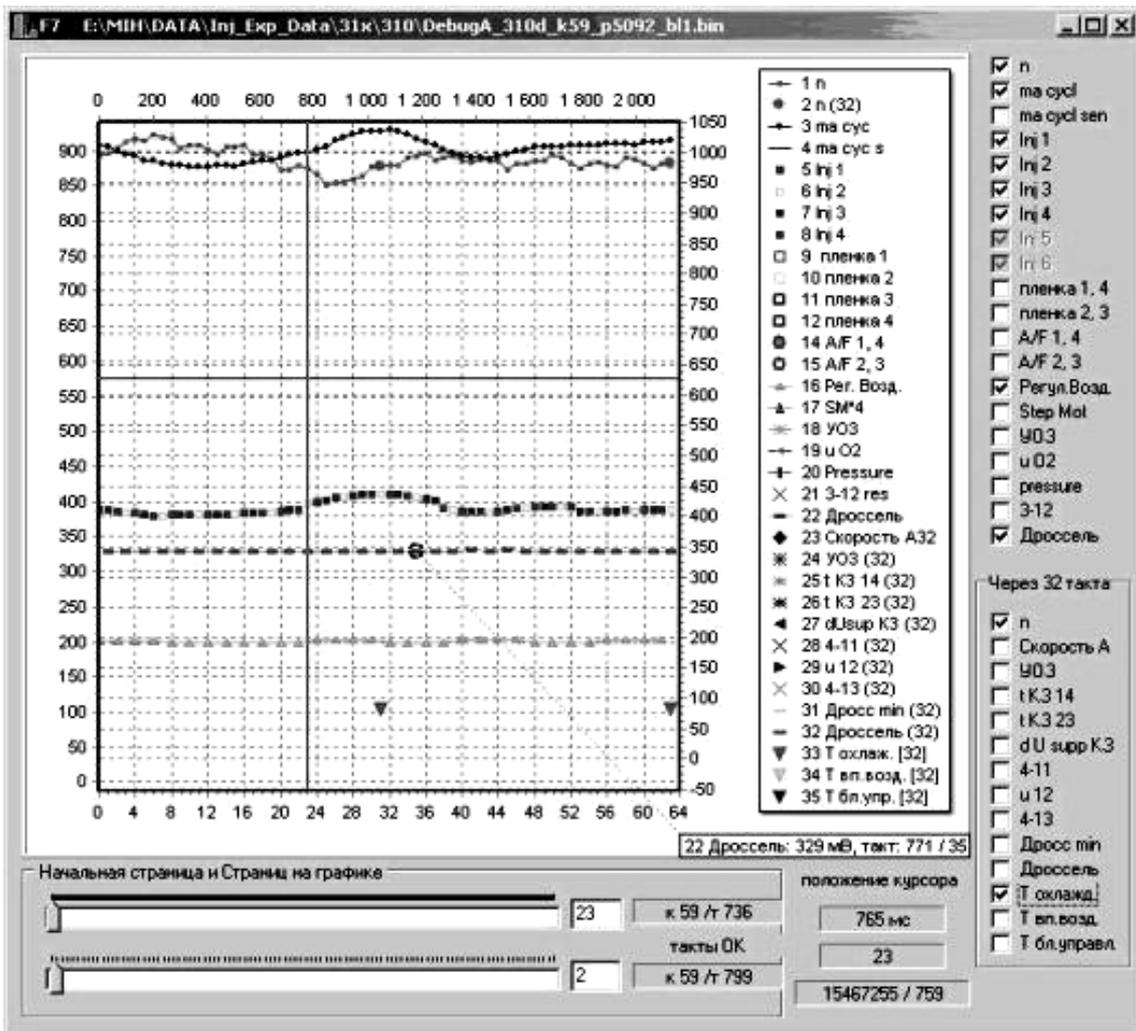


Рисунок 3 - Графики из черного ящика

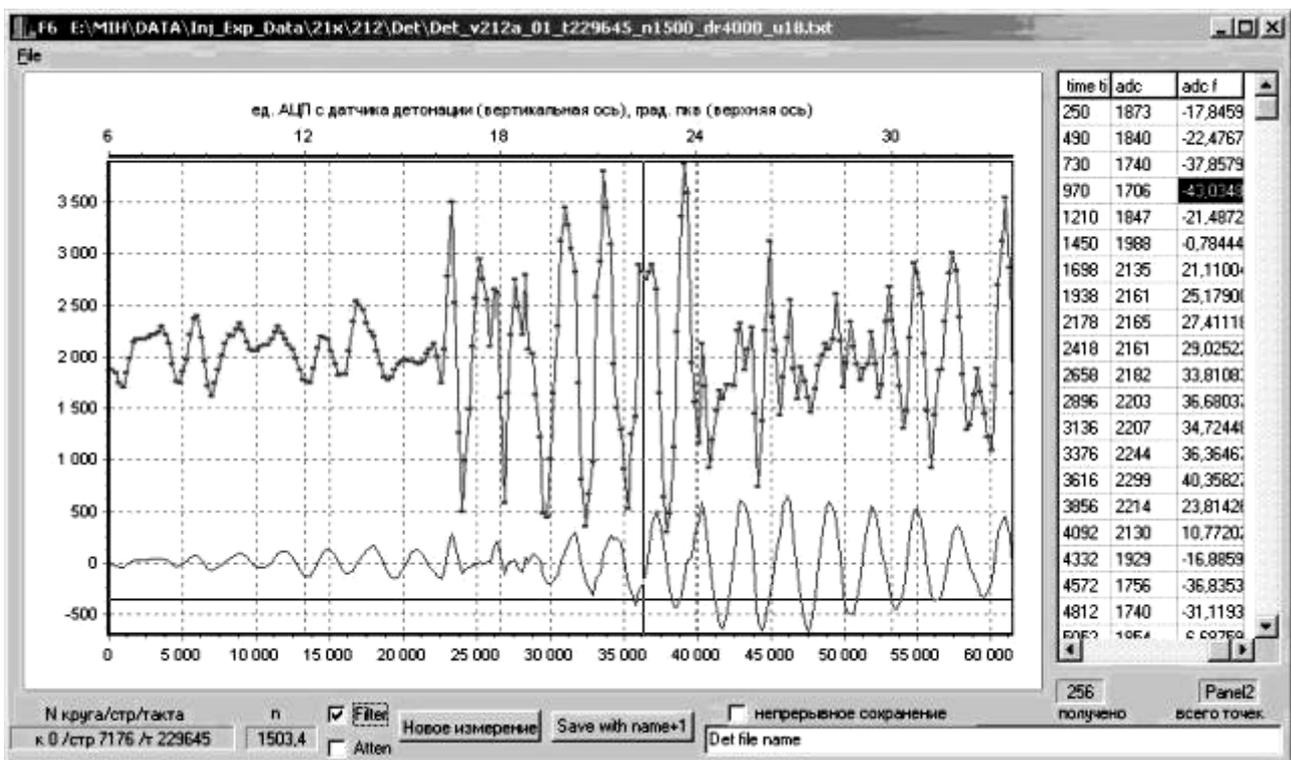


Рисунок 4 - Сигналы исходный и обработанный датчика детонации

Особенности блока управления:

- собственные алгоритмы управления

- возможна коррекция фактической характеристики датчика массового расхода воздуха
- обработка обратного выброса для нитевого (быстродействующего) датчика массового расхода воздуха для двигателей с числом цилиндров равным 4
- деление групп цилиндров на минимум на две части с независимой обработкой виртуальных температур впускных клапанов и топливной плёнки (задел для отключения половины цилиндров)
- топливо-воздушное соотношение горючей смеси – экономичное для частичных нагрузок с постепенным обогащением до мощностного при больших открытиях дросселя. При откатке коэффициентов коррекции датчика массового расхода воздуха возможен переход на стехиометрическое соотношение, модулированное пиллой

- широкие возможности для диагностики, исследований и доводки ДВС

- непосредственное измерение напряжения и тока катушек зажигания по первичной цепи (по 30 точек через ~200мкс) для оптимизации длительности включённого состояния первичной цепи и диагностики.
- непосредственное измерение сигнала датчика детонации (384 точки через 12 мкс)
- непрерывная запись в EEPROM около 40 параметров: в каждом такте(частота вращения, цикловой воздух), раз за оборот 16 параметров(составы смеси А/Ф, угол опережения зажигания, флаги 48 битов, степень открытия дросселя, сигнал датчика абсолютного давления и т.д.), 1 раз за 32 такта 14 параметров (температуры охлаждения, воздуха, скорость автомобиля, напряжения в бортовой сети
- запись протокола – редких событий, в том числе ошибок с указанием номера такта
- запись мгновенных расходов воздуха и абсолютного давления на впуске с разрешением 6 град. положения коленчатого вала в пределах нескольких циклов

Таким образом, компьютерная программа и блок управления может быть использована для исследования двигателей внутреннего сгорания, а также при диагностировании отдельных систем управления двигателем.

Список сокращений

EEPROM - Electricity Erased PROgram Memory – электрически стираемая программируемая память. В блоке управления установлены две микросхемы памяти – одна для записи настроек (FM25xxx ёмкость от 8 до 64Кбайт) и протокола, другая – для черного ящика (AT45DB642).

ЧЯ – Чёрный Ящик. Хранится в EEPROM AT45DB642, постоянно перезаписываясь при вращении двигателя. Минимальное разрешение записей – один такт. Ёмкость – 256 Ктактов/ 8К страниц. Имеется возможность считывания данных черного ящика в компьютер и сохранение в двоичном файле для дальнейшего использования при диагностических и иных процедурах.

Литература

1. Гируцкий О.И. Электронные системы управления агрегатами автомобиля / О.И. Гируцкий, Ю.К. Есеновский-Лашков, Д.Г. Поляк. – М.: Транспорт, 2000.-213 с.

2. Системы впрыска бензина. Устройство, обслуживание, ремонт / Практик. пособ.// Ред. М.И. Бирюков. – М.: Издательство «За рулём», 1997. – 144 с.

3. Трантер А.[Tranter A.] Руководство по электрическому оборудованию автомобилей / А. Трантер. – СПб.: «Альфамер Паблишинг», 2001 – 286 с.

4. Обсуждение особенностей применения, настройки и эксплуатации блоков управления. // [Электронный ресурс] URL: <http://forum.chiptuner.ru/forumdisplay.php?f=266> - (дата обращения: 17.03.2013)

5. Обсуждение особенностей применения блока управления при конвертации механического впрыска на электронный впрыск.// [Электронный ресурс] URL:<http://www.oldmerin.net/board/index.php?s=9a>- (дата обращения: 14.03.2013)

Рецензенты

1. Гоц Александр Николаевич, д.т.н. профессор кафедры тепловых двигателей и энергетических установок Владимирского государственного университета Министерства образования и науки, 600005, г. Владимир, ул. Горького, 87. Тел./факс: (4922) 47-99-40

2. Кульчицкий Алексей Рэмович, д.т.н., профессор, заместитель главного конструктора ООО ВМТЗ, 600000, Владимир, ул. Тракторная, 43, Тел./факс (4922) 538736

ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРЫЛОВЫХ ГИДРОДВИГАТЕЛЕЙ

Терентьев А.А.

ООО «Энергоинновации», Чебоксарский политехнический институт МГОУ

428000 Чебоксары, ул. Калинина, 32
taa2004@list.ru

Abstract

Рассматриваются математические модели некоторых конструкций крыловых гидродвигателей, предложенных в [1, 2]. Поскольку скорость течения воды в реках, как правило, небольшая, примерно 0.5 – 1 м/с, то нестационарные составляющие гидродинамических сил в рассматриваемых задачах малы и в расчетах они не учитываются.

Mathematical models of some wing hydraulic engines offered in [1, 2] are considered. Since the velocity of water stream is quite slow about 0.5 – 1m/s, the unsteady multipliers of hydrodynamic forces must be small and its not be taken into account by calculations.

1. Гидроустановка с одним крылом, совершающим возвратно-поступающее движение

На рис. 1 представлена одна из возможных конструкций гидродвигателя. Крыло совершает вертикальное возвратно-поступательное движение между двумя фиксированными точками, в которых угол установки крыла меняется. К валу крыла жестко закреплена цапфа, которая зацепляет цепь и движет ее вместе с крылом. При повороте крыла цапфа закрепляет цепь с другой стороны, так что цепь движется только в одну сторону, вращая активное колесо, с которого снимается усилие для электрогенератора.

Пусть вертикальное движение крыла совершается с постоянной скоростью U ; скорость течения равно V , тогда скорость набегающего потока $W = \sqrt{U^2 + V^2}$ (рис. 1б). Введем коэффициент вертикального движения $k = V/U$, тогда угол $\beta = \arctg k$ определяет наклон к оси x скорости набегающего потока. Если угол установки профиля (угол между вертикальной осью y и хордой) равен γ , то угол атаки

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta. \quad (1)$$

В соответствии с формулой Н.Е. Жуковского, результирующая сила

$$F = \rho W \Gamma, \quad (2)$$

где Γ - циркуляция скорости (здесь $\Gamma > 0$ при обходе профиля по часовой стрелке). Для тонкого профиля подъемная сила мало отличается от подъемной силы пластины. Например, для симметричного профиля Н.Е. Жуковского с относительной толщиной 0.2 отношение коэффициента подъемной силы к соответствующему коэффициенту для пластины равно $c = C_y / 2\pi \sin \alpha = 1.17$, а для относительной толщины 0.1 коэффициент $c = 1.09$.

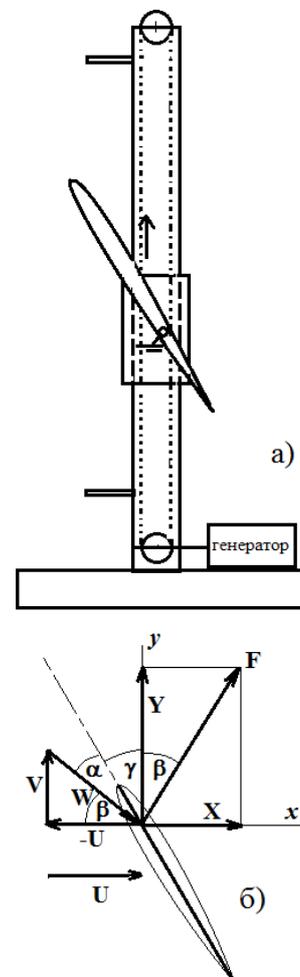


Рисунок 1 - Однокрыловой гидродвигатель:
а) схематическое устройство гидродвигателя;
б) к расчету сил.

Следовательно, если профиль тонкий и симметричный, то циркуляция мало отличается от циркуляции вокруг плоской пластины, равной

$\Gamma = \pi W H \sin \alpha$ (H – длина хорды), хотя несколько превышает последней величины.

Для произвольного профиля циркуляция может быть вычислена методом граничных элементов [3]. Ниже для оценочных выводов рассматривается пластина вместо телесного профиля. Результирующая сила для пластины определяется по формуле

$$F = \pi \rho W^2 b \sin \alpha = \pi \rho U^2 b (1 + k^2) \sin \alpha. \quad (3)$$

Поскольку вектор результирующей силы направлен перпендикулярно вектору скорости (рис. 1б), то разлагая по осям координат, находим вертикальную силу $Y = F \cos \beta$. Полученная сила вычислена для профиля в сечении крыла, если крыло бесконечно большого удлинения. В случае конечного крыла из-за сходящихся свободных вихрей местный угол атаки будет несколько отличаться от α . Однако, если добавить шайбы на концах крыльев, то через эти шайбы можно продолжить течение. В результате прямоугольное крыло с концевыми шайбами будет эквивалентным крылу бесконечно большого удлинения, и профиль в каждом сечении будет обтекаться одинаковым образом. Поэтому вертикальная сила крыла будет равна $Y = FS \cos \beta$.

Мощность гидроустановки

$$N = YV = \rho U^3 S C_N, \quad (4)$$

где

$$C_N = (1 + k^2) k \cos(\gamma + \beta) \cos \beta$$

– коэффициент мощности крыла. Поскольку $\beta = \arctg k$, то правая часть преобразуется к виду

$$C_N = \pi k (\cos \gamma - k \sin \gamma). \quad (5)$$

Отсюда следует, что мощность равна нулю при $k_0 = \ctg \gamma$. Для вычисления максимально возможной мощности необходимо найти производную функции $f(k) = k(\cos \gamma - k \sin \gamma)$ по параметру k и приравнять нулю; $k_1 = \ctg \gamma / 2 = k_0 / 2$. Коэффициент вертикальной силы

$$C_y = C_N / k = \pi (\cos \gamma - k \sin \gamma). \quad (6)$$

На рис. 2 показана зависимость коэффициента мощности от угла установки крыла.

Из рисунка видно, что для получения более высокой мощности установки необходимо уменьшать угол установки. Однако в этом случае при смене угла установки в верхнем или нижнем положении будет срыв потока за профилем, что значительно уменьшит вертикальную силу. Поэтому при конструировании гидроустановки необходимо предусмотреть плавный переход с одного угла на другой угол установки профиля. Из предыдущих формул следует, что путем выбора угла γ и размеров крыла можно получить достаточно большие мощности. Например, если угол установки $\gamma = 10^\circ$, то крыло с размерами $5\text{м} \times 20\text{м}$ в потоке воды со скоростями $U = 0.5\text{м/сек}$, 1м/сек и 2м/сек может дать мощность 0.029мВт , 0.23мВт и 1.84мВт , соответственно.

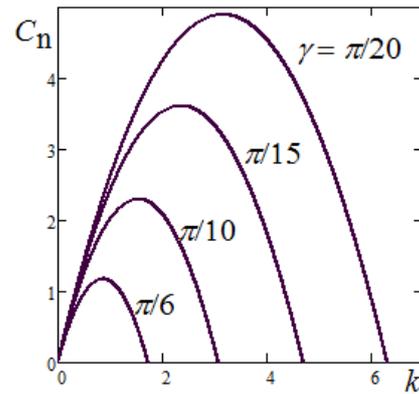


Рисунок 2 - Зависимость коэффициента мощности от k и γ .

2. Двухкрыловая установка

Схема установки показана на рис. 3. В данном случае вертикальная скорость крыла не будет постоянной. Из-за инерции кривошипно-шатунного механизма можно считать вращение кривошипа постоянным с угловой скоростью ω .

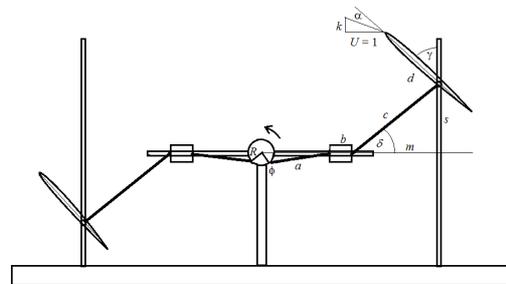


Рисунок 3 - Двухкрылая гидроэнергетическая установка.

Поскольку два крыла двигаются одинаковым образом, то достаточно рассмотреть лишь движение одного крыла, причем в одном направлении, соответствующем полуобороту кривошипа от π до 2π . В этом случае правое крыло, как и в предыдущей задаче, будет двигаться вверх и, следовательно, полученные формулы будут применимы и для данной установки. Пусть поворот кривошипа задается углом $\varphi = \omega t$. Как и в предыдущей задаче, будем рассматривать безразмерные величины: радиус кривошипа $R = 1$, скорость потока $U = 1$. Остальные параметры, показанные на рис. 3, отнесены к R .

Если δ – максимальные угол отклонения стержня (c), то расстояние между двумя крайними точками крыла $h = 2c \sin \delta$. Из-за соображения статических сил, угол δ не может быть близким $\pi / 2$, поскольку в противном случае горизонтальная сила, действующая на ползунок (b), была бы слишком малой. Здесь предполагается, что $\delta = \pi / 3$. Рассматривая две крайние точки ($\varphi = \pi$ и $\varphi = 2\pi$), определяем расстояние между стойками

$$l = 2(a + b + c - 1). \quad (7)$$

Для данного механизма нетрудно установить связь между ординатой точки, движущейся по вертикальной стойке, и углом поворота кривошипа,

$$y(\varphi) = \sqrt{c^2 - \left(\frac{l}{2} - \cos \varphi - \sqrt{a^2 - \sin^2 \varphi} - b \right)^2}. \quad (8)$$

Отсюда нетрудно найти скорость движения крыла

$$k(\varphi) = \omega dy(\varphi) / d\varphi. \quad (9)$$

Коэффициент вертикальной силы в фиксированный момент вычисляется по формуле (6), поэтому коэффициент работы крыла при движении вверх от 0 до $h/2$ равна интегралу

$$\begin{aligned} C_A &= \\ &= \pi \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \gamma - k \sin \gamma) \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} d\varphi =. \quad (10) \\ &= \frac{\pi}{\omega} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos \gamma - k \sin \gamma) k d\varphi \end{aligned}$$

Коэффициент мощности двухкрыловой установки равна

$$\begin{aligned} C_N &= C_A / T = C_A \omega / \pi = \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} k(\cos \gamma - k \sin \gamma) d\varphi, \quad (11) \end{aligned}$$

где вертикальная скорость $k(\varphi)$ вычисляется по формуле (9) и линейно зависит от угловой скорости ω . Правую часть (11) можно представить в виде параболической функции от угловой скорости

$$\begin{aligned} C_N(\omega) &= \\ &= \frac{\omega h}{2} \cos \gamma - \omega^2 \sin \gamma \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{dy(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 d\varphi. \quad (12) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что мощность, как и в предыдущей задаче, обращается в ноль при $k_0 = \text{ctg} \gamma$

$$\omega_0 = \frac{h \text{ctg} \gamma}{2 \int_{\pi}^{2\pi} (y'(\varphi))^2 d\varphi} \quad (13)$$

и в точке $\omega_1 = \omega_0 / 2$ имеет максимальное значение $C_N^{\max} = C_N(\omega_1)$. Здесь также максимальное значение возрастает с уменьшением угла установки γ . На рис. 4 для четырех значений γ показана зависимость коэффициента $C_N(\omega)$.

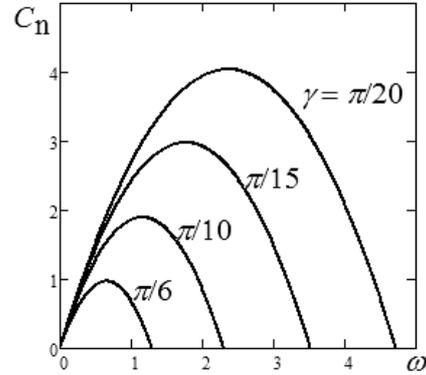


Рисунок 4 - Зависимость коэффициента мощности двухкрыловой установки.

Для сравнения приведем размерную мощность ($N = fU^3 SC_N$) для двухкрыловой установки при тех же условиях, что и для однокрыловой установки. При этом максимальные мощности равны, соответственно, 0,024 кВт, 0,190 мВт и 1,518 мВт. Мощность каждого крыла ниже однокрылого, но для двухкрыловой установки следует удвоить эти величины.

Литература

1. Терентьев А.Г., Терентьев А.А. Двигатель для утилизации энергии текущей среды. Патент № 2341679, 2008
2. Терентьев А.А., Терентьев А.Г. Двигатель для утилизации энергии текущей среды. Патент № 2448271, 2012.
3. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The hydrodynamics of cavitating flows. Back-bone Publishing Company, 2011, 598p.

MODELLING AND CALCULATION OF COOLING OF WATER IN COOLING TOWERS WITH THE FILM-DROP OF IRRIGATOR

Vladimir L. Fedyaev, Evgeny M. Vlasov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences

2/31 Lobachevsky Str., 420111 Kazan, Tatarstan, Russia Federation
vlasovem@mail.ru

Abstract

The solution of questions of energy and resource saving at the undertakings using the circulating systems of technical water supply largely depends on the efficiency of the work of cooling towers. Currently evaporative cooling towers are most widespread what is caused by high efficiency of heat and mass transfer processes proceeding at direct contact of cooled circulating water and atmospheric air. For development of the surface of contact coolants cooling towers are equipped with irrigators (packings) which are typically collected from the smooth plate elements.

This article argues the process of evaporative cooling of flowing down the films of water on vertical plates of irrigator of cooling tower, the drops falling down between them, blown by rising gust of the vapour-aerosol stream. Initially the specificity of the chosen calculation scheme of full mathematical model of system is written and the problems of hydroaerodynamics, heat and mass transfer are formulated in the conjugated statement. Further, due to the characteristic parameters of the work of industrial irrigative cooling towers, features of investigated processes the consecutive simplification of the initial model is produced. As the result, the analytical dependences for calculation of velocities of the film and of the drops of water and of the stream, the change of thickness of the film and radius of the drop, spacing of the drops in the vertical direction, gradient of pressure of the stream, temperature on the surface of the film and of the drops, mean temperature of the films and of the drops of water, distribution of temperature and density of the stream in the cross direction, temperature gradient of cooled water are found. The data of dependences is analyzed and certain regularities are settled.

Received ratios allow to find the optimum geometrical parameters of irrigators and to outline rational modes of the work of cooling towers.

Nomenclature

a	Thermal diffusivity
u	Velocity
α	Heat transfer coefficient
β	Mass transfer coefficient
λ	Thermal conductivity
μ	Dynamic viscosity
ν	Kinematic viscosity
ρ	Density
ρ''	Density of saturated water vapor
Fo	Fourier number
Fr	Froude number
Ko	Kosovich number
Nu	Nusselt number
Pe	Peclet number
Re	Reynolds number
Sh	Schmidt number
Subscripts	
1	Film of water
2	Vapour-aerosol stream
3	Falling drops of water

Introduction

Cooling towers reveal the heat-exchangers, intended for intensive cooling of water in circulating water supply systems of thermal stations and industrial undertakings. During the process of cooling of circulating water in cooling towers the processes of surface evaporation provided by the process of mass exchange and heat transfer of contact is distinguished. The heat rejected by radiation is so small, that it can be neglected [1,2]. In warm season due to evapo-

ration of cooling water transfer in atmospheric air more than 90% of heat, during the work of cooling towers.

Basic heat removal in cooling tower occur in irrigator with the height $h_{op} \sim (1.0 \div 2.0)$ m. Contemporary trends lie in the fact that irrigators of film type more frequently are used. They are set up of plane or gauffed plates, tubes, vertically placed (downstream of atmospheric air), or slightly inclined. In comparison with drop irrigators, main elements of which appear nets in the form of tubes, lists or rolls, film irrigators provide more effective cooling of water. As far as more often is observed in irrigators the types of combination of cooling with the predominance of one of them above, is more correct to refer irrigators above to film-drop and drop-film type respective [3].

1. Problem Definition

For determination let us consider further film-drop tabular irrigator which is set up of vertical parallel each other adiabatic lists with the thickness is $2s$, distance between which is $2s_0$. Reasoning, that vertical plane passing between the plates can be considered a medium plane of vapour-aerosol stream, let us accept as the computational domain, shown on Fig. 1. Vapour-aerosol stream represents a mixture of air and vapour with lugging off with itself small-scale droplets of water which do not intensively influence on aerodynamic of stream and it's thermophysical properties. The begging of square rectangular coordinate system xOy we place on the upper edge of the plate, axis x we direct down along the surface of the plate. Water enters the film through the section $x = 0$,

$0 \leq y \leq \delta_0$; drops – $x = 0$, $\delta_0 < y < s_0$. Upon condition, that the entirety of the film does not damaged, water enters the $x = h_{op}$, $0 \leq y \leq \delta_1$. Through the remained part of the lower section $x = h_{op}$, $\delta_1 \leq y \leq s_0$ vapour-aerosol stream enters the computational space. The force of gravity g operates on water in film, falling drops and stream.

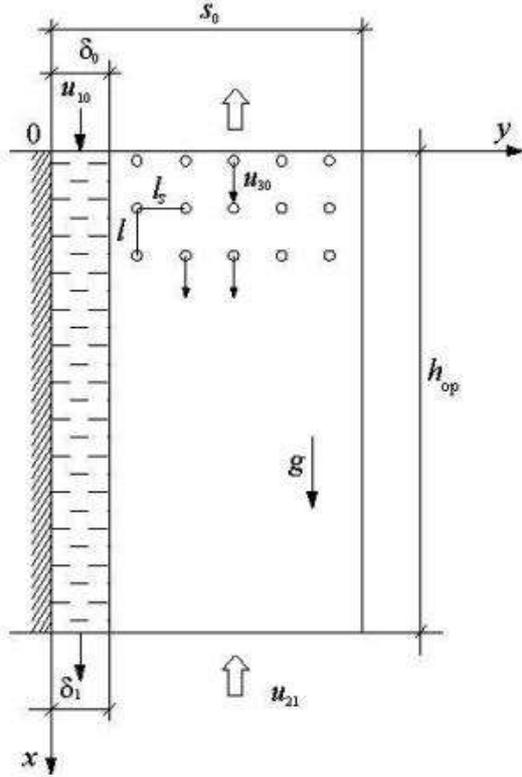


Figure 1 - Computational domain of irrigator

In the entry section of the film the distribution of axial velocity is parabolic and typical for film streaming. The velocity of film at the entrance u_{10} , the temperature of water in this section is equal to the temperature T_{10} of water given to the cooling tower. Water drops enter the interspace between the plates with the velocity u_{30} , the distance between them in the vertical direction $l = l_0$, in horizontal direction l_s . During the fall of the distance between the contiguous drops l changes. It is supposed, that $l_s = const$, mean temperature of water of drops $T_{30} = T_{10}$. Vertical component of velocity of stream at the entrance of interspace between the plates of irrigator – u_{21} , temperature and relative humidity are equal to relevant parameters of atmospheric air $T_{21} = T_a$, $\phi_{21} = \phi_a$. Due to heat and mass transfer with films and water drops the temperature of the stream T_2 increases and it's relative humidity ϕ_2 . The entering vapour from the side of the film and falling water drops momentary and equally extends over the section of the stream and does not bring to cross motion and affects only on it's density.

While calculation the cooling of hydroaerodynamic and thermal problems are interrelated [4–6]. For simplicity of formulation and solution of these problems, we emphasize typical length scales and go over to dimension-

less values. When considering the film of water we accept as the typical length in the direction x height h_{op} , in the direction y thickness δ_0 ; velocity of water \bar{u}_{10} ; pressure \bar{p}_a ; temperature – temperature difference $(T_{10} - T_a)$; coefficients of heat and mass transfer – values $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$ и $\bar{\beta}_1 = \beta_1$ ($\bar{u}_1 = \bar{u}_{10}$, $\bar{u}_2 = \bar{u}_{21}$); velocities of evaporation on the surface of the film – value $\bar{v}_1^* = \bar{\beta}_1 \rho_{\text{hni}}$, $\rho_{\text{hni}} = \rho''(T_{10}) - \phi_a \rho''(T_a)$.

In vapour-aerosol stream typical lengths in axial and cross directions h_{op} , s_0 ; velocity \bar{u}_{21} ; pressure \bar{p}_a ; temperature $(T_{10} - T_a)$; coefficients of heat and mass transfer $\bar{\alpha}_{23} = \alpha_{23}$ и $\bar{\beta}_3 = \beta_3$ ($\bar{u}_2 = \bar{u}_{21}$, $u_3 = \bar{u}_{30}$); velocity of evaporation on the surface of the drop $\bar{v}_3^* = \bar{\beta}_3 \rho_{\text{hni}}$; difference of pressure ρ_{hni} ; pressure of dry atmospheric air ρ_{bc} .

For water drops typical values are: radius of drops r_{30} , velocity \bar{u}_{30} , temperature difference $(T_{10} - T_a)$.

Due to chosen scales we introduce following dimensionless values for water film: coordinates $\xi_1 = x/h_{op}$, $\eta_1 = y/\delta_0$; velocity $U_1 = u_1/\bar{u}_{10}$; pressure $P_1 = p_1/\bar{p}_a$; temperature $\theta_1 = (T_1 - T_a)/(T_{10} - T_a)$; coefficients $A_{12} = \alpha_{12}/\bar{\alpha}_{12}$, $B_1 = \beta_1/\bar{\beta}_1$, $V_1^* = v_1^*/\bar{v}_1^*$.

In vapour-aerosol stream dimensionless coordinates: $\xi_2 = \xi_1$, $\eta_2 = y/s_0$; velocity $U_2 = u_2/\bar{u}_{21}$; pressure $P_2 = p_2/\bar{p}_a$; temperature $\theta_2 = (T_2 - T_a)/(T_{10} - T_a)$; coefficients $A_{23} = \alpha_{23}/\bar{\alpha}_{23}$, $B_3 = \beta_3/\bar{\beta}_3$, $V_3^* = v_3^*/\bar{v}_3^*$; stream density $R_2 = \rho_2/\rho_{\text{bc}}$, vapour $R_{\text{n}} = \rho_{\text{n}}/\rho_{\text{hni}}$, $\rho_{\text{n}} = \phi_2 \rho''(T_2)$.

Dimensionless values for drops of water besides shown above: radial coordinate $\zeta = r/r_{30}$; radius $R_3 = r_3/r_{30}$; velocity $U_3 = u_3/\bar{u}_{30}$; temperature $\theta_3 = (T_3 - T_a)/(T_{10} - T_a)$.

2. Estimations Of Hydroaerodynamic Characteristics Of System

In the beginning we consider the flow of water film. For the sake of simplicity, we suppose, that depending on ξ_1 velocity U_1 changes lineal during all on whole interval $(0 \div 1.0)$, $U_1 = \check{v}(\xi_1) \check{U}_1(\eta_1)$, $\check{v}(\xi_1) = \check{\beta}_0 + \check{\beta}_1 \xi_1$. On this interval we will consider pressure ratio constant, $\partial P_1 / \partial \xi_1 = \bar{P}_{1\xi} = const$, also we consider constant velocity of evaporation of water $V_1^* = \bar{V}_{10}^*$, mean pressure $\bar{R}_2 = \bar{R}_{20}$ and mean velocity of stream $\bar{U}_2 = \bar{U}_2(\xi_2 = 0.5) = \bar{U}_{20}$. As a result we obtain

$$\begin{cases} K_{\delta} \check{v}_0 \frac{d^2 \check{U}_1}{d\eta_1^2} + 1.0 - 0.5 \bar{P}_{1\xi} K_p - Fr_1 \check{v}_0 \check{v}_1 \check{U}_0 = 0, \\ \check{v}_0 \check{U}_0 \frac{d\check{\delta}}{d\xi_1} = \check{h}_{\text{op}} K_{v_1} \bar{V}_{10}^*, \check{\delta}(0) = 1.0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0: \tilde{\beta}_0 \int_0^{1.0} \tilde{U}_1(\eta_1) d\eta_1 = \tilde{\beta}_0 \tilde{U}_0; \\ \eta_1 = 0: \tilde{U}_1 = 0; \\ \eta_1 = \tilde{\delta}: \frac{d\tilde{U}_1}{d\eta_1} = \tilde{E}_0; \\ \xi_1 = 1.0: (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1) \tilde{U}_1 = 1.0 + \tilde{h}_{op} K_{v_1} \tilde{V}_{10}^*. \end{array} \right. \quad (2)$$

Here $K_\delta = \bar{u}_{10} v_1 / g \delta_0^2$; $\tilde{v}_0 = \tilde{v}(\xi_1 = 0.5)$;

$K_p = 2\bar{p}_a / \rho_1 g h_{op}$; $Fr_1 = \bar{u}_{10}^2 / g h_{op}$; $\tilde{v}_1 = \tilde{\beta}_1 \tilde{U}_0$;

$\tilde{\delta} = \delta / \delta_0$; $\tilde{E}_0 = 0.5 K_\zeta \bar{U}_{20}^2$,

$K_\zeta = -\delta_0 (\bar{\rho}_2 / \rho_1) (\bar{u}_{21}^2 / v_1 \bar{u}_{10}) \zeta_n(\bar{U}_2)$, $\bar{\rho}_2 = \rho_2(\xi_2)$,

$\rho_2 = (1.0 - \varepsilon_k) \rho_b + \varepsilon_k \rho_1$, $\varepsilon_k \ll 1.0$ – mean volumetric concentration small-scale droplets of water,

$\zeta_n = \zeta_b \cdot (1.0 + 12\tilde{\delta} \cdot (\rho_1 / \rho_2)^{1/3})$, ζ_b – friction coefficient

in motion of stream along the surface, $\tilde{\delta} = \delta / s_0$;

$\tilde{h}_{op} = h_{op} / \delta_0$; $K_{v_1} = \bar{v}_1^* / \bar{u}_{10}$.

Solution of hydrodynamic problems (1), (2) for the film of water gravitative flowing down the plate of the irrigator will be

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_1(\xi_1, \eta_1) = \eta_1 \cdot (\tilde{E}_0 + \tilde{E}_1 \cdot (\tilde{\delta} - 0.5\eta_1)), \\ \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\xi_1) = 1.0 + \tilde{D}_0 \xi_1. \end{array} \right. \quad (3)$$

Taking $\tilde{v}_0 = 1.0$ и $\tilde{v}_1 = 0$, coefficients

$\tilde{E}_1 = (1.0 - 0.5\bar{P}_{1\xi} K_p) / K_\delta$, $\tilde{D}_0 = \tilde{h}_{op} K_{v_1} \tilde{V}_{10}^*$, solution (3)

for $\tilde{U}_1(\xi_1, \eta_1)$ similar to shown in [7] except for pressure force is taken into account ($\bar{P}_{1\xi} \neq 0$). Expression for $\tilde{\delta}(\xi_1)$ in (3) approximately describes the change of thickness of the film in dependence of coordinate ξ_1 .

Under conditions, that in elevation of irrigator the pressure of the stream changes lineal, also the pressure in cross motion direction in the stream as long as in the flowing down film of water does not change, during the small surface tension mean gradient pressure $\bar{P}_{1\xi} = \bar{P}_{2\xi} = \partial P_2 / \partial \xi_2$ is taken into account.

Using the solution (3) for film velocity $\tilde{U}_1 = U_1$, mentioned expression above for \tilde{E}_1 and \tilde{D}_0 , taking into account, that the thickness of the film $\tilde{\delta}$ close to one, from the equation of mass conservation we find out the adjusted value

$$\tilde{\delta}(\xi_1) = [1.0 + K_\beta (1.0 - \tilde{\delta}_0^2) + K_\gamma \xi_1]^{1/3}. \quad (4)$$

Here $K_\beta = 0.75 \bar{U}_{20}^2 K_\zeta K_\delta / (1.0 - 0.5\bar{P}_{1\xi} K_p)$;

$\tilde{\delta}_0 = (1.0 + K_\gamma \xi_1)^{1/3}$;

$K_\gamma = 3\tilde{h}_{op} \tilde{V}_{10}^* K_{v_1} K_\delta / (1.0 - 0.5\bar{P}_{1\xi} K_p)$.

Ratio analysis (4) shows, that the increase of K_β , friction forces, acting from the side of the stream, also the growth of the coefficient K_γ , characterizing the intense of evaporating of water, brings to decrease of thickness of the film (K_β , K_γ – negative values). When in (4) $\tilde{\delta}_0$ is small,

during the increase of negative pressure gradient $\bar{P}_{1\xi}$ thickness of the film increases. If the pressure gradient is positive ($\bar{P}_{1\xi} > 0$), pressure forces stop the stream, but with the growth of $\bar{P}_{1\xi}$ the thickness of the film decreases. While $\tilde{\delta}_0 \neq 0$, intersection $(-K_\beta \tilde{\delta}_0^2)$ – positive value. Relatively, for negative pressure gradients this sum in (4) while the growth of $\bar{P}_{1\xi}$ decreases, what brings to decrease of $\tilde{\delta}$. While the pressure gradient is positive, with the growth of $\bar{P}_{1\xi}$ the thickness of the film $\tilde{\delta}$ increases, conversely. Last-mentioned agrees to the presentation of effect of pressure forces in the film on it's thickness.

Relatively, mean velocity of water in the film

$$\bar{U}_1(\xi_1) = 0.5\tilde{\delta}(\tilde{E}_0 + 2\tilde{E}_1\tilde{\delta}/3). \quad (5)$$

Motion of water in the film, the stream in the interspace between the plates upon condition that $s_0/h_{op} \ll 1.0$ are similar. Supposing that while $\eta_2 = 1.0$ $\partial U_2 / \partial \eta_2$ is a small value, the stream reveals incompressible, in elevation of the irrigator gradient of the velocity $\partial U_2 / \partial \xi_2 = \bar{U}_{2\xi} = const$, pressure gradient of the stream $\bar{P}_{2\xi} = const$, resisting force of the falling drops is distinguished according to Stock's model, let us write the equation of the change of the stream velocity in cross motion direction

$$\frac{d^2 U_2}{d\eta_2^2} - D_1 U_2 + D_0 = 0; \quad (6)$$

$D_1 = (\bar{U}_{2\xi} + 9\varepsilon_{30} h_{op}^* Fr_2 / \bar{R}_3^2 Re_{23}) / \tilde{K}_\delta$;

$\varepsilon_{30} = 4\pi \tilde{r}_{30}^3 / \tilde{l}_0 \tilde{l}_s^2$, $\tilde{r}_{30} = r_{30} / s_0$, $\tilde{l}_0 = l_0 / s_0$, $\tilde{l}_s = l_s / s_0$;

$h_{op}^* = h_{op} / r_{30}$; $Fr_2 = \bar{u}_{21}^2 / g h_{op}$; \bar{R}_3 – mean by section radius of the drop; $Re_{23} = 2\bar{u}_{21} r_{30} / \bar{v}_2$, $\bar{v}_2 = v_2 + v_T$, v_T – turbulent kinematic viscosity; $\tilde{K}_\delta = \bar{u}_{21} \bar{v}_2 / g s_0^2$;

$D_0 = (1.0 - 0.5\bar{P}_{2\xi} \tilde{K}_p + 9\varepsilon_{30} h_{op}^* \bar{u}_0 Fr_2 / \bar{R}_3^2 Re_{23}) / \tilde{K}_\delta$,

$\bar{u}_0 = \bar{u}_{30} / \bar{u}_{21}$; $\tilde{K}_p = 2\bar{p}_a / \bar{\rho}_2 g h_{op}$.

At the entrance of computational domain ($\xi_2 = 1.0$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_1$)

$$(1.0 - \tilde{\delta}_1)^{-1} \cdot \int_{\tilde{\delta}_1}^{1.0} U_2(\eta_2) d\eta_2 = -1.0. \quad (7)$$

Condition on the surface of the film ($0 \leq \xi_2 \leq 1.0$, $\eta_2 = \tilde{\delta}$) represent in the form

$$\frac{dU_2}{d\eta_2} = 0.5\tilde{K}_\zeta \bar{U}_2^2, \quad (8)$$

where $\tilde{K}_\zeta = -Re_{20} \bar{R}_2 \zeta_n(\bar{U}_2)$; $Re_{20} = \rho_{bc} \bar{u}_{21} s_0 / \bar{\mu}_2$,

$\bar{\mu}_2 = \mu_2 + \mu_T$; \bar{R}_2 – mean density of the stream

Solution of the equation (6) for $U_2(\xi_2, \eta_2)$ will be

$$U_2 = \frac{d_2}{ad} \left(\exp(\sqrt{D_1} \eta_2) + a^2 \exp(-\sqrt{D_1} \eta_2) \right) + \frac{D_0}{D_1}; \quad (9)$$

$d_2 = 0.5\tilde{K}_\zeta \bar{U}_2^2 / \sqrt{D_1}$; $a = \exp(\sqrt{D_1})$; $d = (\varepsilon^2 - a^2) / a\varepsilon$;

$\varepsilon = \exp(\sqrt{D_1} \tilde{\delta})$.

Boundary conditions at the entrance of computational domain ($\xi_2 = 0$) are not used, because in the equation of impulse flexions from U_2 to ξ_2 are excluded. Similar situation took place while solution of hydrodynamic problem of water film.

Mean velocity of the stream in cross section can calculated with the help of solution (9), averaging it by η_2 , or by averaged equation, get while rearranging of the equation (6) taking into account boundary conditions (7), (8). As a result we find out

$$\bar{U}_2(\xi_2) = -(1.0 + \bar{d}_0/\bar{d}_1) \exp(\bar{d}_1(1.0 - \xi_2)) + \bar{d}_0/\bar{d}_1. \quad (10)$$

$$\text{Here } \bar{d}_0/\bar{d}_1 = \left((D_{10} - \tilde{K}_\zeta \bar{U}_2^2 / (1.0 - \tilde{\delta})) / D_{10} \right)_{\xi_2=0.5},$$

$$\bar{d}_1 = (D_{10} \tilde{K}_\delta / \bar{U}_2)_{\xi_2=0.5}, \quad D_{10} = 9 \epsilon_{30} h_{op}^* Fr_2 / \bar{R}_3^2 Re_{23} \tilde{K}_\delta.$$

Relatively, pressure gradient of the stream

$$\bar{P}_{2\xi} = 2(1.0 + \bar{d}_1 \bar{U}_2 \bar{u}_0 - \tilde{\chi} \Omega) / \tilde{K}_p; \quad (11)$$

$$\tilde{\chi} = \tilde{K}_\delta \bar{U}_2; \quad \Omega = \tilde{K}_\zeta \tilde{\chi} / 2(1.0 - \tilde{\delta}) - \bar{d}_1 (\bar{U}_2 + \tilde{\chi}) / (\tilde{\chi} - 1.0);$$

$$\tilde{\chi} = \exp(\bar{d}_1(1.0 - \xi_2)).$$

Further we apply to the flight motion of water drops. Supposing, that drops have spherical form, do not merge and do not divide, moisture exchange of drops is absent, we write a problem:

$$U_3 \frac{dU_3}{d\xi_2} = Fr^* + Re^* (\bar{U}_2 - \bar{u}_0 U_3), \quad (12)$$

$$\xi_2 = 0, \quad 0 \leq \eta_2 \leq 1.0 : U_3 = U_{30};$$

$$U_3 \frac{dR_3}{d\xi_2} = h_{op}^* K_{v_3} V_3^*, \quad R_3(0) = 1.0. \quad (13)$$

$$\text{Here } Fr^* = (1.0 - \tilde{\rho}_c \bar{R}_2) / Fr_3, \quad \tilde{\rho}_c = \rho_{bc} / \rho_1,$$

$$Fr_3 = \bar{u}_{30}^2 / gh_{op}; \quad Re^* = 4.5 \tilde{\rho}_c (u_{23} h_{op}^* / \bar{R}_3)^2 (\bar{R}_2 / Re_{22}),$$

$u_{23}^* = \bar{u}_{21} / \bar{u}_{30}$, $Re_{22} = \bar{u}_{21} h_{op} / \bar{v}_2$; \bar{R}_2 , \bar{R}_3 – relatively, means of density of the stream and radius of drops by height of irrigator.

Changing in (12) U_3 before the derivative on mean free-fall velocity of drops

$$U_3^* = U_{30}^* = 0.94(1.0 + 0.75U_{30}^2), \text{ we find}$$

$$U_3(\xi_2) = U_{30} + (F^* + U_{30} R^*) \xi_2, \quad (14)$$

$$\text{where } F^* = (Fr^* + Re^* \bar{U}_2) / U_{30}^*; \quad R^* = \bar{u}_0 Re^* / U_{30}^*.$$

Evidently, velocity of drops changes depending on coordinate ξ_2 by law, near to lineal.

Solution of the problem (13) for mean in cross motion section radius of drop

$$\bar{R}_3(\xi_2) = 1.0 + \bar{\chi}_3 \xi_2, \quad (15)$$

$$\text{where } \bar{\chi}_3 = (h_{op}^* K_{v_3} \bar{V}_3^* / \bar{U}_3)_{\xi_2=0.5}.$$

Using the results of work [8], solution (14), we find the dependence for definition the distance between the falling contiguous drops in the vertical direction

$$\tilde{l}(\xi_2) = \tilde{l}_0 (1.0 + (F^* + U_{30} R^*) \xi_2 / U_{30}^*); \quad (16)$$

$$\tilde{l} = l / s_0.$$

3. Estimations Of Thermal Characteristics Of System

Having estimates of hydrodynamic, aerodynamic and

kinematic characteristics of the film, of the stream and of the drops, we argue to thermal problems. First we consider the cooling of drops of water. Turning to the case, where the drops are small, flying for a long time, the dependence for temperature on the surface of the drops will be

$$\theta_3^*(\xi_2) = b_1 \bar{\theta}_3 + b_0. \quad (17)$$

$$\text{Here } b_1 = 5/(5 + B), \quad B = Nu_3 A_{23},$$

$Nu_3 = \bar{\alpha}_{23} r_{30} / \bar{\lambda}_3$, $\bar{\lambda}_3$ – effective thermal conductivity of water; $b_0 = (B \bar{\theta}_2 + Ko_3 V_3^*) / (5 + B)$, $\bar{\theta}_2$ – mean temperature of the stream, $Ko_3 = Sh_3 \rho_1 \rho_{ann} \hat{r} D_2 / (\bar{\lambda}_3 (T_{10} - T_a))$,

$Sh_3 = \bar{\beta}_3 r_{30} / D_2$, \hat{r} – undetected heat of evaporation, D_2 – diffusion coefficient of water vapor.

Consider the solution (17) for $\theta_3^*(\xi_2)$, the problem of cooling of drops of water in the rising gust of the stream, falling with mean velocity $U_3 = U_3^*$, using the special piecewise parameterization of temperature profile provided, that $R_3 \approx 1.0$, can be reduced to the problem relatively mean temperature of the drop of water $\bar{\theta}_3$

$$\frac{d\bar{\theta}_3}{d\xi_2} + \bar{a}_1 \bar{\theta}_3 - \bar{a}_0 = 0, \quad \bar{\theta}_3(0) = 1.0, \quad (18)$$

where $\bar{a}_1 = (3K_v^*(b_1 - 1.0)V_3^* + 3B^*b_1/Pe_3)_{\xi_2=0.5}$;

$$K_v^* = h_{op}^* K_{v_3} / U_3^*; \quad K_{v_3} = \bar{v}_3^* / \bar{u}_{30}; \quad B^* = 2h_{op}^* B / U_3^*;$$

$Pe_3 = 2r_{30} \bar{u}_{30} / \bar{a}_3$; \bar{a}_3 – effective thermal diffusivity, taking into account the water circulation in the drop;

$$\bar{a}_0 = (3K_v^*(K_f - b_0)V_3^* - 3B^*(b_0 - \bar{\theta}_2)/Pe_3)_{\xi_2=0.5};$$

$$K_f = 2Ko_3 / K_{v_3} Pe_3.$$

Consider, that $V_3^* = V_3^*(\xi_2 = 0.5) = \tilde{V}_3^*$ – mean velocity of evaporation, the solution of equation (18) will be

$$\bar{\theta}_3(\xi_2) = \exp(-\bar{a}_1 \xi_2) - k_3(1.0 - \exp(-\bar{a}_1 \xi_2)); \quad (19)$$

$$k_3 = \bar{a}_0 / \bar{a}_1.$$

As far as during the fall of drops of water the evaporative cooling is dominant, at the estimation of mean temperature of drops of water at the outlet of irrigator ($\xi_2 = 1.0$) we believe that $B = 0$. Then, for the temperature $\bar{\theta}_3$ we find

$$\bar{\theta}_3(\xi_2) = 1.0 + \bar{a}_0 \xi_2.$$

Thence, the temperature of drops of water at the outlet of irrigator

$$\bar{\theta}_{31} = \bar{\theta}_3(1.0) = 1.0 + \bar{a}_0,$$

temperature gradient of water in drops

$$\Delta \bar{\theta}_3 = \bar{\theta}_3(0) - \bar{\theta}_3(1.0)$$

$$\Delta \bar{\theta}_3 = -3K_v^*(K_f - 0.2Ko_3 \tilde{V}_3^*) \tilde{V}_3^*,$$

value $\Delta \bar{\theta}_3$ – is positive, because $\tilde{V}_3^* < 0$.

After substituting $\bar{\theta}_3$ into (17) we find mean temperature on the surface of the drops

$$\bar{\theta}_3^*(\xi_2) = 1.0 + 0.2Ko_3 \tilde{V}_3^* + \bar{a}_0 \xi_2.$$

It is seen, that the difference $\Delta \theta_3^* = \bar{\theta}_3^* - \bar{\theta}_3 = 0.2Ko_3 \tilde{V}_3^*$ is negative, mean temperature of the drop of water is higher than the temperature of the drop on the surface.

Further, we consider the heating of rising gust of the stream. The thermal problem for the stream is represented as

$$\frac{d^2\theta_2}{d\eta_2^2} - F_1\bar{\theta}_2 + F_0 = 0, \quad (20)$$

on the boundaries of the stream

$$\xi_2 = 1.0: \theta_2 = \theta_{21}; \quad (21)$$

$$\eta_2 = 1.0: d\theta_2/d\eta_2 = 0; \quad (22)$$

$$\eta_2 = \tilde{\delta}(\xi_2): \theta_2 = \theta_1^*, d\theta_2/d\eta_2 = K^*. \quad (23)$$

Here $F_1 = \varepsilon_3^* Nu_{23} A_{23}$,
 $\varepsilon_3^* = 3\varepsilon_3 (h_{op}^*/\tilde{h}_{op}^2 Fo_2 \bar{R}_3 Pe_2)$, $\varepsilon_3 = 4\pi\tilde{r}_3^3/\tilde{l}\tilde{l}_s^2$ – volumetric concentration of falling drops, $\tilde{r}_3 = r_3/s_0$;
 $Nu_{23} = \bar{\alpha}_{23} h_{op}/\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2 + \lambda_T$; $Fo_2 = \bar{a}_2/h_{op}\bar{u}_{21}$,
 $\bar{a}_2 = a_2 + a_T$; $Pe_2 = h_{op}\bar{u}_{21}\rho_2 c_2/\bar{\lambda}_2$; $F_0 = f_1\bar{\theta}_{2\xi} + f_0$,
 $f_0 = \varepsilon_3^* (Nu_{23} A_{23} \bar{\theta}_3^* - Ko_{23} \bar{V}_3^*)$, $f_1 = -\bar{U}_2/\tilde{h}_{op}^2 Fo_2$;
 $Ko_{23} = Sh_{23} \rho_1 \rho_{\text{H}_2O} \hat{r} D_2 / (\bar{\lambda}_2 (T_{10} - T_a))$, $Sh_{23} = \bar{\beta}_3 h_{op}/D_2$;
 $\bar{\theta}_{2\xi} = \partial\theta_2/\partial\xi_2$ – gradient of temperature;
 $\theta_{21} = (T_{21} - T_a)/(T_{10} - T_a)$, $T_{21} \approx T_a$; θ_1^* – temperature on the surface of the film; $K^* = k_1^* \bar{\theta}_2 + k_0^*$,
 $k_1^* = Nu_2 A_{12}$, $Nu_2 = \bar{\alpha}_{12} s_0/\bar{\lambda}_2$; $k_0^* = -Nu_2 A_{12} \theta_1^* + Ko_2 V_1^*$,
 $Ko_2 = Sh_2 \rho_1 \rho_{\text{H}_2O} \hat{r} D_2 / (\bar{\lambda}_2 (T_{10} - T_a))$, $Sh_2 = \bar{\beta}_1 s_0/D_2$.

If in the first approximation $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_{20} = \theta_{21}$ – entry temperature, then the solution of equation (20) with the condition (23) will be

$$\theta_2 = \theta_{02} + \eta_2 (K^* (\bar{\theta}_{20}) + F^* \tilde{\delta} - 0.5 F^* \eta_2), \quad (24)$$

where $F^* = F_0 - F_1 \bar{\theta}_{20}$, $\theta_{02} = \theta_{02}(\xi_2) = \sigma_0 + \sigma_1 (1.0 - \xi_2)$. Coefficients σ_0 , σ_1 are found from the ratio (21), written relatively to the mean temperature where $\xi_2 = 1.0$,

$$(1.0 - \tilde{\delta}_1)^{-1} \cdot \int_{\tilde{\delta}_1}^{1.0} \theta_2(\eta_2) d\eta_2 = \theta_{21}, \quad (25)$$

and the first of condition (23). Respectively,

$$\sigma_0 = \theta_{21} - 0.5 (K^* (1.0 + \tilde{\delta}_1) - 0.33 F^* (1.0 - 2\tilde{\delta}_1 - 2\tilde{\delta}_1^2));$$

$$\sigma_1 = (d/d\xi_2) \cdot (\tilde{\delta} (K^* + 0.5 F^* \tilde{\delta}) - \theta_1^*), \quad \xi_2 = 0.5.$$

Further, let us consider the remaining condition of the symmetry when $\eta_2 = 1.0$. Considering, that $\tilde{\delta}$ – small value, and also the circumstance, that the heating of the stream runs mainly with the help of the convective heat transfer [8], in the values F_0 , K^* members, containing velocities of evaporation can be excluded \bar{V}_3^* , V_1^* . As the result we obtain

$$\frac{d\theta_2}{d\eta_2} \approx -k_1^* (\theta_1^* - \bar{\theta}_{20}) + F_1 (\bar{\theta}_{20} - \bar{\theta}_3^*) - f_1 \bar{\theta}_{2\xi}.$$

The expression on the right side will be a small value when $\theta_1^* \sim \bar{\theta}_{20}$, and small ε_3 , $\bar{\theta}_{2\xi}$.

Thus, the deficiencies of the solution (24) $\theta_2(\xi_2, \eta_2)$ appear, firstly, the fulfillment of approximate condition (23) for temperature θ_2 , thus σ_1 determinates at mean value $\xi_2 = 0.5$; secondly, essentially, not achieving the condition

of symmetry on the boundary $\eta_2 = 1.0$. Nevertheless, the major factors, that influence on the temperature of the stream, are taken into consideration.

As far as the mean temperature of the stream interests us primarily, we rewrite the problem (20)–(23) taking into account (25) relatively $\bar{\theta}_2$:

$$\frac{d\bar{\theta}_2}{d\xi_2} - F_1^* \bar{\theta}_2 / f_1 + f_0^* / f_1 = 0, \bar{\theta}_2(1.0) = \theta_{21}.$$

$$\text{Here } F_1^* = F_1 + k_1^* / (1.0 - \tilde{\delta}),$$

$f_0^* = f_0 - k_0^* / (1.0 - \tilde{\delta})$; parameters F_1^* , f_1 , f_0^* , being functions ξ_2 , are determined, for example, where $\xi_2 = 0.5$. In this case the solution of this problem has the form

$$\bar{\theta}_2(\xi_2) = \left(\theta_{21} - \frac{f_0^*}{F_1^*} \right) \exp\left(\frac{F_1^* (\xi_2 - 1.0)}{f_1} \right) + \frac{f_0^*}{F_1^*}. \quad (26)$$

When F_1^*/f_1 is small

$$\bar{\theta}_2(\xi_2) = \frac{f_0^*}{F_1^*} + \frac{(\theta_{21} F_1^* - f_0^*) (f_1 - F_1^* + F_1^* \xi_2)}{f_1 F_1^*},$$

gradient of temperature $d\bar{\theta}_2/d\xi_2$

$$\bar{\theta}_{2\xi} = (\theta_{21} F_1^* - f_0^*) / f_1.$$

These formulas are interesting by themselves. However, $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_{20}$, $\bar{\theta}_{2\xi}$ can be used as an initial approximation when finding $\theta_2(\xi_2, \eta_2)$.

In determining the density of the stream we confine finding the mean of the density of vapor in the cross direction \bar{R}_n

$$\frac{d\bar{R}_n}{d\xi_2} + \bar{\theta}_1 \bar{R}_n - \bar{\theta}_0 = 0, \bar{R}_n(1.0) = R_{n1};$$

$$\bar{\theta}_0 = ((B_1 \bar{B}_1 R_1^* + B_3 \bar{B}_3 \bar{R}_3^*) / \bar{U}_2)_{\xi_2=0.5};$$

$$\bar{\theta}_1 = ((B_1 \bar{B}_1 + B_3 \bar{B}_3 \bar{R}_3^2) / \bar{U}_2)_{\xi_2=0.5}; \bar{B}_3 = \tilde{h}_{op} \varepsilon_3 (\rho_1 \bar{\beta}_3 / \bar{u}_{21});$$

$$\bar{B}_1 = \tilde{h}_{op} (1.0 - \tilde{\delta})^{-1} (\rho_1 \bar{\beta}_1 / \bar{u}_{21}); R_1^* = R_1^*(\theta_1^*) = \rho_1^* / \rho_{\text{H}_2O},$$

$$\rho_1^* = \rho^*(T_1^*); \bar{R}_3^* = \bar{R}_3^*(\bar{\theta}_3^*) = \rho_3^* / \rho_{\text{H}_2O},$$

$$\rho_3^* = \rho^*(T_3^*); T_1^*, T_3^*$$

– respectively, temperatures on the surface of the film and of the drops of water; $R_{n1} = \rho_{n1} / \rho_{\text{H}_2O}$, $\rho_{n1} = \varphi_{21} \rho^*(T_{21})$.

The solution for the mean density of the stream in the cross direction

$$\bar{R}_2(\xi_2) = (1.0 - \varepsilon_k) (1.0 + \bar{R}_n(\xi_2) / \rho_c^*) + \varepsilon_k / \bar{\rho}_c, \quad (27)$$

where $\bar{R}_n(\xi_2) = (\bar{R}_{n1} - \bar{\theta}_0 / \bar{\theta}_1) \exp(\bar{\theta}_1 (1.0 - \xi_2)) + \bar{\theta}_0 / \bar{\theta}_1$,

$$\rho_c^* = \rho_{bc} / \rho_{\text{H}_2O}.$$

If $\bar{\theta}_1$ – small, then

$$\bar{R}_n(\xi_2) = \bar{\theta}_0 / \bar{\theta}_1 + (\bar{R}_{n1} \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0) (1.0 + \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_1 \xi_2) / \bar{\theta}_1,$$

mean density of the vapor on the outlet of irrigator

$$\bar{R}_{n0} = \bar{R}_n(0) = \bar{R}_{n1} - (\bar{\theta}_0 - \bar{R}_{n1} \bar{\theta}_1);$$

the difference of densities $\Delta \bar{R}_n = \bar{R}_{n0} - \bar{R}_{n1}$

$$\Delta \bar{R}_n = \bar{R}_{n1} \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_0 > 0,$$

value $\Delta \bar{R}_n$ – positive, because $\bar{U}_2 < 0$. Respectively, the density of water vapor during the movement of the stream

through the irrigator increases.

When considering the flowing down film of water we confine the research of only the mean temperature of water $\bar{\theta}_1$. When $\partial^2 \theta_1 / \partial \xi_1^2 = 0$, taking into consideration the circumstances on free surface ($0 \leq \xi_1 \leq 1.0$, $\eta_1 = \bar{\delta}$) $\theta_1 = \theta_1^*$, $-\partial \theta_1 / \partial \eta_1 = Nu_1 A_{12} (\theta_1^* - \bar{\theta}_2) - Ko_1 V_1^*$, also that, the mean temperature $\bar{\theta}_1$ and the temperature on the surface of the film θ_1^* during the parabolic parameterization of the temperature in cross direction are connected with correlation

$$\theta_1^*(\xi_1) = (\bar{\theta}_1 + \bar{\tau}_0) / \bar{\tau}_1, \quad (28)$$

the thermal problem for film of water is written as

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\xi_1} - \bar{G}(\xi_1) = 0, \bar{\theta}_1(0) = 1.0;$$

$$\begin{aligned} \bar{G}(\xi_1) &= -\bar{g}_1 \bar{\theta}_1 + \bar{g}_0, \bar{g}_1 = (\bar{h}_{op}^2 Fo_1 / \bar{\delta}_0 \bar{U}_1) (Nu_1 A_{12} / \bar{\tau}_1), \\ \bar{g}_0 &= (\bar{h}_{op}^2 Fo_1 / \bar{\delta}_0 \bar{U}_1) (Ko_1 V_1^* + Nu_1 A_{12} (\bar{\theta}_2 - \bar{\tau}_0 / \bar{\tau}_1)), \\ \bar{\tau}_0 &= \bar{\delta}_0 (Ko_1 V_1^* + Nu_1 A_{12} \bar{\theta}_2) / 3, \bar{\tau}_1 = 1.0 + (\bar{\delta}_0 Nu_1 A_{12} / 3). \end{aligned}$$

Supposing that $\bar{G} = \bar{g}_1 = \bar{g}_1(\xi_1 = 0.5)$, $\bar{g}_0 = \bar{g}_0(\xi_1 = 0.5)$ – mean parameters throughout the height of the irrigator, we will find the solution of this problem

$$\bar{\theta}_1(\xi_1) = (1.0 - \bar{g}_0 / \bar{g}_1) \exp(-\bar{g}_1 \xi_1) + \bar{g}_0 / \bar{g}_1. \quad (29)$$

When \bar{g}_1 is small

$$\bar{\theta}_1(\xi_1) = \bar{g}_0 / \bar{g}_1 + (\bar{g}_1 - \bar{g}_0)(1.0 - \bar{g}_1 \xi_1) / \bar{g}_1,$$

mean temperature of cooled water in the film

$$\bar{\theta}_{11} = \bar{\theta}_1(1.0) = 1.0 + \bar{g}_0 - \bar{g}_1.$$

However, considering that the cooling of water essentially is evaporating, then in \bar{g}_0 , \bar{g}_1 it is conceivable that $Nu_1 = 0$. Then mean temperature of water in the film at the outlet of irrigator is

$$\bar{\theta}_{11} = 1.0 - \Delta \bar{\theta}_1,$$

temperature gradient of water $\Delta \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(0) - \bar{\theta}_1(1.0)$

$$\Delta \bar{\theta}_1 = -(\bar{h}_{op}^2 Fo_1 Ko_1 V_1^* / \bar{\delta}_0 \bar{U}_1)_{\xi_1=0.5}.$$

Value $\Delta \bar{\theta}_1 > 0$, as far as $V_1^* < 0$.

Taking into consideration that volumetric water flow, transmitting through the cross section of irrigator with the square S_0 , amounts to G_{*k} , water divides equally, we will find the flow of water entering the films $G_1 = q_{*k} S_0 (s + \bar{\delta}_0) / (s + s_0)$ (q_{*k} – water concentration); water, inflowing in the form of drops into the interspace between the films, $G_3 = G_{*k} - G_1$, temperature gradient of cooling water

$$\Delta t = T_{10} - \tilde{T}, \quad (30)$$

where $\tilde{T} = T_a + \tilde{\theta}(T_{10} - T_a)$ – dimensional mean of tem-

perature of cooled water, $\tilde{\theta} = (G_1 \bar{\theta}_{11} + G_3 \bar{\theta}_{31}) / G_{*k}$.

The approach presented above, received correlations can be extended to tubular irrigators when the tubes are vertically placed.

Conclusion

The differential peculiarity of represented mathematical formulation of evaporative cooling of water appears, that it is connected with thermohydroaerodynamical processes, proceeding in cooling towers. Respectively, current model appears a direct model of the work of irrigative cooling towers. Three dedicated constituents of the considered system are in conditions of mechanical and heat interactions, respectively, when estimating their characteristics their interference is taken into consideration. However, in full scale phase transformations deriving on the surface of the films and of the drops are taken into consideration.

Found analytical dependences let to select optimal parameters of the irrigator – the height, the sizes of the slot between the plates, to dedicate rational technological operational modes of the work of cooling towers.

Acknowledgments

Work performed under the Federal Program "Scientific and scientific-pedagogical personnel of innovative Russia" for 2009–2013 (state contract № 14.V37.21.0644).

References

8. Berman L.D. Evaporating cooling of circulating water. M.: Gosenergoizdat, 1957, 320 p.
9. Ponomarenko V.S., Arefev Yu.I. Cooling towers of industrial and energetic enterprises: Reference manual / Edited by V.S. Ponomarenko. M.: Energoatomizdat, 1998, 376 p.
10. Gelfand R.E., Sverdlin B.L., Shishov V.I. Coefficients of heat and mass transfer of current-technology sprinklers for process computations of cooling towers // Elektricheskie stancii. Energoprogres. 2006. №2. P. 24–31.
11. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase flows. Part.II. M.: Nauka, 1987, 360 p.
12. Petrushik A.I., Fisenko S.P. Mathematical modeling of evaporative cooling of water films in water-cooling towers // Journal of engineering physics and thermophysics. 1999. Vol.72. №1. P. 43–49.
13. Petrushik A.I., Solodukhin A.D., Fisenko S.P. Simulation of cooling of water droplet and film flows in large natural wet cooling towers // Journal of engineering physics and thermophysics. 2001. Vol.74. №1. P. 45–49.
14. Isaev S.I., Kozhinov I.A., Kofanov V.I. Theory of heat and mass transfer / Edited by A.I. Leont'eva. M.: Vysshaya shkola, 1979, 495 p.
15. Mazo A.B. Heat transfer with evaporation of the fall of drops in the rising stream of air // Research in applied mathematics. Kazan: KMS, 1997, Issue 22, P. 91–106.

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО НАПЫЛЕНИЯ В СУДОСТРОЕНИИ

Архипов В.Е., Лондарский А.Ф., Москвитин Г.В., Пугачёв М.С.

ИМАШ РАН

101990, г. Москва, Малый Харитоньевский переулок, дом 4
gvmoskvitin@yandex.ru

Аннотация

Представлено обоснование механизма формирования свойств меди, никеля и цинка в зависимости от параметров газодинамического напыления. Показана возможность нанесения меди твёрдостью до 1500 МПа при прочности сцепления со сталью до 50 МПа. При этом коэффициент трения скольжения напылённой меди по стали ШХ15 составляет 0,07-0,08, что может с учётом остальных свойств покрытия обеспечить повышение сопротивления износу деталей в парах трения скольжения машин и механизмов. Структура покрытия никеля состоит из частиц измельчённого исходного зерна (блоков мозаики) размером 105 нм, что при твёрдости до 2800 МПа может обеспечить повышение ресурса поверхности при воздействии коррозионной среды и высокой температуры. Покрытие цинка позволяет повысить сопротивление разрушению низкоуглеродистой стали 20 под воздействием коррозионной среды до 40 раз.

Требования Правил Технической эксплуатации регламентируют техническое обслуживание и ремонт судовых технических средств (СТС), а также механизмов, к которым относят электрооборудование, насосы разнообразного назначения и действия, компрессоры, рулевые машины и т.д. В период эксплуатации под воздействием нагрузок и коррозионной среды отдельные узлы и детали могут преждевременно выйти из строя. Для повышения надёжности и ресурса судовых машин и механизмов используют современные научные и технические достижения, которые позволяют модифицировать поверхность и обеспечить повышение ресурса используемых материалов, металлов и сплавов. К одному из современных и наиболее перспективных способов изменения свойств поверхности можно отнести газодинамическое напыление покрытий разного назначения. К основным преимуществам способа можно отнести возможность нанесения меди, никеля, цинка и других металлов на локальные участки поверхности детали или конструкции, а также минимальный разогрев подложки, в результате чего не происходит изменение свойств и геометрии изделия.

В докладе представлены результаты исследования структуры и свойств меди, никеля и цинка, нанесённых на поверхность стали с использованием газодинамического напыления. При проведении экспериментов использовалась газодинамическая установка российского производства «ДИ-МЕТ-404» и порошки, состоящие из механической смеси твёрдых (Al_2O_3) и пластичных частиц (Cu, Ni, Zn) [1].

Исследование меди, нанесённой на поверхность стали 40Х при постоянной скорости перемещения образца (10^{-2} м/сек) с расстояния от сопла до поверхности - 10^{-2} м и расходе порошковой смеси - $0,4 \times 10^{-3}$ кг/сек, показало наличие зависимости твёрдости покрытия от температуры напыления.

В процессе нанесения покрытия при возрастании температуры нагрева воздуха твёрдость меди существенно повышалась с 480 МПа при напылении с температурой 180°C до 980 МПа при напылении с температурой 540°C (рис. 1).

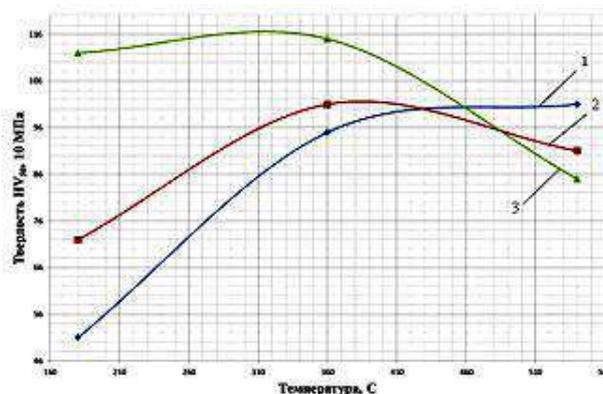


Рисунок 1 - Зависимость твёрдости меди от температуры напыления при разном количестве проходов:
1 - один проход, 2 - три прохода; 3 - пять проходов.

Однако с увеличением времени напыления (три и, особенно, пять проходов) зависимость твёрдости меди от температуры напыления приобретала несколько другой характер. Так, при использовании температуры потока воздуха 180°C, твёрдость меди значительно возрастала и достигала 1117 МПа. Так как скорость и энергия частиц не менялись при постоянной температуре напыления, то повышение твёрдости может быть обусловлено только увеличением времени обработки и количества соударений корунда с частицами меди и её наклёпом.

Аналогичная, но не столь существенная тенденция повышения твёрдости меди при возрастании времени обработки наблюдалась при напылении с температурой $\approx 360^\circ\text{C}$. Однако, дальнейшее

повышение температуры напыления до $\approx 540^\circ\text{C}$ приводило к снижению твёрдости меди. При этом снижение твёрдости более существенно при увеличении числа проходов поверхности образца под соплом (времени напыления).

Исследование остаточного удельного электрического сопротивления нанесённой меди позволило установить, что на её свойства оказывали влияния два фактора, а именно деформация частиц и тепловое воздействие потока воздуха [2, 3]. При использовании низкой температуры напыления ($\leq 300^\circ\text{C}$) к основному фактору формирования свойств можно отнести деформацию твёрдыми частицами пластичных и их наклёп. При более высокой температуре напыления ($\geq 400^\circ\text{C}$) на свойства формируемого покрытия оказывало влияние не только деформация твёрдыми частицами пластичных частиц, но и нагрев меди потоком воздуха.

В структуре меди наблюдались дефекты (поры), которые, в основном, имели размер порядка $10\text{-}20 \times 10^{-6}$ м. Причём, как правило, эти микропоры имели больший размер в направлении параллельном поверхности. Механизм их формирования можно объяснить статистически неравномерным воздействием частиц корунда на медь и, как следствие, недостаточно регулярным уплотнением покрытия по объёму [3]. Объём микропор составлял порядка 4-8 %. При этом они могут осуществлять функцию масляных карманов при работе пар трения в условиях смазки.

Аналогичные зависимости твёрдости были получены при изменении расхода порошка, скорости перемещения сопла относительно поверхности и расстояния от среза сопла до поверхности. Максимальная твёрдость ≈ 1300 МПа, отмеченная при расходе порошка $0,18 \times 10^{-3}$ кг/сек, соответствовала твёрдости латуни, которая имела степень деформации от 30 % до 50 % [4].

Прочность сцепления меди с подложкой из стали существенно зависит от температуры напыления и состояния поверхности. При повышении температуры напыления с 180°C до 540°C прочность сцепления возрастала в 6 раз и достигала 23,7 МПа (табл. 1).

Таблица 1 - Величина адгезии меди на стали

Подготовка поверхности	Адгезия, МПа		
	Температура напыления, $^\circ\text{C}$		
	180	360	540
Без обработки корундом	3,9	18,7	23,7
Обработка корундом	16,9	25,8	48,6

В случае предварительной подготовки поверхности к напылению, которая заключалась в обработке поверхности корундом, адгезия меди на стали значительно возрастала. При напылении с температурой 180°C прочность сцепления составляла 16,9 МПа, то есть в 4 раза превосходила значения, полученные на образцах без подготовки поверхности. А напыление меди с температурой 540°C позволяла повысить эту важную характери-

стику практически до 48,6 МПа. Такую величину прочности сцепления покрытия со сталью можно обеспечить только с использованием нанесения покрытий плазменным напылением или металлизацией [5, 6].

Предварительная обработка корундом оказывала положительное влияние на величину адгезии не только на образцах, которые имели низкую твёрдость, но и термически обработанных на 45-47 HRC. На термически обработанных образцах величина адгезии меди, нанесённой при 180°C составляла 5,37 МПа, что достаточно близко к значению, полученному на сырых образцах (3,9 МПа).

После обработки корундом поверхности подложки прочность сцепления возросла в 2,5 раза и составила 14,2 МПа, что так же достаточно близко к результатам, полученным на сырых образцах (16,9 МПа). Таким образом, можно утверждать, что термическая обработка стали не оказывает существенного влияния на величину адгезии меди, нанесённой при равных температурах.

В зависимости от интенсивности и направления отвода тепла в слое меди могут формироваться окружные остаточные напряжения растяжения, которые оказывают влияние на адгезию покрытия [6]. Поэтому механическая обработка поверхности с устранением 25-50 % толщины нанесённого слоя позволила повысить прочность сцепления в 1,5 раза и довести этот важный параметр до ≈ 50 МПа при напылении с температурой потока воздуха 450°C (рис.2).

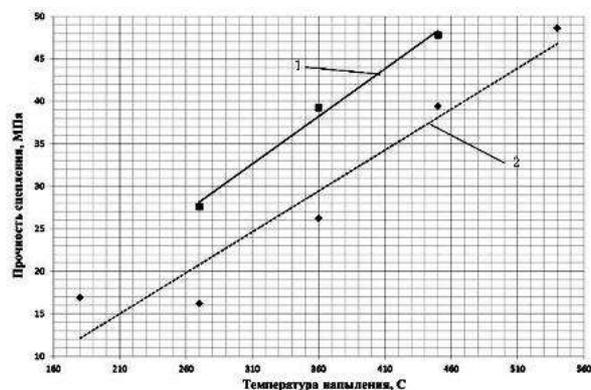


Рисунок 2 - Изменение адгезии в зависимости от температуры напыления:
1 – устранение 40% толщины покрытия;
2 – чистовая обработка поверхности.

Толщина меди зависит от температуры и времени напыления, а также расхода порошка и может достигать 3×10^{-3} м и более, что вполне достаточно для решения ряда технологических задач, например создания опорных поверхностей трения скольжения.

Исследование триботехнических характеристик поверхности проводилось на трибометре TRB-S-DE Швейцарской фирмы CSM Instruments по схеме палец – диск [7]. Медь напылялась на поверхность диска при температуре 270°C и 450°C и обрабатывалась до 8 класса чистоты. Твёрдость покрытия меди на образцах из стали, измеренная

методом Вика, составляла 1610 МПа и 1500 МПа соответственно. Образец из стали с медным покрытием устанавливался в ёмкость с моторным маслом М-10Г2к и испытания проводились в диапазоне нагрузок 0,2-5,8 кг при скорости вращения диска 1 м/сек. В качестве контртела (пальца) использовался шарик диаметром 6×10^{-3} м, изготовленный из стали ШХ15. Расчёт контактных нагрузок сопряжённой пары, проведённый с использованием теории Г. Герца показал, что они находятся в диапазоне 11,8-62,2 МПа.

Для меди, нанесённой при более низкой температуре, коэффициент трения имеет тенденцию к возрастанию до уровня 0,085-0,09 в значительном интервале диапазона нагрузок. При этом, после завершения испытаний на образце не были заметны следы воздействия (износа), а у контртела (шарика) наблюдалось пятно контакта диаметром 900×10^{-6} м.

У образца с покрытием меди, нанесённом при 450°C, коэффициент трения наоборот имел тенденцию к снижению от первоначального значения и сохранению его на уровне 0,075-0,08 (рис. 3). Визуальный осмотр поверхностей трения позволил выявить на поверхности меди следы воздействия контртела, а поверхность шарика осталась неповреждённой.

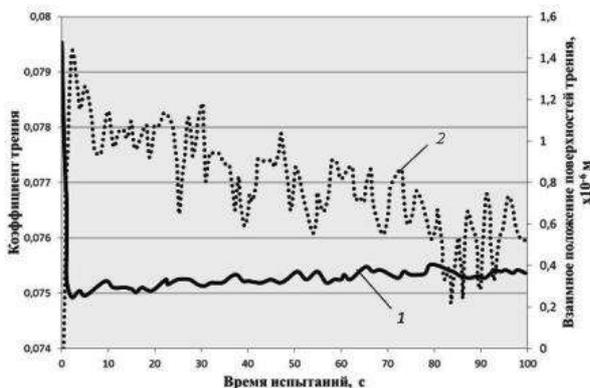


Рисунок 3 - Результаты испытания меди, нанесённой при 450°C при удельной нагрузке 49,9 МПа:
1 – коэффициент трения,
2 – положение поверхности пар трения.

На основании предварительных результатов можно отметить, что медь, нанесённая газодинамическим напылением, имеет высокую твёрдость, необходимую пористость и невысокий коэффициент трения и может быть использована для повышения ресурса поверхностей трения скольжения.

Механизм формирования свойств никеля также основан на деформации пластичных частиц твёрдыми частицами и их наклёпе. Рентгеноструктурный анализ показал, что покрытие, нанесённое с использованием разных температур, состоит только из никеля без примесей каких – либо частиц. При деформации пластичных частиц твёрдыми исходное зерно никеля раздробилось на фрагменты (блоки мозаики) размером порядка 105 нм (ОКР, табл. 2), что может оказать положительное влияние на повышение сопротивления износу поверхности.

При определённых технологических режимах напыления твёрдость никеля может достигать 2800 МПа при толщине покрытия до 500×10^{-6} м и более. Предварительные испытания покрытия никеля на трибометре TRB-S-DE при погружении в масле показали, что коэффициент трения находится в пределах 0,04-0,06 в широком диапазоне нагрузок.

Таблица 2

Образец	Параметр решетки [ангстрем]	Размер ОКР, D [нм]	Микронапряжения, ε
1-360 °C	3,5255±0,0001	103±3	0,47±0,02
2-450 °C	3,5256±0,0001	105±3	0,50±0,02
3-540 °C	3,5254±0,0001	106±3	0,50±0,02

Сопротивление разрушению под воздействием коррозии оценивалось по методике ускоренных испытаний при полном погружении образцов из стали 20 с покрытием никеля в электролит, в качестве которого использовался 3% раствор хлористого натрия [8]. При проведении исследований в качестве эталона сопротивления коррозии была выбрана аустенитная нержавеющая сталь 08X18Н10Т.

Испытания, которые продолжались 2016 часов (12 недель) показали, что скорость коррозии образцов, покрытых никелем, меньше почти в 2 раза, чем у стали 20 (табл. 3). Последующая механическая обработка нанесённого покрытия никеля до получения чистой поверхности сопровождалась незначительным улучшением сопротивления воздействию коррозионной среды.

Таблица 3

Скорость коррозии, кг/м ² год×10 ⁻¹⁵			
Сталь 20	Сталь 20 с покрытием никеля	Сталь 20 с покрытием никеля и обработкой шкуркой	Сталь 08X18Н10Т
27,3	14,3	20,0	0,11

На основании полученных результатов можно отметить, что никель, нанесённый на поверхность стали газодинамическим напылением, имеет высокую твёрдость, низкий коэффициент трения и может быть использован для повышения ресурса изделий, включая узлы трения в условиях воздействия коррозионной среды и повышенной температуры.

Толщина покрытия цинка зависит от расхода порошка, температуры и времени напыления и может быть получена достаточной величины (до 500×10^{-6} м и более) для реализации любых технологических задач. При этом твёрдость цинка составляет 600 МПа, что даёт возможность использовать покрытие в условиях воздействия коррозионно-абразивной среды.

Коррозионные потери массы образцов, изготовленных из стали 20, к концу испытаний (2016 часов) достигали 120×10^{-15} кг/м² (рис.4). У образцов

из стали 20 с покрытием цинка коррозионные потери массы за аналогичный период испытаний составили $2,8 \times 10^{-15}$ кг/м², то есть в 15 раз меньше.

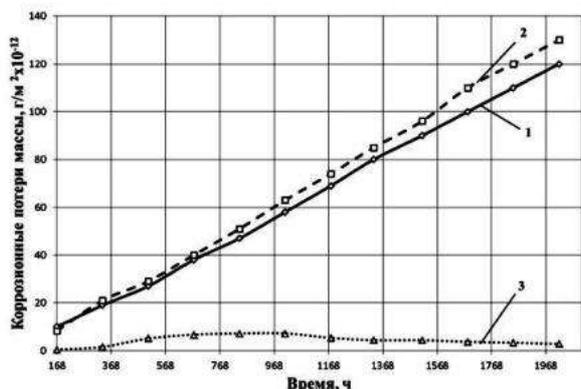


Рисунок 4 - Зависимость потери массы от времени испытания:

1 - сталь 20, 2 - сталь 20 после обработки корундом, 3 - сталь 20 с покрытием цинком

Нанесение покрытия цинка на сталь 20 позволило снизить скорость коррозии низкоуглеродистой стали более, чем в 40 раз и довести её до уровня, близкого к сопротивлению коррозии высоколегированной стали 08X18H10T (табл.4). Если экстраполировать кинетику изменения коррозионных потерь масс на более продолжительный период испытаний, то нельзя исключать того, что скорость коррозии образцов с покрытием цинка и образцов из нержавеющей стали будут одинаковыми.

Таблица 4

Скорость коррозии, кг/м ² год × 10 ⁻¹⁵		
Сталь 20	Сталь 20 с покрытием цинка	Сталь 08X18H10T
27,3	0,63	0,11

Выводы

1. Газодинамическое напыление меди, никеля, цинка можно использовать для повышения ресурса деталей и изделий, работающих под воздействием нагрузки и коррозионной среды.

2. Покрытие меди может иметь твёрдость до 1600 МПа, прочность сцепления со сталью до 50 МПа, удельное электрическое сопротивление до 0,34 Ом/мм²·м и коэффициент трения 0,07-0,08, что позволит его использовать для повышения ресурса

узлов и механизмов изделий электротехнического назначения.

3. Твёрдость покрытия никеля может достигать 2800 МПа, что в совокупности с достаточно низким коэффициентом трения (0,04-0,06) и способностью противодействовать воздействию коррозии может обеспечить повышение ресурса машин и механизмов, изготовленных из низколегированных сталей, которые эксплуатируются в условиях коррозионной среды и высокой температуры.

4. Газодинамическое напыление цинка на поверхность низкоуглеродистой стали позволит снизить скорость коррозии до 40 раз, что при твёрдости покрытия до 600 МПа позволит повысить ресурс изделий, подверженных воздействию коррозионно-абразивной среды.

Литература

1. Димет. Применение технологии и оборудования: [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.dimet-r.narod.ru.
2. Архипов В.Е., Лондарский А.Ф., Мельшанов А.Ф., Москвитин Г.В. Свойства медных покрытий нанесённых газодинамическим напылением. Упрочняющие технологии и покрытия, 2011, №9. – С.17-23.
3. Металлообработка, №2 (68), 2012, С.13-17. «Нанесение медных покрытий на сталь газодинамическим напылением». Архипов В.Е., Лондарский А.Ф., Мельшанов А.Ф., Москвитин Г.В., Пугачёв М.С.
4. ГОСТ 15527-2004 Сплавы медно-цинковые (латуни), обрабатываемые давлением. Марки.
5. Технология машиностроения, №12, 2011, С.42-46. «Комбинированное упрочнение газодинамической обработкой». Архипов В.Е., Лондарский А.Ф., Мельшанов А.Ф., Москвитин Г.В., Пугачёв М.С.
6. Вестник машиностроения, №8, 2012, С.48-51. «Повышение качества газодинамических покрытий». Архипов В.Е., Балашова А.В., Лондарский А.Ф., Москвитин Г.В., Пугачёв М.С.
6. ГОСТ 30480-97 Методы испытаний на износостойкость. Общие требования.
7. Фокин М.Н., Жигалова К.А. Методы коррозионных испытаний металлов. М.: Металлургия, 1986, 80с.

STUDY OF TWO AUTO-OSCILLATORY REGIMES OCCURRING WHEN A ZONE WITH PRESSURE HIGHER THAN EXTERNAL IS CREATED BY MEANS OF JET VEIL

Ivan I. Kozlov, Sergey A. Ocheretyany, Vladislav V. Prokof'ev

Institute of mechanics of the Moscow State University

119192, Moscow, Michurinsky st. 1

Abstract

We present an experimental study of flow regimes that occur when a high-pressure air cushion is created by means of a liquid jet veil. Previously, it was shown that in the near-critical regime (here we define critical as the ultimate limit regime of jet joining to the screen without the return of the jet) there is an unsteadiness associated with development of the Rayleigh-Taylor waves on concave edge of the cavity. Creation of jet veil with supercritical air blowing is accompanied by auto-oscillatory modes of the jet discharge. It was found that the previously studied low-frequency mode exists in a certain range of rates of blowing into the cavity, with this range depending on volume of the cavity and velocity of the jet. It is shown that this mode is replaced by a high-frequency auto-oscillatory regime with low amplitude, and in some transition zone of blow rates both modes are simultaneously presented (there is an intermittency). Video recording of the high-frequency regime has shown that unlike in the low-frequency mode there is no direct interaction between the out flowing jet with the channel wall. We found that in investigated range of parameters characteristics of the oscillations do not depend on thickness of the cushion, but the thickness does affect transition from low-frequency to high-frequency regime. Relative intensity of pressure fluctuations in the cavity strongly depends on velocity of the jet (there is a large "scale effect"). In the high-frequency mode the scale effect is much weaker. It was found that the range of air blowing rates, at which there is a low-frequency mode, is highly dependent on volume of the cavity. Moreover, there is a threshold volume of the cavity (which depends on velocity of the jet) for which at any air blowing rate, the low-frequency mode does not appear.

Nomenclature

Below is list of variables we will be using for the rest of the article:

$P_k = p_k - p_a, P_0 = p_0 - p_a (p_k, p_0, p_a)$ - average pressure in the cavity, the pressure of the water flow and atmospheric pressure, respectively),

A - Average range of pressure fluctuations in the cavity for the measurement period

$$\bar{A} = A/P_0$$

D, H - the width of the nozzle and the channel width,

f - the frequency of oscillation,

h - the gap between the plates (9 mm),

$V_\infty = \sqrt{2P_0/\rho}$ characteristic velocity of the jet,

Q_g - volumetric flow rate of gas in the cavity of the blower,

Q_l - the average flow rate of water,

$C_d = P_k / P_0$ - the coefficient of the pressure in the cavity (factor of base pressure),

$C_q = Q_g / Q_l$ - factor of carry-over of gas (or blown air),

$St = fD / V_\infty$ - the Strouhal number,

Ω_k - the volume of the cavity,

$C_k = \Omega_k / DHh$ - the relative volume of the cavity,

$K_p = Q_l / (DhV_\infty)$ - flow rate coefficient

Introduction

The Institute of Mechanics, MSU conducted experimental studies of transverse fluid jet discharging in a plane channel with ventilated cavity at pressure higher than external. In this setup, we model a flow with formation of artificial cavity with a negative cavitation number, which is characterized by the presence of a concave, unstable in Rayleigh-Taylor sense, boundary. We have previously noted [1] that in addition to the supercritical jet unsteadiness associated with the development of the Rayleigh-Taylor waves [2], the flow may develop substantially unsteady self-oscillating form. For oscillatory modes plane (2D) experimental facility is a good way to model the problem of a high pressure chamber (air bag) bounded by jet curtain as shown in Fig. 1.

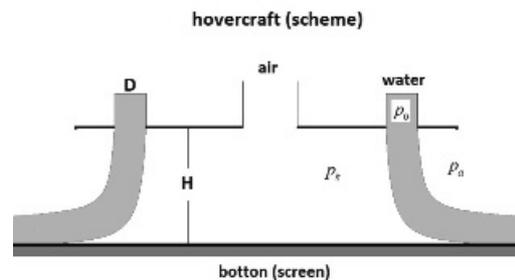


Figure 1 - Scheme to create an air cushion bounded by liquid jet curtains

In this experiment, half of Fig. 1 flow was investigated taking advantage of the symmetry. The experimental setup has 2 transparent side walls (with a gap of 5 or 9 mm). Fig. 2 show a photo of the flow obtained

through the transparent side wall. Unlike scheme Fig. 1 on experiment (Fig. 2) the stream is directed up. It has no strong impact on a current as far as acceleration of particles of liquid is much more than gravity acceleration g (that is Froude's numbers are great - for example, at small difference of pressure $P_0 = 0.02$ MPa and maximum channel width in experimental $H = 70$ mm centrifugal acceleration is equal to 51).

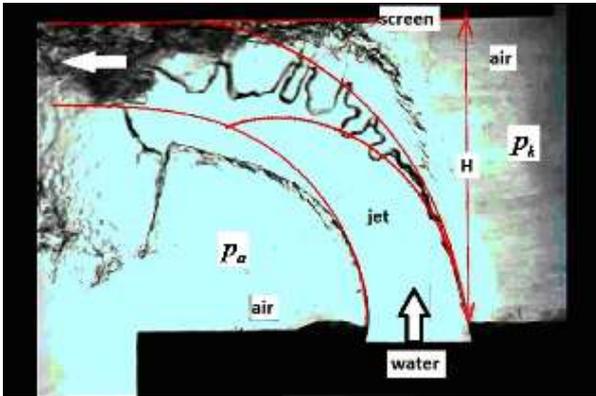


Figure 2 - Flow photo through the transparent side wall

The stream of water flows out of the nozzle straight up, on the right there is a cavity with high air pressure, on the left there is an outflow of liquid and gas into the atmosphere. On Fig. 2 we show a near-critical flow regime, when the oscillations are absent.

The solid lines represent the theoretical boundary of the jet. On jet's right boundary waves (Rayleigh-Taylor structures) are formed, which are responsible for discharge of air from the cavity [2].

For Fig. 2 flow configuration (we consider only liquid jet discharging perpendicular to the screen), the coefficient of gas discharge at the critical mode approximately equals to 1 (see [3]). A further increase in pressure in the cavity (increase C_d) leads to rapid growth of air injection (C_q). In the theoretical solution at the supercritical C_q the jet ceases to interact with the screen. Practically, one more mechanism of entrainment of gas emerges: gas flow along the screen. With the increase of blowing of air at some point the flow becomes unsteady - self-oscillatory. It was found that the threshold at which oscillations start to develop, is heavily dependent on the volume of the cavity. Therefore, in the experiment it was important to eliminate the influence of the air supply system volume, this was achieved by means of a tap installed at the entrance to the working area with the flow at the tap in critical mode (locked tap). This ensured the constancy of air mass flow to the cavity. In the oscillatory regime the pressure fluctuations occur not only in the cavity, but also in the water line feed. The water pressure of the feed was stabilized by an air cushion in a special container, which was connected to the working area by 50 mm reinforced 1m long tube. Thus, for all experiments the water supply zone (tube, pre-

chamber and nozzle on Fig. 2), in which the unsteady fluid motion takes place, was fixed. The flow rate of air and water were measured in the stationary conditions. As an indicator of the water jet momentum the time-averaged pressure p_0 in the pre-chamber was used. Also time-averaged pressure in the cavity p_k was used to characterize the flow.

Further we present results of measurements for a series of experiments conducted with relatively small volume of the cavity $C_k \approx 5-15$, with width of the nozzle $D = 25$ mm, gap size $h = 9$ mm and for different values of thickness of the cushion H .

Fig. 3 and 4 show dependence of the cavity pressure and the water flow rate on rate of air blowing into the cavity at four channel widths (thickness of the air cushion).

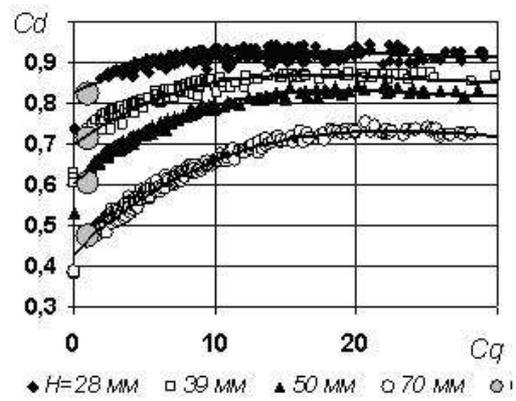


Figure 3 - Graph of pressure coefficient of blowing air

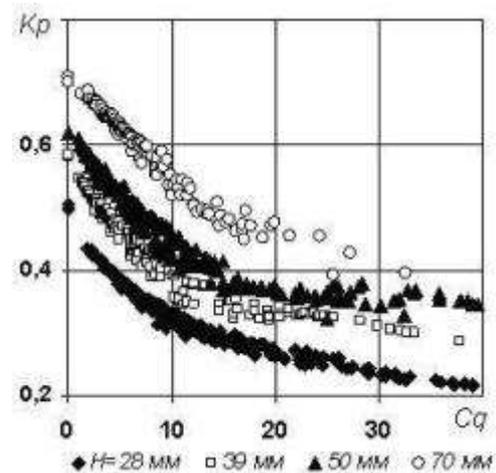


Figure 4 - Graph of flow rate of the blowing air

Average excess head P_0 pressure varies from 0.02 to 0.07 MPa - some scatter of points is associated with the existing scale effect. It can be seen that the coefficient of blowing rather strongly depends on the thickness of the air cushion. Without blowing air ($C_q = 0$) in a water-filled cavity has high pressure, which increases with decreasing H . Large black circles on the graph show the theoretical values of the critical values C_d^* . In [3] it was shown that in the test configuration (turning the water jet at 90°) the coefficient of

blowing $C_q \approx 1$ and pressure ratio increases approximately linearly from zero to a critical blowing. Fig. 3 graphs for presented range of flow rate (supercritical blowing) are well approximated by polynomials (for $H = 28$ mm - 4-th order polynomials, for other values - third). For all the values of cushion thickness when the critical value C_d^* is reached, the pressure ratio is increased by the same amount of about 0.1 [3], while in supercritical conditions, the greater the thickness of the cushion the more efficient is the supercritical blowing. So at $H = 70$ mm pressure can be increased by 90%, and at $H = 28$ mm, only by 27%. Moreover, the maximum pressure in the cushion for all cases is achieved with $C_q \approx 20$, and then pressure ratio is slightly reduced (in Fig. 3 not shown).

Fig. 5 shows that actual flow rate of air blowing to the cavity is not growing as much as the value of C_q due to the drop of water flow as the pressure in the cavity increases. Fig. 4 points represent same C_q as in Fig. 3. It is seen that, in spite of a slight decrease in the average pressure in the cavity at $C_q > 20$, the water flow rate at fixed average head pressure continues to decrease with increasing blowing. This can not be explained in terms of the concept of stationary jet flow.

Let's turn to the study of pulsation characteristics for oscillatory flow regimes.

Fig. 5 and Fig. 6 shows Strouhal number ($St = fD/V_\infty$) and relative magnitude of pressure fluctuations in the cavity (A/P_0) of the blowing ratio in the cavity with the same medium head ($P_0 = 0.02$ MPa) and different thicknesses of the air cushion.

Fig. 5 shows that with increasing blowing for some of its rate there is an abrupt change in the frequency of pressure fluctuations in the cavity (note that Strouhal number is determined by the leading frequency in the spectrum). The transition to this high frequency is different from the transition from the "sine wave" to the surge mode where frequency and amplitude are continuous. We can see that in both modes (low and high frequency), Strouhal number is independent of the cushion thickness and approximately linearly increases with increasing of blowing ratio. The thickness of the cushion depends significantly on the transition from low to high frequency regime.

This is well illustrated by the data on FIG. 6. It shows that average peak-time drops significantly during transition to the high-frequency mode. Intensity of the vibration increases significantly with the increase in low-frequency mode and does not depend on the thickness of pads and practically does not change depending on the blowing in the high mode, the range of variation in this case is approximately equal. Thus variations (in the intensity and frequency) in the studied range do not depend on the thickness of the cushion with the exception of the transition modes.

It is seen that the transition is not abrupt but it takes a whole range of change in blowing ratios (about

10 to 20 - as seen in Fig. 6). The spectrum shows that in this area two modes co-exist (there is intermittency). In addition, it appears that as the blowing increases the sinusoidal mode is not always progressing to surge. For example, the data of Fig. 7 show that with increasing pressure the sinusoidal mode transitions to a different regime, bypassing surge mode.

Visual study (not described here) showed that with transition to the high-frequency mode discharging liquid jet ceases to directly interact with the screen - the jet only interacts with the gas flow.

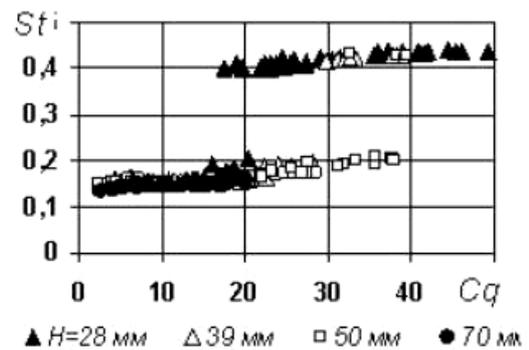


Figure 5 - Strouhal number dependence on the coefficient of gas flow rate into the cavity at $P_0 = 0.02$ MPa and various H

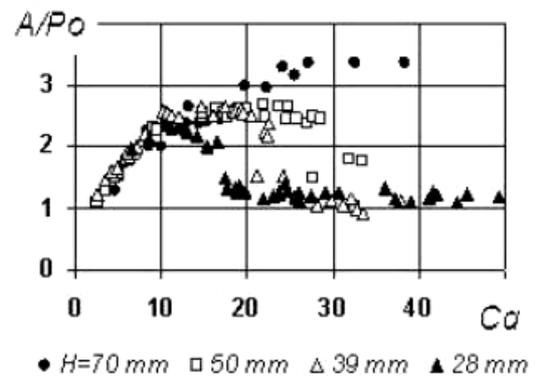


Figure 6 - Dependence of relative magnitude of pressure fluctuations in the cavity on the coefficient of flow rate of gas blown into the cavity at $P_0 = 0.02$ MPa and various H

Fig. 8 show effect of the discharge rate (scale effect) on the characteristics of pressure fluctuations in the cavity at constant geometry of the boundaries. Thus the scale effect on the relative intensity of fluctuations is particularly high.

The lower the velocity of discharge (or the average pressure P_0), the higher is the relative amplitude. At $P_0 = 0.01$ MPa value A/P_0 reaches 3.7, and $P_0 = 0.07$ MPa only 1.1. Additionally, the more is the pressure P_0 the earlier (in terms of C_q) the transition to high-frequency oscillation mode takes place. But in high-frequency mode, the scale effect is not presented, as in Fig. 8 swings in pressure variations in this mode is approximately equal P_0 .

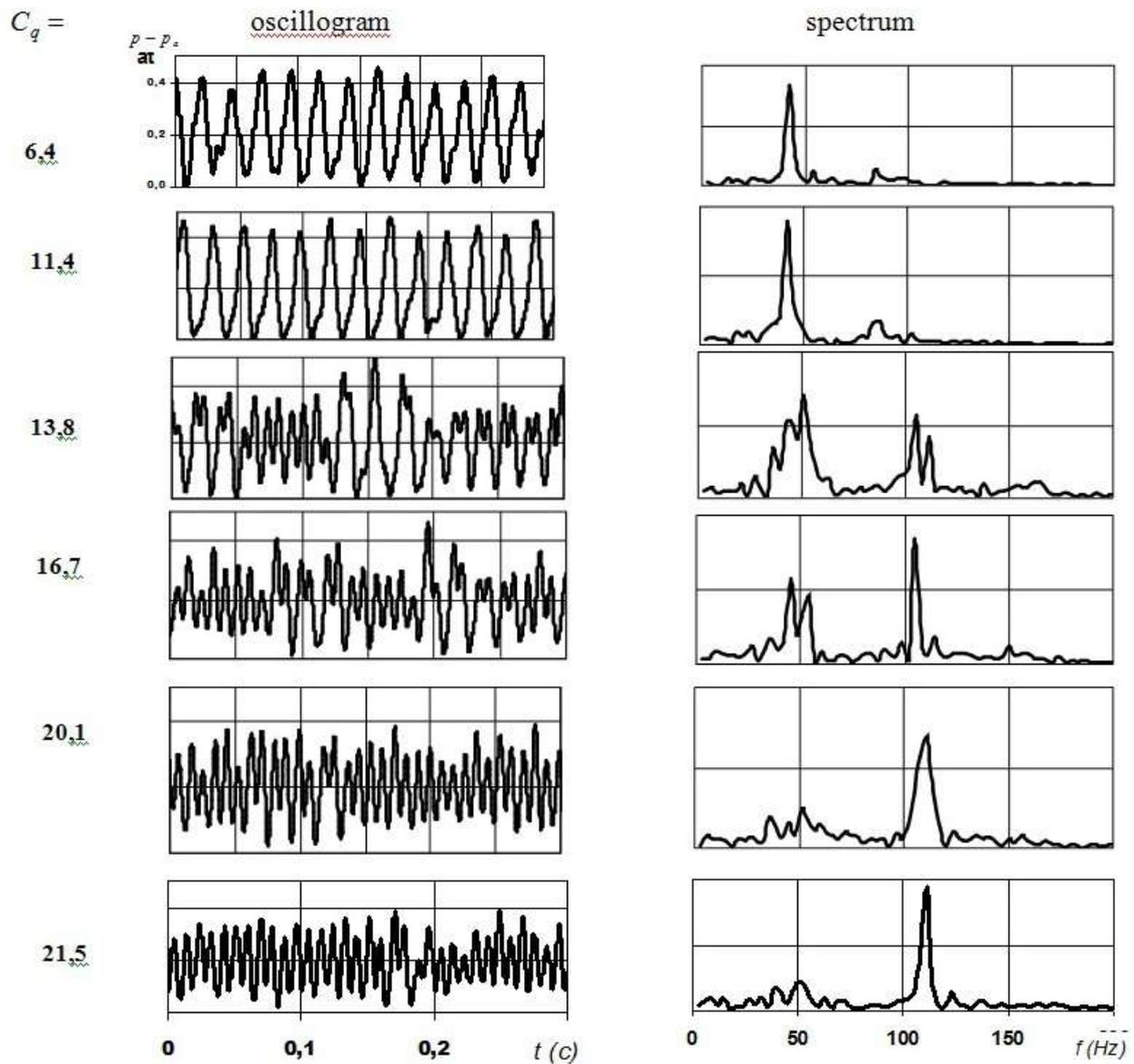


Figure 7 - Waveforms of pressure fluctuations in the cavity and their spectrum show the process of regime change in the oscillations at $P_0 = 0.02$ MPa, $H = 28$ mm

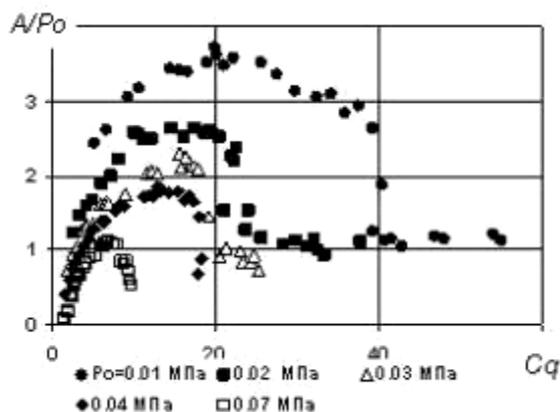


Figure 8 - Dependence of coefficient of blowing at $H = 39$ mm and different speeds of the liquid flow.

If the transition to surge, intermittent regime is possible at sufficiently high relative amplitude of the pressure oscillations, then with increasing pressure conditions for this transition disappear.

Fig. 9 shows experimental data for the dependence of the flow rate of water through the nozzle K_p on the pressure coefficient of the cavity C_d at different cushion thicknesses H and average pressures P_0 . Solid line is theoretical curve for the steady plane flow of an ideal fluid. At $C_d = 0$ flow coefficient is less than 1, because the water nozzle has a constriction as covered in the theoretical calculations. Large gray circle marks the limit - the critical point for the flow of the jet with the accession to the screen for all four values of cushion thickness.

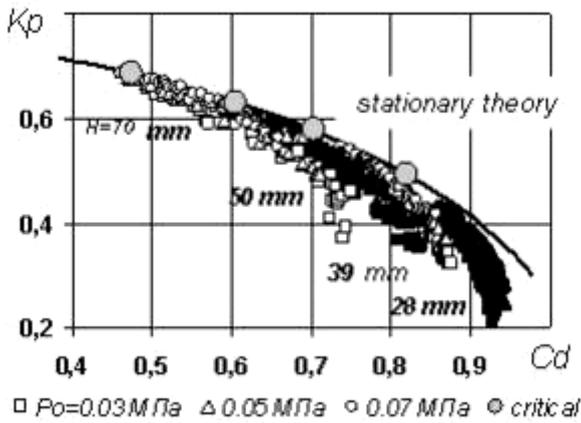


Figure 9 - Dependence of jet flow rate factor on pressure factor in the cavity at $C_k \approx 5$.

Points corresponding to three different rates of discharge of Fig. 10 are shown in symbols of different shapes. Transparent and opaque symbols alternate for successive values of H . We see that at supercritical flow the discharge coefficient is less than calculated by steady-state theory (as presented in Fig. 10, up to 2 times). In [3] it was shown that in the subcritical flow regime the average flow characteristics are well described by the ideal liquid steady theory. Hence, there is a strong influence of significantly unsteadiness of the flow on average parameters. At fixed C_d the rate of fluid flow from the nozzle depends on the thickness of the cushion and the pressure of water.

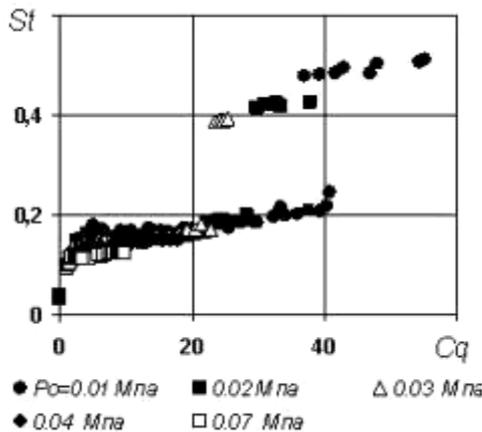


Figure 10 - Dependence of Strouhal number on the coefficient of blowing at $H = 39$ mm and different speeds of the liquid flow.

Dependence of the oscillation on volume of the cavity was investigated on a special stand, which was different from shown in Fig. 2 in that the channel was joined with a vertical well allowing for increase of the cavity volume. The change of volume at constant H was achieved by changing depth of the well. Fig 11 shows dependency of relative intensity of the pressure fluctuations \bar{A} in the cavity from relative volume of the cavity $C_k = \Omega_k/DHh$ ($D = 25$ mm $H = 50$ mm $h = 5$ mm, Ω_k - total volume of the cavity, $P_0 = 0.03 - 0.05$ MPa) at constant blowing ratio C_q .

Here we study only area of low-frequency auto-oscillations. It is seen a quite strong decrease in intensity of low-frequency pulsations with increasing volume of the cavity, and the slope of the curves decreases with increase in C_q . Threshold C_k (at which low-frequency auto-oscillations disappear) significantly increases with increase of the gas blowing rate. It would seem that with increase in volume of the cavity low-frequency fluctuations will begin at higher blowing rate. However this is not always the case. The same setup was used for an experiment with channel width $H = 29.8$ mm. In that case, the transition to a high-frequency mode was occurring earlier.

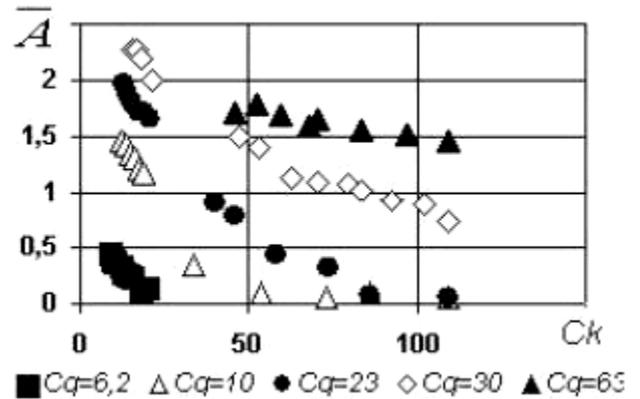


Figure 11 - The intensity of the pressure fluctuations in the cavity from the relative volume of the cavity for $D = 25$ mm, $H = 50$ mm, $h = 5$ mm, $P_0 = 0.03 - 0.05$ MPa.

Fig. 12 shows relative intensity of the pressure fluctuations C_q in the channel for three values of $C_k = 57, 113, 184$ and for two values of pressure of the jet $P_0 = 0.02$ (solid symbols) and 0.04 MPa (transparent).

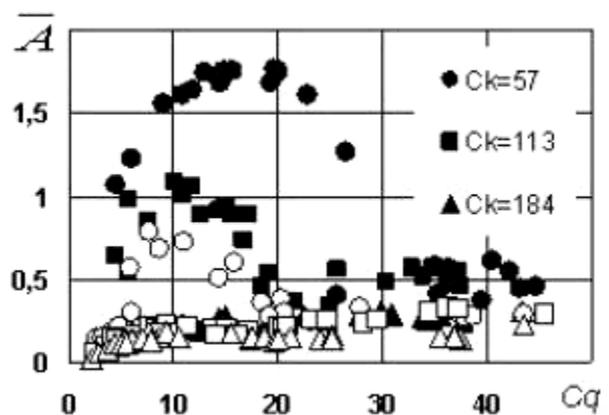


Figure 12 - Dependence of intensity of the pressure fluctuations on relative volume of the cavity with $D = 25$ mm, $H = 29.8$ mm. $P_0 = 0.02$ MPa, 0.04 MPa (solid and transparent symbols respectively).

It is seen that growth of the cavern, not only reduces amplitude of the low-frequency fluctuations, but it also reduces area of their existence. Moreover, for a

sufficiently large volume of cavern the low-frequency pulsations do not occur at any blowing rate. For $P_0 = 0.02$ MPa the low-frequency oscillations do not exist at $C_k = 184$ and for $P_0 = 0.04$ MPa they are not observed at $C_k = 113$. In these cases, from the very beginning the high-frequency oscillations mode develops.

Conclusion

When creating a jet veil with high-pressure cavity (air cushion) in supercritical air flow rate the auto-oscillatory modes of jet flow are observed. In this regime the liquid jet directly interacts with the screen (note, the theoretical steady stream in supercritical mode does not interact with the screen). It was found that the range of blowing coefficients where this regime exists is strongly dependent on volume of the cavity. With a slight overpressure in the cavity (about 0.01 MPa, these are the values common for the hovercrafts) with increasing air blowing the auto-oscillating mode turns into surge (intermittent) flow regime. Despite the fact that average pressure in the air cushion depends on its thickness, the characteristics of vibration (frequency and intensity) in the studied range do not depend on the cushion thickness. There is only de-

pendence of transition point to high-frequency regime on this parameter. The relative intensity of pressure pulses in the cavity noticeably depends on velocity of the jet (scale effect), and in the region high-frequency mode the scale effect is not observed and amplitude of the pressure pulsation in the cavity is approximately equal P_0 .

The works received financial support from Russian Foundation for Basic Research (projects №№ 13-01-00250 and 13-01-00218)

References

1. I.I. Kozlov, S.A. Ocheretyany, V.V. Prokof'ev, "Experimental Investigation of Liquid Jet Outflow into a Plane Ventilated Channel in Self-Oscillatory Regimes", *Fluid Dynamics* 46 (4), 548 (2011).
2. I.I. Kozlov, V.V. Prokof'ev, A.A. Puchkov, "High-Speed Videocamera Investigation of the Wave Structure Development on an Unstable Cavity Boundary," *Fluid Dynamics* 43 (2), 287 (2008).
3. I.I. Kozlov, V.V. Prokof'ev, "Gas Entrainment from a Ventilated Cavity with a Negative Cavitation Number," *Fluid Dynamics* 36 (5), 751 (2001).

HYDRODYNAMIC INSTABILITIES IN INTERACTION OF LASER RADIATION WITH A MAGNETIZED TARGET

Victor V. Kuzenov^{1,2}, Ivan V. Romadanov¹, Sergei V. Ryzhkov¹

¹Bauman Moscow State Technical University

²A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

¹2nd Baumanskaya Street, bld.5, str. 1, Moscow, 105005, Russia

²Prosp. Vernadskogo 101, block 1, Moscow, 119526, Russia

ryzhkov@power.bmstu.ru, kuzenov@ipmnet.ru

Abstract

The concept of fast ignition is one of the most promising approaches to the problem of controlled fusion. Preliminary test results of magnetized plasma target compression by high energy laser pulses are shown. It can be argued that the magnetic field in terms of vortices plays a stabilizing role, which is manifested in the fact that the vortex structures dissipate in the presence of an externally applied magnetic field. We introduce the basic dimensionless parameters defining the solution of the problem.

Introduction

The concept of fast ignition is one of the most promising approaches to the problem of controlled chain reaction in inertial confinement fusion. It is based on the principle of separation relative to the time of the compression of the target inertial confinement fusion (at this early stage of a thermonuclear target substance "adiabatic" is slowly shrinking) and the process of thermonuclear ignition of a deuterium tritium mixture (at this stage in a small spatial region organized by rapid heating of the target and initiate a wave of thermonuclear combustion). The above method allows the plug to minimize the energy DT - plasma at a level of 20 - 50 kJ when the ignition threshold of 0.3 - 1 MJ at the initiation of the combustion wave with high gains.

In the initial stage of "fast ignition" in this paper is applied magneto-inertial fusion (MIF) [1-7], which has the advantages of both concepts of controlled thermonuclear fusion - high energy density inertial confinement fusion (ICF) and the thermal insulation of the plasma by the magnetic field, the typical for magnetic confinement fusion (MCF). The scheme of MIF with a laser driver is based on the general idea of adiabatic acceleration (compression) pulsed laser exposure (laser driver) of the target material, which consists of a pre-formed low-temperature plasma of the target and "frozen" into the plasma magnetic field.

To do this at the initial time (to start operation of the laser driver) in the working body of the target inertial fusion formed the initial magnetic flux.

Further fusion target from all sides "equally" multi-channel laser is irradiated by radiation. As a result of interaction with the surface of the heating radiation thermonuclear target forms a hot plasma with a temperature $T = 1 \div 5 \text{ keV}$ (so-called plasma corona) to meet the expanding laser beam with typical speeds $u = 10^2 \div 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ and creating a compressive pressure at

$P \approx 50 \cdot 10^6 \text{ bar}$. In this case, the heating laser beam extends into the target area only to the density of electrons, called the critical temperature (where the laser frequency is compared to plasma).

This circumstance (reflected laser light from the border with the critical density of electrons) is the first important problem of laser inertial fusion.

Perform some estimates that will later be used for numerical calculations.

Formulation Of The Problem

For thermonuclear ignition DT mixture, which is compressed to some accelerated pulse laser exposure shell, you need to perform a generalized version of the Lawson criterion (condition on the temperature and density of the fusion plasma). To determine this, we introduce two characteristic times:

- $t_{\text{reac}} = \frac{M_i}{\rho} \cdot \frac{1}{\langle V\sigma \rangle}$ is the time of thermonuclear

fusion target;

- $t_{\text{mo}} = \frac{r}{C}$ is the time of magneto-gas-dynamic

expansion of the target.

Where r is the current radial boundary of the target with the thermonuclear burning, ρ is the current density of the target, M_i is the mass of the ion involved in the fusion reaction, V is the relative velocity of the ions interacting in the fusion reaction, σ is the cross section of

the thermonuclear reaction $c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$ is the speed of

sound, $C = c_s \cdot \frac{H^2}{8\pi\rho} = c_s \left(1 - \frac{H^2}{8\pi\rho c_s} \right)$ is the magneto-

gas-dynamic expansion velocity of a thermonuclear target. We state the amount effectiveness of nuclear fusion f_{eff} as a ratio:

$$f_{eff} = \frac{t_{mo}}{t_{reac}} = \frac{\langle V\sigma \rangle}{M_i c_s} \frac{\rho \cdot r}{\left(1 - \frac{H^2}{8\pi\rho c_s}\right)}$$

Moreover, it is known that the ratio $\frac{\langle V\sigma \rangle}{M_i c_s} \approx const$

close to a constant: $\frac{M_i c_s}{\langle V\sigma \rangle} > 1 \frac{g}{cm^2}$. Under this condi-

tion, the charged particles (representing the products of thermonuclear reaction) α particles pass a significant portion of its energy dense fusion plasma, the combustion process takes place at temperatures $30 \div 100$ eV that correspond to the maximum values of the velocity D-T reaction.

Thus, the condition of thermonuclear ignition of D-T mixture in a magnetic field of strength and accelerated compressible (pulsed laser) shell has the form:

$$T > 2 \div 3 \text{ keV}, \quad \rho \cdot r > \left(1 - \frac{H^2}{8\pi\rho c_s}\right) \frac{g}{cm^2}$$

Consider the ideal situation in which the magnetic field is "frozen" in the body of a thermonuclear target. Then the law of conservation of magnetic flux is $Hr^2 = H_s r_s^2$, where H_s is the initial magnetic field strength, r_s is the initial radius of the fusion target.

From this relation and the magnetization condition for α particle ${}^4_2H^{2+}$ (it is necessary for the propagation of thermonuclear burning at the target) can be a condition that will link the final radius of the target r and the initial strength of the magnetic field H_s :

$$r > r_c = \frac{u_\alpha M_\alpha}{eH} = \frac{u_\alpha M_\alpha}{eH_s} \left(\frac{r}{r_s}\right)^2,$$

where r_c is the cyclotron radius of α particles.

Hence, the condition for a finite radius of compression for desired value of the initial magnetic field H_s is:

$$\frac{eH_s r_s^2}{u_\alpha M_\alpha} > r,$$

where $u_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{M_\alpha}} = 1,3 \times 10^7 \frac{m}{s}$ is the initial rate of

α particles, $M_\alpha = 6,64 \times 10^{-27}$ kg is the weight of α particles $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C is the charge of the electron, $E_\alpha = 3,5 \cdot 10^6$ eV is the α particles energy in the D-T reaction.

The magnetic pressure P_{mag} is given by:

$$P_{mag} = \frac{H^2}{8\pi} = H_s^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^4, \quad \left[\frac{Dyn}{cm^2}\right].$$

Then the work L_{mag} against the magnetic pressure is given by:

$$\begin{aligned} L_{mag} &= \int_{r_H}^r 2\pi r \frac{H^2}{8\pi} dr = \int_{r_H}^r \ell_d^z H_s^2 \pi r_s^2 \left[\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 - 1\right] = \\ &= \ell_d^z H_s^2 \pi r_s^2 \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^2\right]. \quad [Erg] \end{aligned}$$

If we assume that at the initial stage of "fast ignition" fusion target "adiabatic" slowly shrinks (the Poisson equation $P/\rho^\gamma = const$ is valid), then the work of deformation (compression spent on the target) is given by (subject to the law of conservation of mass $\rho r^2 = \rho_s r_s^2$, where ρ_s is the initial target density):

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho \pi r^2 \ell_d^z}{(\gamma-1)} \frac{P_s}{\rho_s} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^{\gamma-1}\right] = \\ &= P_s \frac{\pi \ell_d^z r_s^2}{(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{2(\gamma-1)}\right]. \end{aligned}$$

The last two equations allow us to compare the energy costs of work strain and the work of the magnetic pressure:

$$\begin{aligned} L_{eff} &= \frac{L_{mag}}{|L|} = (\gamma-1) \frac{H_s^2}{P_s} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{2(2-\gamma)} \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^2\right]}{\left|1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^{2(\gamma-1)}\right|} \\ &\propto (\gamma-1) \frac{H_s^2}{P_s} \left(\frac{r_s}{r}\right)^{2(2-\gamma)}. \end{aligned}$$

In numerical calculations of fusion targets and the estimated area are cylindrical in shape with the following range of values of the initial parameters of the target and the environment:

- radius $R = 0,43 \div 1$ mm with length $\ell = 1,5$ mm filled with D-T mixture with density $\rho = 0,01 \div 0,25 \frac{g}{cm^3}$ (options with a solid $\rho = 0,25 \frac{g}{cm^3}$, liquid $\rho = 0,34 \frac{g}{cm^3}$ and gaseous $\rho = 10^{-4} \frac{g}{cm^3}$ mixture's state are discussed) and an initial temperature equal to $T = 2,6 \cdot 10^{-5}$ keV (about 300 K), which are surrounded by coaxial layers composed of heavy metal (*Au*, *Pb*) and the absorbent layer (*Pb*, *Be*).

- radius of the entire area $R = 1500$ mkm, length $\ell = 2$ mm, the thermodynamic parameters of D-T mixture correspond to the rarefied environment $T = 10^{-2}$ keV, $\rho = 10^{-2} \frac{g}{cm^3}$.

Model

The basic versions of the initial parameters of the target are shown in Figure 1.

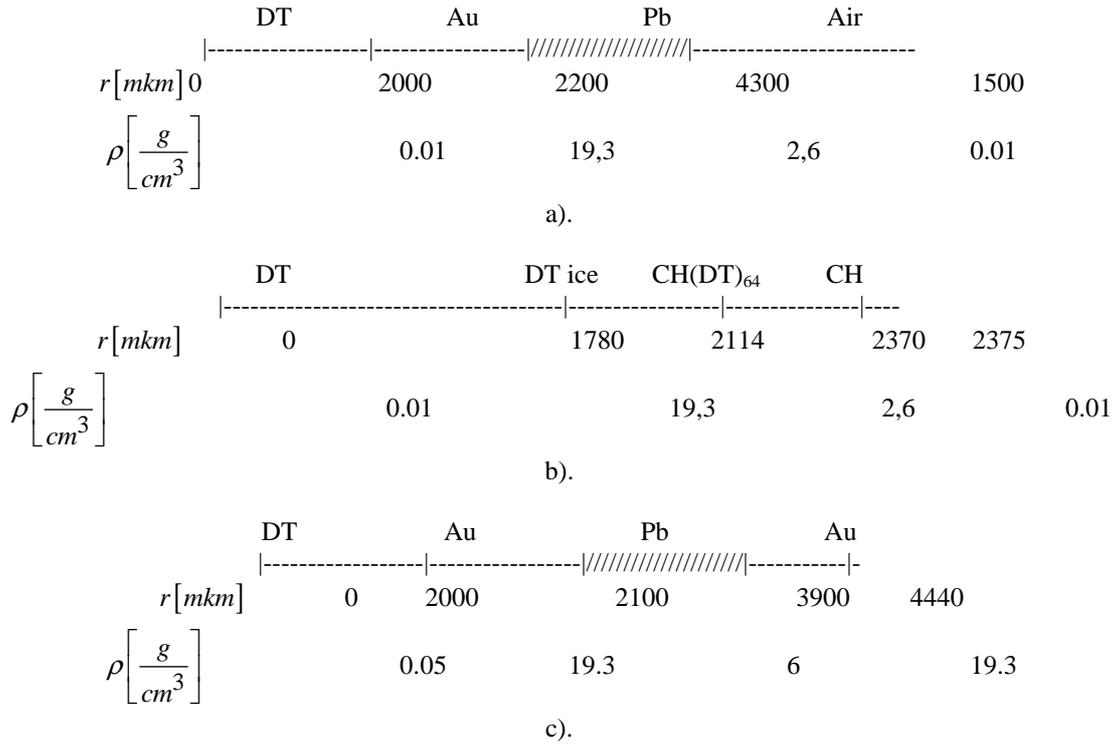


Figure 1 - The radial geometry of layered cylindrical target, indicating the initial parameters of the target

The duration of the laser pulse is $t = (1 \div 20) \text{ ns}$, laser radiation is in the range $q = (0,01 \div 1) \times 10^{16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$, the wavelength of the laser radiation for CO_2 laser ($\lambda = 10,06 \mu\text{m}$) and Nd laser YAG ($\lambda = 0,532 \mu\text{m}; \lambda = 1,064 \mu\text{m}$).

Consider the semi-analytic mathematical model [7-11] of the processes associated with exposure to high-power laser radiation on the outer part of the fusion target at the initial stage of "fast ignition". This model is based on the radiation-magnetic gas dynamics equations:

$$Hr = \text{const}, E_\varphi = 0, E_z = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(r\rho u)}{r\partial r} = 0, \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(r\rho u^2)}{r\partial r} = -\frac{\partial\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right)}{\partial r},$$

$$\frac{\partial\left(\rho e + \rho u^2/2 + H^2/8\pi\right)}{\partial t} + \frac{\partial r\left[u\left(P + H^2/8\pi\right) + q\right]}{r\partial r} = 0.$$

In the statement of the approximate method of solving the system of equations will make a number of assumptions:

- the duration of action of an external energy source is an arbitrary relationship with the time of passage of hydrodynamic disturbances through the body of the target;
- the area of approximate solutions is limited by the evaporation wave and wave (compression or shock wave) moving to the axis of symmetry of the target;
- believe that energy from an external source is applied only to the border of the evaporation wave;

- gas-dynamic parameters at border crossing wave fronts will find on the basis of an approximate method of solving the Riemann problem of the decay of a discontinuity [12];

- the spatial distribution (velocity, density, pressure, etc) between the compression wave and the evaporation does not depend on the coordinates r .

The integration of this system of equations in the coordinate r from the border of the compression wave r_{com} to the border of the evaporation wave r_{vap} :

$$\frac{d\langle r\rho \rangle}{dt} + (r\rho D_{vap})\Big|_{r_{vap}} - (r\rho D_{com})\Big|_{r_{com}} = 0,$$

$$\langle r\rho \rangle = \rho \left(\frac{r_{vap}^2}{2} - \frac{r_{com}^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\langle r\rho u \rangle}{dt} + (r\rho u D_{vap})\Big|_{r_{vap}} - (r\rho u D_{com})\Big|_{r_{com}} =$$

$$= -\frac{(r_{vap} + r_{com})}{2} \left[P\Big|_{r_{vap}} - \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right)\Big|_{r_{com}} \right],$$

$$\langle r\rho u \rangle = \rho u \left(\frac{r_{vap}^2}{2} - \frac{r_{co}^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\langle r(\rho e + \rho u^2/2) \rangle}{dt} +$$

$$+ \left(r \left[D_{vap} P + (q_{las} - \rho D_{vap} \Omega) \right] \right)\Big|_{r_{vap}} -$$

$$-\left(r\left[D_{com}\left(P+H^2/8\pi\right)+\varepsilon\sigma T^4\right]\right)_{r_{com}}=0,$$

$$\left\langle r\left(\rho e+\rho u^2/2\right)\right\rangle=\left(\rho e+\rho u^2/2\right)\left(\frac{r_{vap}^2}{2}-\frac{r_{com}^2}{2}\right),$$

$$\frac{dr_{vap}}{dt}=D_{vap}, \frac{dr_{com}}{dt}=D_{com},$$

$$\frac{d\left(\frac{r_{vap}^2}{2}-\frac{r_{com}^2}{2}\right)}{dt}=r_{vap}D_{vap}-r_{com}D_{com},$$

where Ω is the latent heat:

$$Au: \Omega = 352,68 \left(\frac{kJ}{mole}\right),$$

$$Pb: \Omega = 122,57 \left(\frac{kJ}{mole}\right),$$

$$Al: \Omega = 294,85 \left(\frac{kJ}{mole}\right),$$

D_{com} is the speed limit of the compression wave, D_{vap} is the speed limit of the evaporation wave, ε is the emissivity of the plasma. And falling outside the boundary of the evaporation wave laser light is received $q_{las} = 0$ if

$$\rho > \rho_{cr} = 1,83 \times 10^{-3} \frac{A\lambda}{z} \left(\frac{g}{cm^3}\right)$$

because laser radiation can only penetrate target layer to the critical density:

$$\rho_{cr} = 1,83 \times 10^{-3} \frac{A\lambda}{z} \left(\frac{g}{cm^3}\right),$$

where A is atomic weight of the nuclei of the plasma:

$$Au: A_{Au} = 196,966 \left(\frac{g}{mole}\right),$$

$$Pb: A_{Pb} = 207,2 \left(\frac{g}{mole}\right),$$

$$Al: A_{Al} = 26,98 \left(\frac{g}{mole}\right),$$

λ (μm) is the wavelength of the laser radiation, z is the average ion charge.

As a result of the described compression process the thermonuclear target acquires the following thermodynamic parameters: density $\rho = 100 \frac{g}{cm^3}$ and temperature $T = 1 keV$, i.e. in the working body of the target inertial fusion creates a high-density, magnetized plasma.

The high-temperature subdomain with thermonuclear plasma parameters is generated within the body of the target at the second stage - with an additional energy pulse.

There are several ways to create ignitor: fast electrons and ions of the laser plasma beam of heavy ions, X-ray pulse and the hydrodynamic flow of the plasma.

The latter case is based on acceleration, compression and detonation of thermonuclear material in a conical

nozzle (which form an integral part of the target inertial fusion) outside the plasma flow, which is formed in the plasma in an accelerator. This approach allows for rapid ignition of the target plasma accelerator at speeds of 300 - 500 km/s.

Note that if in this case to use a high-speed system ($V_{pl} = 500 \frac{km}{s}$) relative to the diluted plasma jets that

will wrap around the target fusion parallel to its axis of symmetry (cylindrical symmetry). The plasma (the border which may affect the charged particles that appear when a thermonuclear reaction) with the density of electrons below the critical (this point can be laser target compression for a longer time) can be formed on the contact interface between the environment and the target material during the time

$$t_{pl} = \ell_{pl}^z / (2 \cdot V_{pl}) \approx 1,5 / 10^9 = 1,5 ns, \ell_{pl}^z = 1,5 mm.$$

Heating beam of high-energy ions also seems to be quite promising method for fast ignition of inertial fusion targets. The advantage of this method compared with the use of an electron beam due to a slight scattering of ions in the plasma evaporated residual portion of the target and in a fusion medium. Then the heating of the plasma ion beam at fast ignition is a non-linear process with a strong feedback: increase in temperature leads to a decrease in its braking ability, increasing the length of the path of the ions. The possibility of creating a central ignitor ion beams with energies $E \sim 100 \div 300 MeV/amu$. The specific energy of the beam is $Q \sim 5 \div 20 GJ/cm^2$.

Contemplated methods (beam of high-energy ions, compression and detonation outside the plasma flow) D-T plasma ignition can significantly reduce the demands on the symmetry and stability of the target compression and can allow to achieve high combustion efficiency at relatively low energies, the main driver.

In a fusion plasma high density in a strong 'frozen' into the plasma magnetic field, almost all flying fast charged particles undergo several acts of "nuclear" scattering and held compressed magnetic flux. As a result of these fast ions expend their energy to heat the surrounding regions of the plasma, which is one of the necessary conditions for the propagation of the combustion wave in the medium.

Besides the existence of magnetic field immersed in plasma partially solves the problem of the development of radiation-magnetic hydrodynamic instabilities such as the Rayleigh-Taylor (RT), Richtmyer-Meshkov (RM) ("magnetization" is accompanied by suppression of plasma instabilities such as RT and RM) [13-14].

It is important to note that the condition of thermonuclear ignition D-T mixture in a magnetic field of strength H and compressible pulse laser radiation, significantly attenuated in comparison with the case of traditional inertial confinement fusion.

Below the ignitor shall mean the area of minimum radial dimension, which is hot and dense plasma, which is created in a time significantly shorter than the gasdynamic expansion. The average temperature T_{ign} and size $\rho_{ign} R_{ign}$ of the ignitor determined from the condition of a thermonuclear ignition in a pre-prepared mixture

of fusion plasma, which will heat up α particles:

$$T_{ign} \approx 5 \div 12 \text{ keV}, \rho_{ign} R_{ign} = 0,3 \div 0,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}.$$

Depending on the degree of pre-compression in the initial stage "rapid ignition" cylindrically symmetric target values of the plasma parameters of its material may be:

- $T = 0,1 \div 1 \text{ keV}, \rho = 100 \div 10000 \text{ g/cm}^3$;
- $\rho R = 1 \div 2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ - for thermonuclear fuel burnup $G = 10 \div 15 \%$;
- $\rho R = 6 \div 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$ - for thermonuclear fuel burnup $G = 50 \div 60 \%$.

The thermonuclear target is considered on the second solution stage of the problem as a reference case of the geometric and thermodynamic parameters of the ignitor (the variant when the initial moment of the plasma is at rest):

- $\ell_{pl}^z = 1,5 \text{ mm}$ is the length of the plasma cylinder;
- $R_{ign}^i = 0$ is the inner radius, $R_{ign}^o = 35 \mu\text{m}$ is the outer radius of the plasma ignitor, the thermodynamic parameters for the field $T_{ign} = 12 \text{ keV}$, $\rho_{ign} = 100 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

(condition of thermonuclear ignition for D-T mixture: $\rho_{ign} R_{ign}^o = 0,35 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$). Here we note that there is the minimum energy of the ignitor E_{ign} (required for the "ignition" of fusion target) depends on the temperature T_{ign} and the spatial form of ignitor (lack of cylindrical symmetry in the form of ignitor worsens the ignition parameters);

- $R_{tr}^i = 35 \mu\text{m}$, $R_{tr}^o = 300 \mu\text{m}$ are the inner and outer radii of the plasma transition region respectively, the thermodynamic parameters correspond to the dense and relatively cold plasma $T_{tr} = 1 \text{ keV}$, $\rho_{tr} = 100 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$;
- $R_{GR}^i = 300 \mu\text{m}$, $R_{GR}^o = 1500 \mu\text{m}$ are the inner and outer radii of the plasma transition region, the thermodynamic parameters correspond to the rarefied environment $T_{GR} = 10^{-2} \text{ keV}$, $\rho_{GR} = 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

If the "fast ignition" occurring by external plasma flow and the velocity of the plasma in the accelerator is at $u_{acc} \approx 100 \div 500 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, then the mass of the accelerated flow is determined by the D-T:

$$M_{acc} = \sqrt{\frac{2E_{ign}}{u_{acc}^2}} = 0,5 \text{ g},$$

where $E_{ign} = \frac{3}{2} P_{ign} V_{ign} \approx 20 \text{ kJ}$ is the minimum ignition energy for the base case of ignitor.

We find the value H_s of the initial magnetic field conditions in the range of compression R_{tr}^o at the end of the initial stage of "fast ignition":

$$\frac{H^2}{8\pi} > \frac{H_s^2}{8\pi} = \left(\frac{u_{\alpha} M_{\alpha} R_{tr}^o}{3er_s^2} \right)^2 / 8\pi \approx 20 \text{ bar},$$

where $r_s = 430 \mu\text{m}$ is the initial radius of the thermonuclear target, $R_{tr}^o = 300 \mu\text{m}$ is the outer radius of the plasma transition region.

One of the goals of this work is to find the optimal way to feed the laser radiation to the substance of a thermonuclear target, quantification limits (for which it is possible to achieve the required efficiency of burnout) deviations of ignitor and the main target plasma from the cylindrical symmetry, finding the optimal size of ignitor (ρR)_{ig} and minimum embedded energy (E_{ig}). On the basis of numerical calculations to verify that the compression of the target and thermonuclear fusion is subject to an approximate scale invariant transformation of the form:

$$\tilde{t} = \rho t, \tilde{r} = \rho r, \tilde{E} = \rho^2 E_0, \tilde{M} = \rho^2 M.$$

The effectiveness of plasmodynamic energy transfer is defined as the proportion of laser energy transmitted "adiabatic" slow compressible part of a thermonuclear target.

The problem is solved on the basis of a series of direct execution of computational experiments to identify the influence of a given sequence of values of the parameters on the dynamics of burnout and integrated performance targets.

Conclusions

We introduce the basic dimensionless parameters defining the solution of the problem:

- $G = E_f / E_0$ is the gain, wherein E_f is the energy released in the process of thermonuclear fusion, E_0 is the energy supplied to the fusion target;
- $\mathfrak{R} = E_{tr} / (\alpha E_{las})$ is the efficiency of plasmodynamic power transmission, where E_{tr} is the energy transferred to the compressible part of the target, E_{las} is the energy is let down by the laser radiation to the thermonuclear target, α is the proportion of the laser energy that was absorbed by the thermonuclear target in the process of compression;
- $\beta = (H/8\pi) / P$ is the ratio of the magnetic pressure $P_{mag} = (H/8\pi)$ to the gas-dynamic pressure;
- $\text{Re}_m = \frac{u\ell}{v_m}$ is the magnetic Reynolds number,

$v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ is the magnetic viscosity, where σ is the conductivity of the plasma, c is the speed of light;

- $\chi = \sigma T^4 / q_{hydr}$ is the ratio of the flux density of broadband radiation in the hemisphere to the density of the gas-dynamic flow $q_{hydr} = \frac{1}{2} \rho_0 D u^2$ thru the shock front, where T , u are the temperature and velocity of the shock wave respectively, D is the velocity of the shock wave, ρ_0 is the density of the gas in front of the shock wave;

- $\Xi = \left(\frac{u_\alpha M_\alpha}{eH} \right) / r \leq 1$ ($\Xi \leq 1$) is the coefficient of efficiency of the cyclotron magnetization of fusion plasmas, r is the radius of the target, H is the strength of the magnetic field.

This research was performed as part of the program of the Presidium of RAS and fundamental research programs of the Department of Energy, Engineering, Mechanics and Control Processes of the Russian Academy of Sciences, RFBR grant № 13-01-00537, and FTP “Research and Development in Priority Fields of the S&T Complex of Russia (2007-2013)”, Activity 1.6, № 14.516.11.0083.

REFERENCES

1. Thio Y.C.F., Panarella E., Kirkpatrick R.C., Knapp C.E., Wysocki F., Parks P., Schmidt G. Magnetized target fusion in a spheroidal geometry with standoff drivers // *Current Trends in Int. Fusion Research*. 1999, p.113-134.
2. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Developing the numerical model for studying laser-compression of magnetized plasmas // *Acta Technica*. 2011, v.56, p.T454-467.
3. Kostyukov I.Yu., Ryzhkov S.V. Magneto-inertial fusion with laser compression of a magnetized spherical target // *Plasma Physics Reports*. 2011, v.37, №13, p.1092-1098.
4. Chirkov A.Yu., Ryzhkov S.V. The plasma jet/laser driven compression of compact plasmoids to fusion conditions // *Journal of Fusion Energy*. 2012, v.31, Issue 1, p.7-12.
5. Ryzhkov S.V. The behavior of a magnetized plasma under the action of laser with high pulse energy // *Problems of atomic science and technology. Series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration”* (7). 2010, №4, p.105-110.
6. Ryzhkov S.V., Chirkov A.Yu., Ivanov A.A. Analysis of the compression and heating of magnetized plasma targets for magneto-inertial fusion // *Fusion Sci Technol*. 2013, v.63, №1T, p.135-138.
7. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. A mathematical model of the high pulse energy laser beams interaction with the plasma target with initial seed magnetic field // *Preprint IPMech RAS. Moscow*, 2010, №942, 57p.
8. Kuzenov V.V., Surzhikov S.T., Capitelli M., Colonna G. Numerical Analysis on Near-Surface Laser Plasma in Gases and Vacuum // *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 9-12 January 2006, Reno, Nevada, AIAA 2006-1174.
9. Kuzenov V.V., Surzhikov S.T., Petrushev A.S. Radiation Gas Dynamics of Aluminium Laser Plume in Air // *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. 9-12 January 2008, Reno, Nevada, AIAA 2008-1108.
10. Kuzenov V.V., Surzhikov S.T., Grishin Yu.M. Radiative Gas Dynamic of Linear-Stabilized Surface Discharge in Atmospheric Gases // *36th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference*. 6-9 June 2005, Toronto, Ontario, Canada, AIAA 2005-4929.
11. Kuzenov V.V., Surzhikov S.T., Sharikov I.V. Numerical Simulation of Linear-Stabilized Surface Discharge in Rare Air // *Fifteenth international conference on MHD energy conversion and sixth international workshop on magnetoplasma aerodynamics*. 24-27 May 2005, Moscow, Russia, v.2, p.650.
12. Safronov A.V. A numerical method for solving Euler equations on breaks for the flux vector // *XVII School-Seminar “Aerodynamics of Aircrafts”*, TsAGI, 2006.
13. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Non-linear aspects in a model of laser-driven implosion // *Proceedings IV International Conference “Frontiers of Nonlinear Physics” (FNP 2010)*, Nizhny Novgorod, 2010. C. 371-372.
14. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beams and plasma jets // *Problems of Atomic Science and Technology. Series “Plasma physics”* (19). 2013, №1 (83), p.12-14.

ПРИМЕНЕНИЕ СТАЛЕФИБРОБЕТОНОВ ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ СУДОВ И ПОДВОДНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Ростислав О. Красновский

ЗАО "Институт "Оргэнергострой"

Россия, 115114, г. Москва, Дербеневская наб., д. 7, стр. 10
krasnovskijro@ioes.ru

Аннотация

Рассмотрена перспектива строительства судов и возведения подводных обитаемых сооружений из высокопрочного сталефибробетона

Введение

Все конструкционные материалы по своим механическим характеристикам можно разделить на следующие группы - металлы, естественные и искусственные каменные материалы (например, цементные бетоны), искусственные полимеры и, наконец, естественные (например, древесина). Металлы обладают высоким модулем упругости, а также относительно высокими и близкими друг к другу пределами прочности на растяжение и сжатие. Каменные материалы имеют модули упругости в несколько раз ниже, металлы, а их пределы прочности на растяжение в примерно на порядок меньше, чем на сжатие и, в свою очередь, ниже чем у металлов. Полимеры имеют модули упругости, примерно на порядок меньше, чем каменные материалы, и близкие между собой значения пределов прочности на растяжение и сжатие, но ниже чем у металлов. Кроме того упомянутые материалы различаются пластичностью – наибольшую имеют полимеры, а наименьшую – каменные материалы.

При проектировании и конструировании зданий и сооружений, а также корпусов судов целесообразно применять различные виды материалов, эффективно используя, присущие им характеристики.

Современная технология позволяет разрабатывать новые материалы, физико-механические характеристики, которых лежат в промежуточных областях, например между металлами и каменными материалами [1].

Сталефибробетон

Способ повышения прочности на растяжение искусственных каменных материалов путем введения в них прочных волокон, например, соломы известен с древних времен. Первые предложения о повышении прочности бетона на растяжение путем введения в него металлических волокон, появились в первой половине прошлого столетия [1]. Это можно считать началом применения сталефибробетона.

Основное отличие сталефибробетона от железобетона состоит в том, что сталефибробетон является по своим механическим характеристикам изотропным или анизотропным материалом, а железобетон - конструкцией из бетона, в растянутые зоны которой включены стержней стальной арматуры.

Сталефибробетоны представляют собой бетонную матрицу, в состав которой при ее изготовлении вводят стальные волокна [2]. Матрица, в зависимости

от поставленной задачи, может представлять собой цементно-песчаный раствор или бетон. Основные требования к матрице состоят в том, что она должна иметь высокую прочность, обеспечивающую ее сцепление с волокнами фибры, подвижность фибробетонной смеси, позволяющую укладывать ее без применения виброуплотнения, и вязкость, предотвращающую сегрегацию волокон фибры по толщине укладываемого слоя. Эти свойства сталефибробетонной смеси достигаются за счет введения в нее современных пластифицирующих и высокодисперсных активных минеральных добавок.

Применяемые для изготовления сталефибробетонов стальные волокна имеют диаметр от 0.2 до 1.2 мм и длину от 15 до 40 мм. По способу анкеровки в матрице их можно разделить на два основных типа – имеющие анкера по концам (Рисунок 1) или переменный профиль по длине волокна (Рисунок 2)

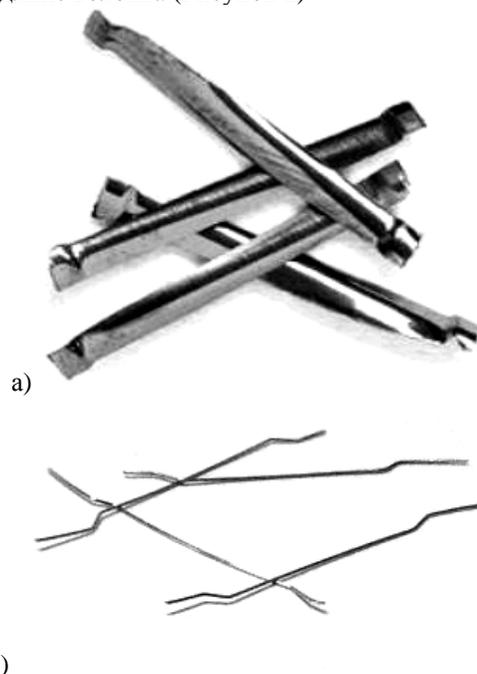


Рисунок 1 - Волокна фибры с анкерами по концам
а) строганная из слябов типа Nexex 32×1.2, б) проволочная ФСП-А 39×0.3



а)



б)

в)

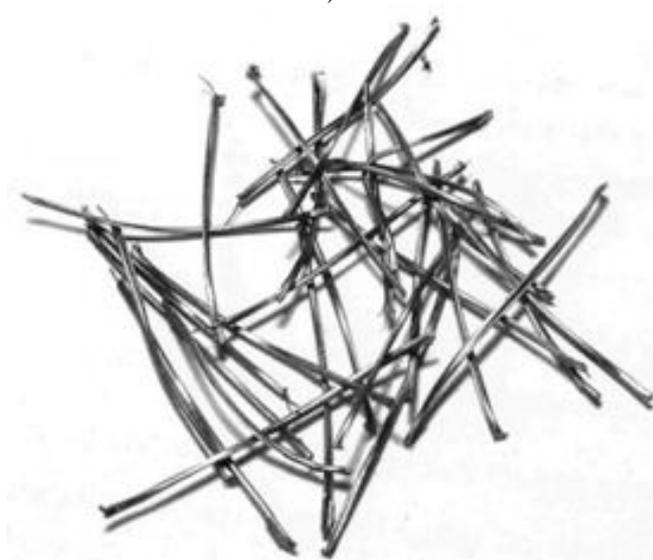


Рисунок 2 - Волокна фибры переменного профиля по длине:
 а) проволочная волнистая ФСП-В 30×0.8,
 б) проволочная волнистая ФСП-Люкс 15×0.3,
 в) строганая из листа ФСЛ 40×0.8

Предел прочности при растяжении для разных видов фибры составляет от 390 до 2500 МПа. При выборе вида фибры в первую очередь ориентируются на достижение равновесия между прочностью волокон и прочностью их заделки в матрице. Важным фактором также является способность волокон не образовывать при перемешивании и укладке сталефибробетонной смеси, так называемых, "ежей".

В зависимости от геометрических характеристик волокон стальной фибры в сталефибробетон можно ввести до шести процентов от его объема (предельный процент армирования железобетона - 3 %). При проценте армирования менее 0.5 введение фибры не сказывается на прочности сталефибробетона, но предотвращает появление усадочных микротрещин [4]. Увеличение процента армирования относительно мало влияет на рост прочности сталефибробетона на сжатие (не более, чем на 30-40 % от прочности его матрицы). Наибольшее влияние рост процента армирования оказывает на прочность на растяжение при изгибе. Здесь прочность повышается в 2-3 раза. При этом сталефибробетон обладает, так называемой, "остаточной прочностью при изгибе", то есть после образования единственной макротрещины разрушения с раскрытием от 0.5 до 2.5 мм он может воспринимать нагрузку, соответственно, от 0.8 до 0.3 от максимальной.

У сталефибробетона ударная вязкость в 10 раз выше, чем у бетона, а жаростойкость выше в 4 раза. При этом вплоть до разрушения не образуется трещин с раскрытием более 20 мкм, в которые не проникает вода даже под давлением 20 атм. (класс по водонепроницаемости W20 и более).

Высокая трещиностойкость сталефибробетона обеспечивает их высокую морозостойкость. Класс по морозостойкости сталефибробетона не менее F 1000.

Высокая износостойкость сталефибробетона обеспечила его широкое использование при изготовлении наливных полов промышленных зданий, а также аэродромных и дорожных покрытий.

Себестоимость сталефибробетонных изделий, примерно, такая же, как и железобетонных. Она складывается из стоимости матрицы и стальной фибры, а также трудозатрат на приготовление, укладку и термовлажностную обработку сталефибробетонной смеси.

В мировой практике обычно применяют сталефибробетон с процентом армирования не более 1.5 (как правило, 0.5 ...1 %). Из такого сталефибробетона, как правило [4], изготавливают относительно массивные строительные конструкции, такие, например, как плиты высоких и низких свайных ростверков, фундаментные плиты, сваи, тоннельные обделки [1], причальные сооружения.

Перспективные области применения сталефибробетона

ЗАО "Институт "Оргэнергострой" совместно с ОАО "Атомэнергопроект" с 2009 года планомерно занимаемся вопросами применения сталефибробетона при возведении зданий и сооружений атомных электростанций (АЭС), в первую очередь несущей сталефибробетонной опалубкой, а также применением сталефибробетона в качестве горизонтальной и вертикальной гидроизоляции и для сооружения внешней защитной оболочки реакторного отделения АЭС. В процессе выполнения этих работ было изучено влияние вида и процента армирования на технологические характеристики сталефибробетонных смесей и основные механические характеристики сталефибробетона [5].

Проведенные лабораторные и натурные испытания показали, что высокие прочностные и эксплуатационные характеристики сталефибробетона позволяют получать тонкостенные (толщиной 15-30 мм) конструкции и конструктивные элементы. Их можно изготавливать как методом укладки (налива) сталефибробетонной смеси, как при обычном бетонировании, так и методом сухого или мокрого торкретирования. В качестве опалубки при изготовлении сталефибробетонных листов можно использовать стандартную ламинированную фанеру.

Для придания тонкостенным элементам конструкций неплоской формы при укладке сталефибробетонной смеси стандартным методом можно использовать, например надувную опалубку.

В случае изготовления объемных криволинейных и, в том числе, замкнутых конструкций, например, корпусов судов, конструкций цилиндрической или куполообразной формы, кабин (Рисунок 3) и т.п. целесообразно применять метод торкретирования. При этом, в зависимости от требований к поверхности опалубку можно размещать как с внешней, так и с внутренней стороны конструкции.



Рисунок 3 - Замкнутая сталефибробетонная кабина, выполненная методом сухого торкретирования

Метод сухого торкретирования позволяет наносить сталефибробетонную смесь на вертикальные и горизонтальные, в том числе потолочные поверхности, что позволяет выполнять с его помощью ремонт и усиление строительных конструкций.

Соответствующий подбор состава сталефибробетонной смеси позволяет производить распалубку тонкостенных элементов уже через сутки твердения в нормальных условиях (Рисунок 4).



Рисунок 4 - Распалубка сталефибробетонного листа толщиной 30 мм

Сталефибробетонные листы обладают хорошей адгезией с наносимым на них бетоном и теплоизоляционным материалам, что позволяет изготавливать комбинированные конструкции и выполнять ремонтные работы. Так, в случае повреждения корпуса судна или подводного сооружения они могут быть отремонтированы методом торкретирования.

Заключение

Высокие механические и эксплуатационные характеристики сталефибробетона, простая технология приготовления сталефибробетонной смеси и изготовления тонкостенных изделий и конструкций сложной формы, в т.ч. объемных, не требующая специ-

ализированного оборудования, низкая себестоимость открывают широкие возможности для его применения в судостроении и при возведении подводных сооружений.

Литература

1. Баженов Ю.М. 2012 "Пути развития строительного материаловедения: новые бетоны" // Технология бетонов.. № 3-4. С. 39-42.

2. Рабинович Ф.Н. 2012 "Композиты на основе дисперсно армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции". Москва: АСВ, 2004. 560 с.

3. Nell, W/, Greiff, M., 2006 "Innovative Konstruktionsmöglichkeiten mit Stahlfaserbeton," Beton und Stahlbetonbau N 10

4. Concrete Society Technical Report 63, 2007 'Guidance for the design of steel-fiber-reinforced concrete"

5. Ремнев В.В., Красновский Р.О., Шкутов Н.С. 2012 "Влияние характеристик стальной фибры на технологические и физико-механические свойства фибробетонов". Вестник отделения строительных наук РААСН, вып. 16, т. 2., С. 103.

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Лоскутов Ю.В.

Поволжский государственный технологический университет

424000, Россия, Республика Марий Эл, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина

loskutovyv@volgatech.net

Реферат

На основании линейной теории многослойных анизотропных оболочек и метода конечных элементов выполнено исследование упругого деформирования, напряжённого состояния и прочности тонкостенных криволинейных труб при чистом изгибе. Предложена методика расчета трубопроводов из полимерных композитных материалов. Труба представлена в виде тонкостенной торообразной оболочки с переменными параметрами армирования и толщиной стенки. Задача поставлена и решена как геометрически нелинейная: оболочка считается как предварительно напряжённая конструкция, учитывается влияние мембранных усилий. Мембранные усилия определяются в зависимости от внутреннего давления по формулам безмоментной теории тонких торообразных оболочек. Интенсивность внутреннего давления определяется для напорного стационарного внутреннего потока. Результаты расчётов сопоставлены с данными известных решений и экспериментов. Исследована зависимость гибкости трубы от внутреннего давления, геометрических и структурных параметров. Проведён анализ прочности многослойного композитного образца. В зависимости от геометрии, структуры пакета слоёв и схемы армирования дан сопоставительный анализ результатов.

Введение. Эксплуатация магистральных трубопроводов (нефтепроводов, газопроводов и т.д.) является одним из наиболее опасных источников нарушения экологического равновесия природной среды. В процессе эксплуатации линейные части трубопроводов могут разрушаться, приводя к техногенным катастрофам и загрязнению окружающей природной среды. Ликвидация последствий разрушения трубопроводов требует больших экономических затрат и приводит к необратимым экологическим последствиям [1].

Наиболее напряженными (в то же время и наиболее сложными в технологическом отношении) элементами трубопроводов являются криволинейные элементы (отводы или гибы). С одной стороны, они используются для обхода "препятствий", с другой – служат компенсаторами упругих деформаций. Упругие свойства гибов в решающей степени определяют поведение трубопровода под нагрузкой в целом.

Анализ литературы показывает [2], что существующие математические модели и методы относятся главным образом к конструкциям, изготовленным из традиционных (однородных и изотропных) материалов. Исследования с учетом особенностей слоисто-волоконистой структуры криволинейных трубопроводов из современных ПКМ практически отсутствуют.

Широкое применение композиционных материалов в современных конструкциях, стремление максимально использовать их достоинства определяет актуальность разработки методов исследования деформирования и напряженного состояния многослойных труб и трубопроводов. Поэтому одной из актуальных задач является задача расчета криволинейных труб из многослойных композитов.

Целью работы является разработка методики расчета композитных трубопроводов для гидромеханизации работ по улучшению лесосплавных путей.

Решаемые задачи:

- 1) разработка конечно-элементной математической (МКЭ) модели деформирования под нагрузкой криволинейных и прямолинейных участков трубопроводов, изготовленных из ПКМ методом намотки;
- 2) обоснование достоверности предложенной математической модели;
- 3) проведение расчетно-аналитического эксперимента с целью изучения распределений полей напряжений и деформаций под различными видами нагружения;
- 4) анализ влияния на напряженное и деформированное состояние технологии и способа намотки, внутреннего давления. Выявление основных зависимостей.

Математическое моделирование

С целью анализа упругого деформирования, напряженного состояния и прочности при изгибе многослойных композитных труб разработана конечно-элементная модель [2]. Криволинейная труба рассматривается как торообразная тонкая оболочка, плавно сопряженная с цилиндрическими оболочками (рис. 1).

Для дискретизации оболочки используется треугольный конечный элемент (КЭ). Это универсальный КЭ естественной кривизны, предназначенный для аппроксимации произвольных поверхностей [3]. Он имеет 6 узлов по 5 степеней свободы в каждом. Расчетные соотношения строятся на ос-

нове смешанной вариационной формулировки принципа Хеллингера-Рейсснера и теории анизотропных слоистых оболочек с использованием гипотез Тимошенко. На основе независимой интерполяции перемещений и деформаций строится матрица жёсткости КЭ.

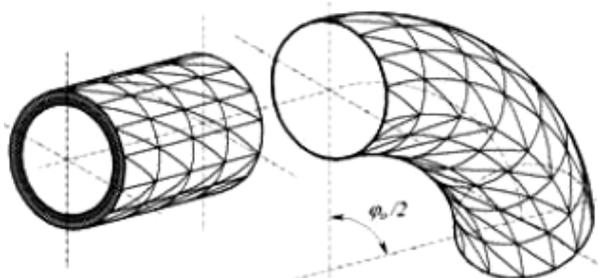


Рисунок 1 - Расчетная модель

Система разрешающих уравнений МКЭ имеет вид:

$$[C(p_m)]\{q\} = \{P\}, \quad (1)$$

где $[C(p_m)]$ – матрица жесткости конструкции, $\{P\}$ – вектор нагрузки, p_m – интенсивность внутреннего давления. Оболочка считается как предварительно напряжённая конструкция: учитывается влияние мембранных усилий. Мембранные усилия определяются в зависимости от внутреннего давления по формулам безмоментной теории тонких торообразных оболочек. При этом интенсивность внутреннего давления считаем как $p_m = p + \rho_{ж} v_m^2$, где p и v_m – составляющие давления и скорости стационарного внутреннего потока, $\rho_{ж}$ – плотность жидкости.

Предполагается, что жидкость идеальная, а поток – напорный. Рассматривается статическое нагружение трубы изгибающим моментом. Момент действует в плоскости кривизны трубы. Задача рассматривается как физически и геометрически линейная. Перемещения и деформации считаются малыми, геометрические параметры: углы укладки волокон, толщины слоёв и пакета в целом в процессе нагружения не изменяются.

Коэффициенты матрицы жесткости КЭ вычисляются численно посредством семиточечной схемы квадратур Гаусса на треугольной области. В каждой точке интегрирования рассчитываются параметры армирования, толщины стенки и эффективные упругие постоянные в зависимости от упругих свойств волокна и матрицы, а также объёмной доли волокон в композите [4]. Анализ распределений углов и коэффициентов армирования, а также эффективных упругих постоянных для многослойных криволинейных труб в зависимости от технологической схемы намотки представлен в [2, 4]. Для расчёта упругих постоянных пакета слоёв используется структурная модель [5].

С целью оценки эффективности и точности расчёта выполнено тестирование модели. В [2] показано применение разработанной модели МКЭ к расчёту металлических труб из однородных и изотропных материалов. Дана оценка точности, на ря-

де примеров доказана сходимость приближенных решений МКЭ к точным аналитическим решениям и экспериментам.

Рассмотрим многослойные перекрестно-армированные трубы. На рис. 2 представлена тонкостенная цилиндрическая оболочка, нагруженная сосредоточенной силой $P = 0,98$ кН. Геометрические характеристики оболочки: $r = 0,112$ м; $r/h = 29,1$; $L = 2,37 r$. Края оболочки шарнирно закреплены "по кольцу". Оболочка изготовлена из ортогонально армированного стеклопластика (стеклотекстолита): модули упругости стенки $E_x = 19,6$ ГПа, $E_y = 30,5$ ГПа; модули сдвига $G_{xy} = 4,76$ ГПа, $G_{xz} = G_{yz} = 2,06$ ГПа; коэффициенты Пуассона $\nu_{xy} = 0,0915$, $\nu_{yx} = 0,1425$. Здесь r – средний радиус поперечного сечения; h – толщина стенки. Индексы x , y и z определяют осевое, окружное и радиальное направления соответственно.

Результаты расчёта МКЭ сопоставлены с данными аналитического решения и эксперимента [6]. Анализ результатов (рис. 2) показывает, что расчёт МКЭ для прогиба w в радиальном направлении практически совпадает с известными данными.

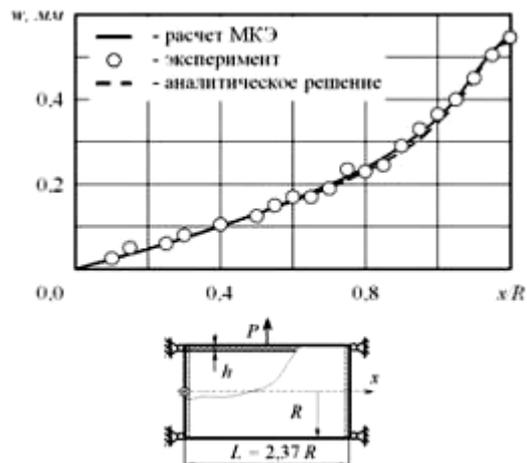


Рисунок 2 - Цилиндрическая оболочка

Исследуем гибкость серии из 4 образцов с углами $\phi_0 = 180^\circ$. Геометрические размеры образцов приведены в табл. 1. Здесь же указаны номинальные толщины стенки и углы укладки волокон на экваторе. Образцы изготовлены путём перекрестной спиральной намотки стеклоткани Т-10, предварительно пропитанной связующим УПЭ-22-27. Ширина ленты – 30 мм, номинальное число слоёв – шесть. Упругие характеристики стеклоткани: $E_1 = 29,4$ ГПа, $E_2 = 17,8$ ГПа, $G_{12} = 3,01$ ГПа, $\nu_{12} = 0,123$ получены экспериментально [7] путём испытаний трубчатых и плоских образцов на растяжение, сжатие и кручение (сдвиг). Индекс 1 обозначает направление основы ткани, индекс 2 – направление утка.

В табл.1 расчетные коэффициенты увеличения гибкости k сопоставлены с данными эксперимента [7]. Коэффициент k показывает, во сколько раз гибкость криволинейной трубы больше гибкости прямолинейной трубы-аналога. Он определяется как отношение приращений кривизны:

$$k = \bar{K}_o / K_o,$$

где $\bar{K}_o = \Delta\varphi_o / (R\varphi_o)$, $K_o = M_z / (E_x I_z)$.

Таблица 1

Радиус кривизны оси трубы R , см	Угол укладки волокон на экваторе θ_m , °	Средний радиус поперечного сечения r , см	Номинальная толщина стенки трубы h_m , см	r/R	r/h_m	Коэфф-ты увеличения гибкости	
						Эксперимент [7]	Расчет МКЭ
8,0	85,6	4,16	0,191	0,52	21,8	13,9	12,5
9,0	83,5	3,12	0,179	0,35	17,4	8,1	6,7
8,0	79,8	2,13	0,172	0,27	12,4	4,9	3,1
12,0	78,9	2,19	0,163	0,18	13,5	3,2	2,3

Здесь $\Delta\varphi_o$ – приращение центрального угла φ_o криволинейного участка при действии изгибающего момента M_z , $E_x I_z$ – жёсткость поперечного сечения трубы на изгиб. Констатируем, результаты расчёта МКЭ удовлетворительно согласуются с результатами эксперимента [7]. Расхождение результатов объясняется некоторой неопределённостью граничных условий, связанных с передачей нагрузки (изгибающих моментов) на опытные образцы.

Анализ жёсткости композитных образцов

Рассмотрим образец криволинейной трубы с угломгиба $\varphi_o=180^\circ$. Геометрические размеры трубы приведены в табл. 2, где R – радиус кривизны оси, r – средний радиус поперечного сечения, h_m – толщина стенки на экваторе. Толщина стенки на экваторе тора равняется толщине стенки примыкающих цилиндрических оболочек.

Таблица 2

R , мм	r , мм	h_m , мм	r/R	r/h_m
190,5	62,74	1,57	0,329	40,0

Труба изготовлена путём перекрестной спиральной намотки двух симметричных систем волокон на оправку. Волокна уложены по геодезическим траекториям. Материал трубы – органопластик Kevlar 49/PR-286 имеет следующие характеристики [8]: $E_1=64,1$ ГПа, $E_2=5,38$ ГПа, $G_{12}=2,07$ ГПа, $\nu_{12}=0,35$. Индексы 1 и 2 соответствуют направлениям вдоль и поперёк волокон. В результате намотки формируется симметричная относительно срединной поверхности структура пакета слоёв с переменными параметрами армирования. Распределения параметров армирования и толщин стенок показаны в [2, 4].

На рис.2 представлена расчетная модель композитного образца. С учетом симметрии изображена лишь его половина. Использована регулярная

конечно-элементная сетка $M \times N$, где $M=36$ и $N=15$ – количество делений в окружном и осевом направлениях соответственно. Расчетная модель образца включает 1080 КЭ с 11315 степенями свободы.

На рис. 3 представлены графики коэффициентов увеличения гибкости k в зависимости от угла укладки волокон на экваторе θ_m и параметра тонкостенности $r/h_m=22,5; 40; 50$ и 69 . Констатируем, что при увеличении угла θ_m и толщины стенки h_m гибкость криволинейной трубы уменьшается. Труба при изгибе становится более жёсткой.

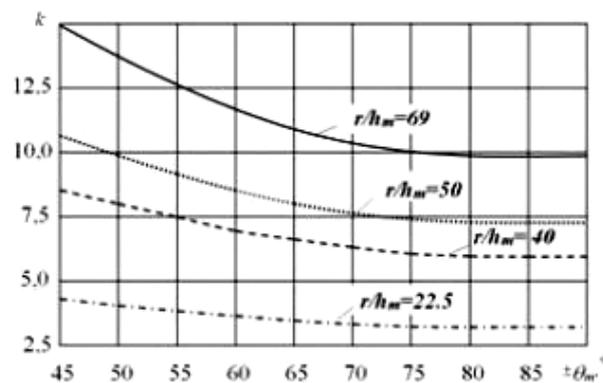


Рисунок 3 - Зависимость коэффициента k от угла укладки θ_m и параметра тонкостенности r/h_m

На рис. 4 представлены графики зависимостей коэффициентов увеличения гибкости k от угла θ_m и интенсивности внутреннего давления $p_m = 0; 0,35; 0,7$ и $1,4$ МПа. Из графиков видно, что с увеличением внутреннего давления p_m и угла θ_m гибкость криволинейной трубы уменьшается. При давлении $p_m=1,4$ МПа расчётные значения коэффициентов k приближаются к единице. При повышенном давлении эффект Кармана (сплющивание поперечного сечения при изгибе) заметно ослабляется.

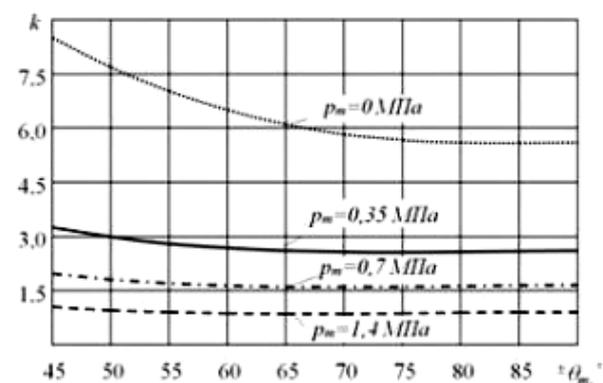


Рисунок 4 - Зависимость коэффициента k от угла укладки волокон θ_m и внутреннего давления p_m

Оценка прочности композитных образцов

Расчётная оценка прочности композитного образца включает несколько стадий, соответствующих естественным структурным уровням материала. На каждой стадии определяются осреднённые физико-механические характеристики. Упругие свойства композита описываются при помощи мо-

дели ортотропного тела. Применяется схема послойного анализа [5, 8], которая включает:

- Расчёт приведённых упругих характеристик пакета с учётом свойств однонаправленного слоя и структуры материала.

- Формирование и решение системы разрешающих уравнений (1), расчёт узловых перемещений и внутренних усилий в стенке.

- Определение приведённых напряжений и деформаций однонаправленного слоя в зависимости от внутренних усилий в стенке (обратный переход).

Отметим, что при нагружении однонаправленного слоя реализуются различные формы разрушения: разрыв волокон, разрыв связующего, расслоение материала, разрыв адгезионных связей волокон и связующего, потеря устойчивости волокон при сжатии и т.д. Эти формы считаются взаимно независимыми. Критерии прочности имеют следующий вид [10, 11]:

$$F_{-1} \leq \sigma_{11} \leq F_{+1}; \quad F_{-2} \leq \sigma_{22} \leq F_{+2}; \quad |\sigma_{12}| \leq F_{12}, \quad (2)$$

где F_{+1} и F_{+2} – предельные растягивающие напряжения вдоль и поперёк волокон, F_{-1} и F_{-2} – соответственно предельные сжимающие напряжения, F_{12} – предельное касательное напряжение чистого сдвига; σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} – расчётные напряжения, записанные в главных осях анизотропии материала. Прочность однонаправленного слоя при плоском напряжённом состоянии характеризуется пятью независимыми пределами прочности, каждый из которых определяется на основе отдельного эксперимента.

Следует иметь в виду, что прочность органических волокон, волокон стекла, бора, углерода на разрыв на один – два порядка выше прочности матрицы. Поэтому, при прочих равных условиях, характеристики прочности однонаправленного слоя пропорциональны содержанию волокон. Считаем, что с увеличением коэффициента армирования ψ предел прочности вдоль волокон линейно возрастает, то есть:

$$F_{+1} = \psi \sigma' + (1 - \psi) \sigma'' \quad (3)$$

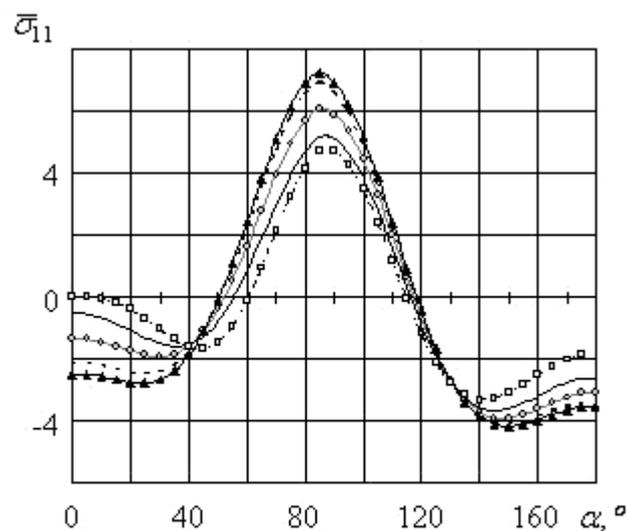
Здесь σ' и σ'' – пределы прочности волокна и матрицы соответственно. Соотношение (3) отражает так называемое “правило смесей” – вклад каждого компонента пропорционален его объёмной доле в композите.

При анализе прочности однонаправленного слоя определяются напряжения вдоль и поперек волокон ($\bar{\sigma}_{11}$ и $\bar{\sigma}_{22}$), а также касательные напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ в точках наружной и внутренней поверхностей стенки центрального сечения (рис. 5, 6).

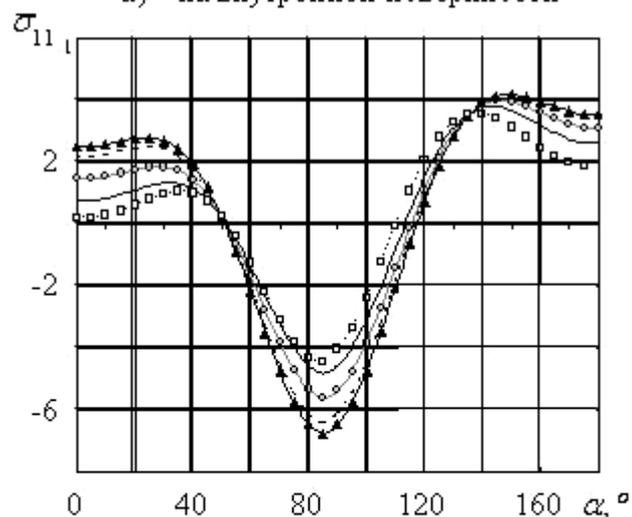
Напряжения представляются в безразмерном виде: $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$, где $\sigma_0 = M_z r / I_z$, I_z – осевой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, $M_z = 0,1$ Нм – изгибающий момент.

На рис. 5 и 6 показано распределение нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$ и $\bar{\sigma}_{22}$ соответственно вдоль и поперёк волокон; на рис. 7 – распределение касательных напряжений $\bar{\sigma}_{12}$. В распределении напряжений наблюдается определённая симметрия:

напряжения на наружной поверхности (рис. 5, а и 6, а) с точностью до 7–8% равны напряжениям на внутренней поверхности (рис. 5, б и 6, б) трубы.



а) - на внутренней поверхности



б) - на наружной поверхности

—▲— — $\theta_m = 90^\circ$; —○— — $\theta_m =$
— — — — $\theta_m = \pm 60^\circ$; — — — — $\theta_m = \pm 80^\circ$;
—□— — $\theta_m = \pm 50^\circ$.

Рисунок 5 - Нормальные напряжения вдоль волокон

Интерпретация результатов вычислительного эксперимента

Сравнительный анализ кривых на рис. 5 - 7 показывает, что при увеличении угла укладки волокон на экваторе тора: $\theta_m = \pm 50^\circ, \pm 60^\circ, \pm 70^\circ$ и 90° максимальные значения нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$ увеличиваются, а $\bar{\sigma}_{22}$ – наоборот, уменьшаются. Максимальные значения касательных напряжений $\bar{\sigma}_{12}$ при увеличении угла θ_m сначала увеличиваются, затем – уменьшаются. Наименьшие значения напряжений $\bar{\sigma}_{12}$ получаются при $\theta_m = 90^\circ$.

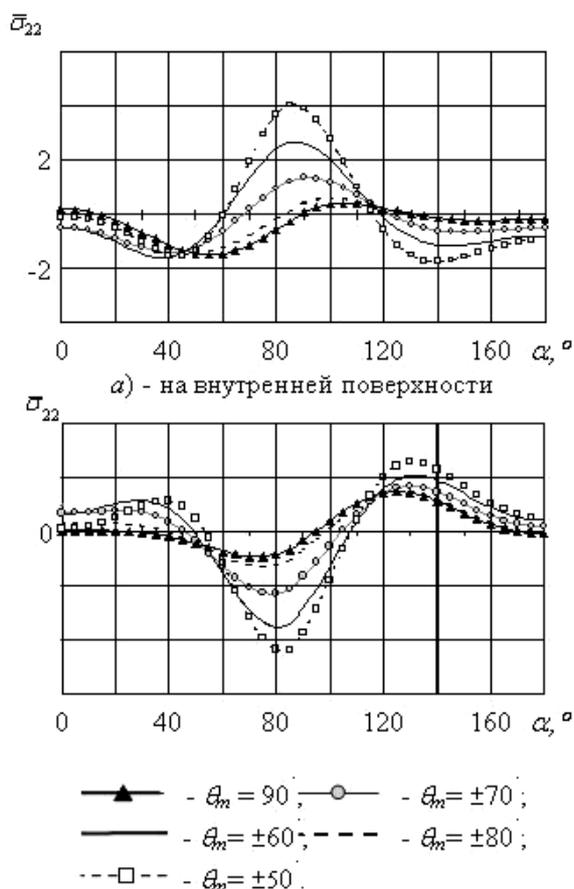


Рисунок 6 - Нормальные напряжения поперек волокон

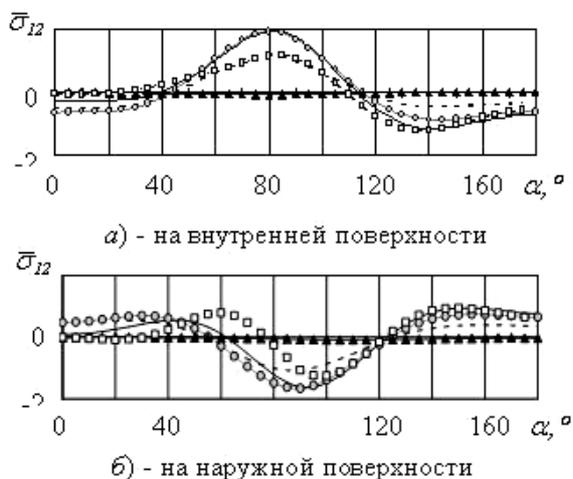


Рисунок 7 - Касательные напряжения

Наиболее напряжённой областью при изгибе оказывается область наружной поверхности трубы с координатой $\alpha \approx 90^\circ$ (на экваторе тора). Эта область работает в условиях двухосного растяжения (причём как вдоль, так и поперёк волокон) и сдвига. Здесь нормальные напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ и касательные напряжения $\bar{\sigma}_{12}$ получаются одного порядка с нормальными напряжениями $\bar{\sigma}_{11}$, действующими вдоль волокон.

Армированный пластик – материал с ярко выраженной анизотропией прочности. Для однонаправленного органопластика пределы прочности

при растяжении вдоль и поперёк волокон, а также при чистом сдвиге относятся как [12]

$$\frac{F_{+1}}{F_{+2}} \approx 80 \div 110 \quad \text{и} \quad \frac{F_{+1}}{F_{12}} \approx 50 \div 70. \quad (4)$$

В табл. 3 дано сопоставление относительных значений максимальных расчётных напряжений $\bar{\sigma}_{11}/\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{11}/\bar{\sigma}_{12}$ в зависимости от угла θ_m .

Таблица 3

Угол θ_m	Отношение максимальных напряжений	
	$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\sigma}_{22}}$	$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\bar{\sigma}_{12}}$
90°	17	97
80°	11,5	14,5
70°	4,5	3,1
60°	1,9	2,6
50°	1,2	3,8

Очевидно, форма разрушения зависит от соотношений напряжений. Сопоставляя отношения (4) с данными табл.3, заключаем, что при чистом изгибе многослойного образца форма разрушения однонаправленного слоя не зависит от угла укладки волокон на экваторе. При любом угле θ_m вначале будет иметь место разрыв связующего или адгезионных связей волокон и связующего. Это приводит к образованию трещин, направленных вдоль волокон.

При работе однонаправленного композита в составе пакета многослойной трубы, содержащего разноориентированные слои, после разрушения отдельного слоя этот слой будет продолжать работать и вносить вклад в общую несущую способность конструкции. В то же время разрушение отдельного слоя приводит к зарождению трещины. В свою очередь, трещины в стенках труб и трубопроводов приводят к разгерметизации системы в целом, к нарушению её функциональных свойств.

Выводы

1. Предложена методика расчета композитных трубопроводов. В рамках методики представлена расчетная модель многослойной криволинейной трубы, изготовленной намоткой волокнистого композита. Труба рассматривается как тонкостенная торообразная оболочка с переменными параметрами армирования и толщиной стенки. Для вывода расчётных зависимостей используются теория анизотропных слоистых оболочек и метод конечных элементов.

2. Выполнен расчет тонкостенной цилиндрической оболочки из ортогонально армированного стеклопластика. Показано, что результаты расчета МКЭ хорошо согласуются с данными известных аналитического решения и эксперимента.

3. Проведён анализ жёсткости при чистом изгибе серии образцов многослойных криволинейных труб из перекрестно армированного стеклопластика. Расчетные коэффициенты увеличения гибкости

сопоставлены с данными известного эксперимента. Получено удовлетворительное их соответствие друг другу.

4. Рассмотрена зависимость гибкости многослойной криволинейной трубы от внутреннего давления, геометрических и структурных параметров. Показано, что с увеличением внутреннего давления, толщины стенки и угла укладки волокон на экваторе тора гибкость трубы, связанная со сплюсчиванием поперечного сечения (эффектом Кармана), уменьшается.

5. Выполнен анализ прочности многослойного композитного образца. В зависимости от геометрии, структуры пакета слоёв и схемы армирования дан сопоставительный анализ результатов.

Результаты получены при поддержке гранта РФФИ.

Литература

1. Методика определения ущерба, причиненного окружающей природной среде при авариях на магистральных нефтепроводах. – М.: Минтопэнерго РФ, 1996. – 68 с.

2. Куликов, Ю.А. Механика трубопроводов из армированных пластиков / Ю.А. Куликов, Ю.В. Лоскутов. - Йошкар-Ола: Изд-во МарГТУ. 2004. -156 с.

3. Попов, Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами / Б.Г. Попов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1993.–294 с.

4. Лоскутов, Ю.В. Упругие характеристики многослойных криволинейных труб из армированного пластика / Ю.А. Куликов, С.В. Шлычков, Е.Б. Темнова // Механика композиционных материалов и конструкций, ИПриМ РАН. - М, 2006.- Т.12, № 2.- С. 219-233.

5. Алфутов, Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов.- М.: Машиностроение, 1984. - 264 с.

6. Елпатьевский, А.Н. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов / А.Н. Елпатьевский, В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.

7. Тышкевич, В.Н. Экспериментальное исследование прочности и жесткости стеклопластиковых криволинейных труб при чистом изгибе / В.Н. Тышкевич, В.Н. Харитонов // Волгогр. гос. техн. ун-т. - Волгоград, 1998. - 11 с. (Деп. рук. ВИНТИ; № 390-В98).

8. Зиновьев, П.А. Термостабильные структуры многослойных композитов / П.А. Зиновьев // Механика конструкций из композиционных материалов / Под ред. В.В. Васильева и В.Д. Протасова. – М.: Машиностроение, 1992. – С.193-207.

9. Лоскутов, Ю.В. Прочность и жёсткость криволинейных многослойных композитных труб при чистом изгибе / Ю.В. Лоскутов, Ю.А. Куликов // Механика композиционных материалов и конструкций, ИПриМ РАН. - М., 2008. - Т.14, № 2. - С. 157-166.

10. Zinoviev, P.A. Strength of multilayered composites under a plane-stress state / P.A. Zinoviev, S.V. Grigoriev, O.V. Lebedeva, L.P. Tairova // Composite Science and Technology. - 1998. -V.58. - P.1209-1223.

11. Зиновьев, П.А. Предельные возможности многослойных композитных структур / П.А. Зиновьев, А.А. Смердов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. - 1994. - Т.1. - С.7-17.

12. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ОБЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТА ПО ДАННЫМ ПРЕССИОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Пилягин А.В.

Чебоксарский политехнический институт (филиал) МГОУ

428022, Чебоксары, ул. П. Лумумбы, 8

Аннотация

Приводится уточненная методика определения модуля общей деформации грунтов, используемого в расчетах оснований фундаментов по деформациям

Annotation

Provides improved technique for determining the deformation modulus of soil used in the calculation of the foundation base to deformation

Требования норм расчета оснований фундаментов зданий и сооружений по деформациям приводит к необходимости определения деформационной характеристики грунта – модуля общей деформации. Методика определения модуля деформации по данным прессиометрических испытаний изложена в ГОСТ 20276-99. В соответствии с данным ГОСТом модуль деформации определяется по линейному участку кривой зависимости изменения радиуса скважины в зависимости от приложенного давления по формуле

$$E = k_z r_0 \frac{\Delta P}{\Delta r}, \quad (1)$$

где r_0 – радиус скважины после приложенного давления; ΔP – приращение давления; Δr – увеличение радиуса скважины в интервале указанных давлений.

Коэффициент k_z рассматривается как корректирующий коэффициент, принимающий при испытании в медленном режиме следующие значения: для песка и супеси $k_z = 1,3$; для суглинка $k_z = 1,35$ и для глин $k_z = 1,42$. При проведении испытаний по быстрому режиму значения k_z принимаются по таблице 1.

Таблица 1 - Значение коэффициента k_z

Наименование грунта	Глубины испытаний
	до 10 м (10ч20 м)
Глинистый грунт при I_L равном: $I_L < 0,25$ $0,25 \leq I_L < 0,5$ $I_L > 0,5$	2 (1,75)
	3 (2,5)
	4 (3,5)

Нетрудно заметить, что коэффициент k_z в первом случае заменяет собой величину $(1+m)$, приводимую в прежних редакциях ГОСТов соответственно для песков и супесей $m = 0,3$; суглинков $m = 0,35$ и глин $m = 0,42$. Анализ таблицы 1 показывает, что с ростом показателя текучести увеличивается значе-

ние k_z , а следовательно и модуль общей деформации, что не соответствует действительности.

Кроме того значение k_z снижается с увеличением глубины скважины, что приводит к снижению модуля общей деформации. Фактически модуль общей деформации грунтов с увеличением глубины должен возрастать. Как известно, формула определения модуля общей деформации грунта по данным прессиометрических испытаний базируется на осесимметричной задаче Ламе о напряжениях и перемещениях толстостенной бесконечно длинной трубы под действием внутреннего и внешнего давлений.

Полное решение задачи Ламе можно найти в курсах теории упругости. Нас интересуют перемещения трубы под действием внутреннего давления P_v и наружного давления P_n от собственного веса грунта на глубине проведения испытаний.

Обратимся к выводу формулы Ламе (рис. 1а), для чего рассмотрим равновесие элементарной трапеции $A_1B_1C_1D_1$ сечения цилиндра с центральным углом 2α . На боковых гранях A_1B_1 и C_1D_1 будут действовать окружные напряжения u_n ; а на внутренней поверхности элемента A_1D_1 радиальные u_r . На внешней границе B_1C_1 радиальные напряжения будут равны $u_r + du_r$. В виду симметрии кольца и нагрузок выделенный элемент не будет перекашиваться, следовательно, на его гранях будут отсутствовать касательные напряжения. Поэтому напряжения u_r и u_n будут главными, а величина u_n не будет зависеть от полярного угла α .

Уравнение равновесия для элемента $A_1B_1C_1D_1$ в виде суммы всех сил на нормаль к цилиндрической поверхности выглядит следующим образом

$$-\sigma_r \cdot r \cdot d\beta + (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) \cdot d\beta - 2\sigma_\theta \cdot dr \cdot \sin \frac{d\beta}{2} = 0, \quad (2)$$

Данное выражение приводится к виду

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (3)$$

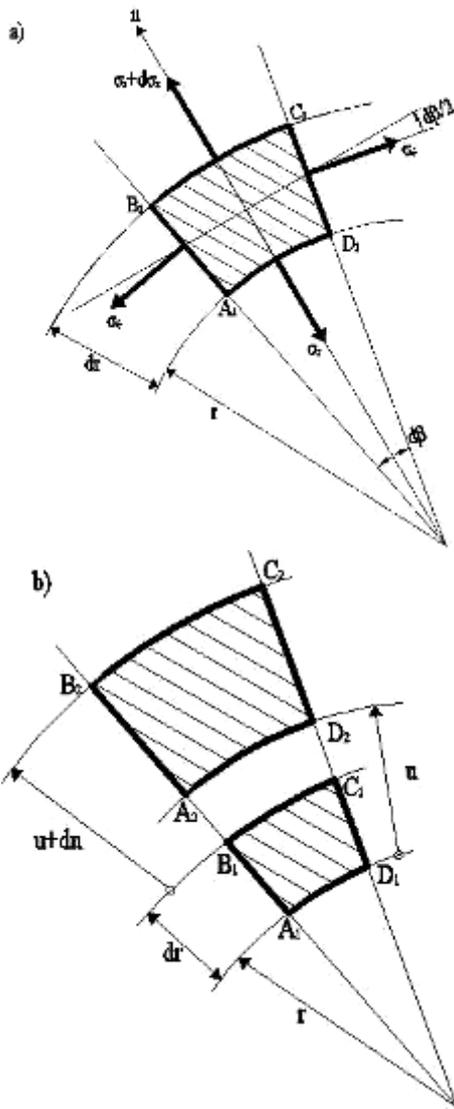


Рис.1. Схема напряженного (а) и деформированного (б) состояния части трубы

Рассмотрим деформации элемента $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1б). В виду симметрии увеличение внутреннего давления приведет к радиальному перемещению всех точек цилиндра. Так, точки A_1 и D_1 сместятся в радиальном направлении на величину (u) в положения A_2 и D_2 , а точки B_1 и C_1 – на величину $u+du$ в положения B_2 и C_2 .

Тогда относительная радиальная деформация грани A_1B_1 будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \frac{BB_1 - AA_1}{AB} \\ &= \frac{(u + du) - u}{dr} = \frac{du}{dr}, \end{aligned} \quad (4)$$

Относительная окружная деформация грани A_1D_1 равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{A_2D_2 - A_1D_1}{A_1D_1} = \\ &= \frac{(r + u) \cdot d\beta - r \cdot d\beta}{r \cdot d\beta} = \frac{u}{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с законом Гука для плоского напряженного состояния можно записать

$$\sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta), \quad (6)$$

С учетом выше изложенного получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами относительно радиальных перемещений, т.е.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad (7)$$

Общее решение данного уравнения сводится к виду

$$u = A \cdot r + B / r, \quad (8)$$

где A и B – постоянные интегрирования, вычисляемые с учетом граничных условий.

Постоянные интегрирования A и B вычисляются при совместном решении следующих уравнений

$$\text{при } r = r_n, \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - B \frac{1-\mu}{r_n^2} \right] = \sigma_n, \quad (9)$$

$$\text{при } r = r_g, \quad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[A(1+\mu) - B \frac{1-\mu}{r_g^2} \right] = \sigma_g$$

Решение данных уравнений дает следующие значения

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{E} \left(\frac{r_g^2 \cdot \sigma_g - r_n^2 \cdot \sigma_n}{r_n^2 - r_g^2} \right), \\ B &= \frac{1-\mu}{E} \left(\frac{r_g^2 \cdot r_n^2 (\sigma_g - \sigma_n)}{r_n^2 - r_g^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Для возможности использования решения данной задачи применительно к прессиометрическим испытаниям необходимо принять значение $r_n = \infty$ (бесконечное распространение грунта) и вычислить пределы

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} (\sigma_g \cdot r_g^2 - \sigma_n \cdot r_n^2) / (r_n^2 - r_g^2) = \sigma_n, \quad (11)$$

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} (r_g^2 \cdot r_n^2) (\sigma_g - \sigma_n) / (r_n^2 - r_g^2) = r_g^2 (\sigma_g - \sigma_n)$$

Тогда радиальные перемещения можно вычислить по формуле

$$u = \frac{r_g}{E} \left[(1+\mu)(\sigma_g - \sigma_n) - \sigma_n(1-\mu^2) \right], \quad (12)$$

Зная горизонтальные перемещения стенок камеры прессиометра (увеличение радиуса скважины) и давление внутри камеры u_b и снаружи u_n (давление грунта) модуль деформации грунта можно определить по следующей формуле

$$E = \frac{(1+\mu)(\sigma_g - \sigma_n) - \sigma_n(1-\mu^2)}{u}, \quad (13)$$

В качестве наружного давления P_n принимали величину природного давления на глубине расположения прессиометра. При горизонтальной поверхности грунта вертикальные и горизонтальные напряжения от собственного веса грунта будут равны

$$\sigma_{zy} = \sigma_{zg} = \gamma \cdot h, \quad (14)$$

где γ – удельный вес грунта в пределах глубины расположения (h) зонда.

В соответствии с решением Буссинеска о единичной силе, приложенной к поверхности грунта, горизонтальные напряжения равны

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{y^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right],$$

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right], \quad (15)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Горизонтальные напряжения u_x и u_y от собственного веса грунта при его горизонтальной поверхности должны быть равными, что имеет место только при $\mu = 0,5$, т.е. в дальнейших вычислениях необходимо учитывать только первое слагаемое значение горизонтальных напряжений, например, u_y можно получить двойным интегрированием выражения (15) в бесконечных пределах

$$\sigma_{y1} = \frac{3Pz}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y-\xi)^2 \cdot d\xi}{[(y-\xi)^2 + x^2 + z^2]^{5/2}} = \frac{Pz}{\pi(x^2 + z^2)}, \quad (16)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{Pz}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + z^2} = P = \mu, \quad (17)$$

Полученная формула учитывает коэффициент Пуассона грунта и глубину погружения прессиометра путем приложения внешнего давления, равного природному. Так как природное давление увеличивается пропорционально глубине погружения прессиометра, что ведет к снижению горизонтальных (радиальных) перемещений, а, следовательно, и увеличение модуля деформации грунта. Следовательно, в однородных грунтах модуль деформации грунта должен возрастать с увеличением глубины скважины (расположение прессиометра). В существующем ГОСТе эта зависимость обратная.

Литература

1. Методические рекомендации по определению деформационных и прочностных свойств глинистых пород методом прессиометрии. ВСЕГИН-ГЕО. М.1971.
2. ГОСТ 20276-99. Грунты. Методы полевого определения характеристик прочности и деформируемости. М.
3. ГОСТ 20276-85. Грунты. Методы полевого определения характеристик деформируемости

HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN HEAT EXCHANGERS BY SPHERICAL DIMPLES

Sergey I. Kaskov¹, Igor A. Popov², Alexey V. Schelchkov²

¹ Bauman Moscow State Technical University

² Kazan State Technical University named for A.N. Tupolev

¹ 2-nd Baumanskaya 5, Moscow 105005

² Russia, Kazan 420111, K.Marx Str. 10

Abstract

Presently, one of the most expensive kind of energy is heat. Its high cost is determined by the cost of its production (low efficiencies of the heat-generating installations, an increase in the fuel prices, considerable expenditures in heat production), as well as by the efficiency of the heat transmission and using. On the way from a producer to a consumer, heat is transformed several times in different heat-exchangers (HEs) and heat-exchanging elements, whose heat-efficiency coefficients are often not more than 40-70%. In power engineering of Russia, shell-and-tube HEs having smooth tubes continue to be mainly used. These HEs have considerable size, high degree of fouling, and small life time of a tube bundle. In addition, the use of different power-engineering equipment of an increased capacity leads to an increase in thermal and dynamic loads experienced. The problems of reducing mass-and size indexes of the heat-exchange equipment and enhancing of thermohydraulic efficiency of this equipment can be successfully solved by using heat-transfer intensifiers (HTIs). Intensifiers that considerably increase heat transfer with a moderate growth in pressure drop are of most interest. Such intensifiers include the following surface intensifiers: spiral and transversal wire inserts and knurls of different configuration, microfins, spherical, cylindrical, conical, and other type protrusions and holes, chevron stamped surfaces; etc. The main specifics of such a type intensifiers is that they affect a boundary layer (which has the greatest thermal resistance), destruct it with subsequent turbulization of flow in the wall layer. Since we impact only the wall layer, this does not give a considerable increase in the hydraulic resistance (pressure drop). Heat transfer intensity in channels of heat-exchanging equipment can increase as much as 2.5 times with a comparable increase in pressure drop. Another specifics of the surface intensifiers is a decrease in fouling of the heat-transfer surface because of an enhanced turbulence and vortex formation in the wall zone. This makes such a type intensifiers more attractive.

Nomenclature

D - diameter of the channel, m;
G - flow of coolant, kg/s;
Gr - Grashof number;
L - length of the channel, m;
 Nu_D - Nusselt number, calculated on D;
Pr - Prandtl number;
 Re_D - The Reynolds number, calculated on D;
 S_1, S_2 - longitudinal and transverse pitch of the projections;
cf - data for the cold fluid parameters;
d - diameter of the channel on the ledges, m;
e - data for the equivalent parameters;
f - density of the projections/dimples;
h - depth of the cut or the height of the projection, m;
hf - data for the hot fluid parameters;
t - temperature, °C;
0 - data for the smooth channel parameters;
w - data for the wall parameters.

Introduction

At present the majority of empirical correlations for hydrodynamics and heat transfer in channels with spherical holes have been obtained for turbulent regime of gas and fluid flows. Despite considerable amount of computational and experimental works, a complete flow pattern around surfaces with holes has not been gained for a wide range of Reynolds numbers, flow regime boundaries have not been revealed, a map of flow regimes in channels with spherical holes is still missing, pressure loss and heat transfer in the laminar regime have not been studied.

The present work offers the results of experimental investigation of flow in heat exchanger channels with spherical holes made on their wall surfaces.

At the this stage of investigation various flow regimes were specified and on the basis of the data obtained a map of flow regimes around surfaces containing systems of spherical holes was prepared. Identification of flow regimes was carried out by visualization based on smoke generation and smoke injection into a channel.

Physical models for processes taking place in holes and in their vicinity were developed; the results of investigation of pressure loss and heat transfer in channels with spherical holes in laminar, transient and turbulent flow regimes were presented and generalizing correlations for calculation of friction and heat transfer coefficients for all distinguished flow regimes were obtained. The effect of various factors on heat transfer and pressure loss was demonstrated, the factors in question being absolute and relative sizes of a channel and holes as well as operating parameters.

The results obtained demonstrate a possibility for considerable heat transfer augmentation in parallel with a comparable growth of pressure loss in some flow regimes, and show a promise for the use of spherical holes in channels of heat transfer equipment.

Thermohydraulic Efficiency Of Channels With Spherical Holes

In [1, 2, 27, 28], the results of comparative assessment of the efficiency of promising HTIs are given. The

comparison was conducted with the use of the relative mode of the universal Kirpichev's criterion

$$\bar{E}' = E' / E'_{sm}$$

where $E' = Q/N \cdot \Delta t$ and E'_{sm} are the energy coefficients for enhanced and usual channels having smooth tubes; Q and N are the heat load and the power for coolant pumping in a channel; Δt is the temperature difference between the flow and the wall.

The channel with intensifiers, which has the best thermohydrodynamic quality ($\bar{E}' = \max$), and the intensifiers that provide this quality, are considered as the most efficient (optimum) ones. Comparison of the best versions of intensifiers of different type can be easily done by means of the curves $\bar{E}'_{\max} = f(\text{Re})$ constructed for laminar and turbulent flows in unstricted channels (Figs. 1 and 2).

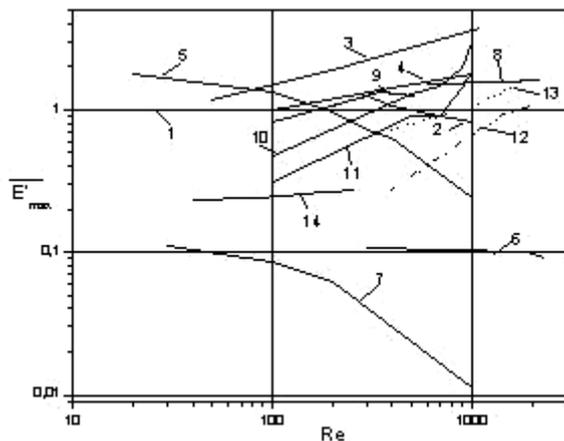


Figure 1 - Energy efficiency of surface heat-transfer intensifiers under laminar flow.

- (1) smooth channel;
- (2) spiral wire insert, $h/D_{cl} = 0.171$, $S_2/D_{cl} = 4.3$ [3];
- (3) transversal protrusions, $2h/D_{cl} = 0.2$, $S_2/D_{cl} = 0.66$ [4];
- (4) spiral knurling, $2h/D_{cl} = 0.28$, $S_2/D_{cl} = 0.72$ [5];
- (5) spiral wire insert, $h/D_{cl} = 0.079$; $\varphi = 76^\circ$ [6];
- (6) transversal protrusions, $2h/D_{cl} = 0.2-0.24$, $S_2/D_{cl} = 25$ [12];
- (7) diaphragms, $2h/D_{cl} = 0.75$, $S_2/D_{cl} = 0.32$ [7];
- (8) transversal protrusions [8];
- (9) spiral wire insert, $S_2/D_{cl} = 6.5$ [9];
- (10) transversal knurling (protrusions), $h/D_{cl} = 0.0625$, $S_2/D_{cl} = 0.706$ [10];
- (11) transversal knurling (holes), $h/D_{cl} = 0.0625$, $S_2/D_{cl} = 0.706$ [10];
- (12) spherical protrusions, $h/D = 0.21$, $h/H = 0.186$, $H/D = 1.12$ (our data);
- (13) spherical holes, $h/D = 0.21$, $h/H = 0.3$, $H/D = 0.71$ (our data);
- (14) spiral wire insert [11]; D is a diameter of a hole or a protrusion; h is a depth or a height of an intensifier (hole, protrusion, and the like), φ is an attack angle of the flow relative to an intensifier.

The results of an analysis showed that one of the mostly promising heat-transfer intensifiers is a spherical hole mechanically made (stamped, milled) in the heat transfer surface. In addition, this analysis enabled us to state

scientific and engineering recommendations and to determine optimal parameters of such intensifiers.

The forecast made in [23] regarding to prospects of application of spherical holes for heat transfer enhancement in laminar flows was substantiated by experimental studies. Within a range of $\text{Re} = 1000-2000$, spherical holes (curve 13 in Fig. 1) provided an advancing increase in heat transfer intensity (up to $\text{Nu}/\text{Nu}_{sm} \leq 3$) as compared to an increase in pressure drop (the latter was not more than $\xi/\xi_{sm} \leq 1.8$). The subscript sm stands for a smooth channel. In the above case, an increased efficiency of the channel with holes $\bar{E}' \approx 1.7$ was obtained as compared to that for a smooth tube. Hence, it is expedient to use spherical holes to enhance laminar heat transfer, because this reduces the mass, the dimensions, and the cost of heat exchangers.

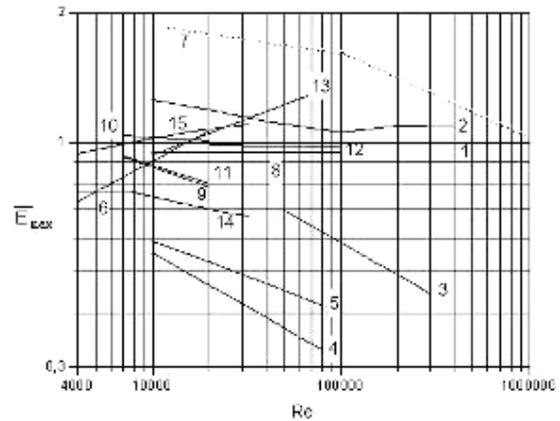


Figure 2 - Energy efficiency of surface heat-transfer intensifiers under turbulent flow.

- (1) smooth channel;
- (2) circular protrusions, $S_2/h = 50-100$, $h/D_{cl} = 0.01-0.02$ [13];
- (3) spiral protrusions, $S_2/h = 15$, $h/D_{cl} = 0.04$ [14, 15];
- (4) and (5) tapered, uncut, and cut protrusions, $S_2/h = 10$, $h/D_{cl} = 0.0625$, $\varphi = 45^\circ$ [16];
- (6) spherical protrusions, $S_2/h = 17$, $h/D_{cl} = 0.043$, $h/D = 0.5$ [17, 18];
- (7) spherical holes (our data), $h/D = 0.14$;
- (8) spherical protrusions and holes, $H/D = 0.25$, $S_2/h = 2.8$ [19];
- (10) small spherical protrusions [20];
- (10) and (11) small and large spherical protrusions [20];
- (12) spherical holes, $H/D = 0.66$, $h/D = 0.13$, $\bar{f} = 13\%$, $h/D_{cl} = 0.02$ [21];
- (13) spherical holes, $S_2/h = 1.1$, $h/D = 0.1$; $h/D_{cl} = 0.0225$ [22];
- (14) spherical protrusions (our data), $h/D = 0.14$.

The optimum transversal dimension of the holes is $h/D=0.21$. It is equal to the minimum value of this parameter within the range investigated (here, D and h are the diameter and the depth of a hole). Probably, within the range of Re numbers of 400-2000 that was studied (curve 13), the flow without attachment of the main stream to the hole bottom is realized [23]. Optimal relative dimension of a protrusion (hole) $h/H = \bar{h} = 0.3$ (H is a channel height). Within the range of \bar{h} studied, the value $\bar{h} = 0.3$ is approximately coincides with the mean value of this pa-

parameter. We can suppose that, since heat transfer increases considerably in a constricted channel with holes (subscript "cl") and hydraulic resistance of such a channel almost does not depend on the dimension $\bar{H}_{cl} = D/H$ [23-25], the minimum value of the parameter $\bar{H}_{cl} = 0,71$ from the investigated ones, i.e., $\bar{H}_{cl} = 0,71$ appears to be the most favorable. When this happens, to obtain increased values of Nu/Nu_{sm} , the hole in the wall can be rather deep ($\bar{h} = 0,3$). The results of our investigations of spherical holes and protrusions are presented in [26].

Under turbulent flow in unrestricted channels, the efficiency of small SHs appears to be higher than that for the other intensifiers only in a very narrow interval of Re numbers (see curve 13 in Fig. 2). This is especially so regarding to transversal circular protrusions (curve 2). It is typical of small SHs that an increase in heat transfer is approximately the same (comparable with) as that in hydraulic resistance ($Nu/Nu_{sm} \approx \varepsilon/\varepsilon_{sm}$). Only for curves 7 and 13 in Fig. 2, the ratio $Nu/Nu_{sm} > \varepsilon/\varepsilon_{sm}$. We must emphasize that the experimental data for small SHs, which correspond to the curves 7, 10, and 12 in Fig. 2, are in good agreement with each other.

Sometimes, deep SHs enable us to obtain in a channel somewhat more intense heat transfer as compared to small ones, however, the pressure in channels with deep SHs is high and, hence, the efficiency of the latter is lower (see curve 11 in fig. 2). Thus, to enhance heat transfer under laminar and turbulent flows, it is expedient to apply small holes [1, 2, 25, 27, 28].

It is most probable that the flow pattern in a hole with $h/D = 0.14$ corresponds to the scheme where there is no flow attachment to the hole bottom. Unfortunately, small holes with $h/D = 0.05-0.1$, in which flow attachment to the hole bottom takes place, are poorly investigated yet. In these holes, we can anticipate more significant heat transfer enhancement.

Flow Regimes And Heat Transfer In Channels With Spherical Holes

High efficiency of HSs evoked the necessity to conduct new studies on the effect of spherical holes and protrusions in a wide range of Re numbers (from 4000 to 30 000) and of the dimensions of such intensifiers. Up to present time, experimental dependences for the hydrodynamics and heat transfer in channels with SHs were obtained only for turbulent flow. In spite of considerable amount of calculations and experimental studies conducted by Leot'ev, Chudnovsky, Kiknadze, Rabinovich, Terekhov, Belen'kii, Kesarev, Kozlov, Shchukin, Isaev, Snideker, Donaldson, Ligrani, Khalatov, our works, and some others, there is no thorough picture regarding to the flow around the surfaces with SHs in a wide range of Re numbers, boundaries of the flow regimes are not revealed, the transition from laminar to turbulent flow is not investigated, there is no a map of the flow regimes in channels with SHs, and pressure drop and heat transfer under laminar flow are not investigated.

Due to the above reasons, we have studied the structure of the flow and heat transfer in channels with SHs, which were accompanied by flow visualization in constricted and unconstricted channels. This was done to refine a picture of the flow and create the basis of the flow-regime

map. The effect of the main geometric and regime parameters on pressure drop and heat transfer was determined, the comparative analysis of thermohydraulic efficiency of different surface intensifiers, including SHs, was conducted, and optimum regime and geometric parameters of the intensifiers were determined.

Figures 3 shows the experimental set-up and test sections.

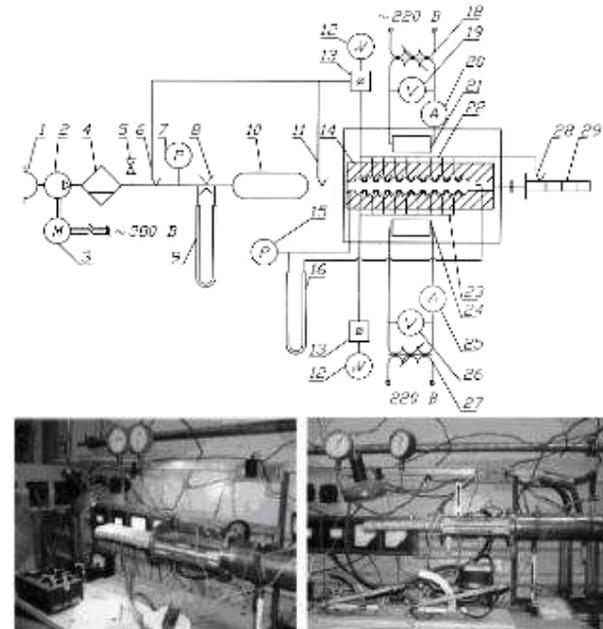


Figure 3 - Experimental set-up.

- 1 - air inlet, 2 - air compressor, 3 - electric driver,
- 4 - air filter, 5 - valve, 6, 11, 23, 28 - thermocouples,
- 7, 15 - manometer, 8 - orifice flowmeter,
- 9, 16 - U-manometer, 10 - receiver, 12 - millivoltmeter,
- 13 - commutator, 14 - test section,
- 18, 27 - electrical transformer, 19, 26 - voltmeter,
- 20, 25 - amperemeter, 21, 24 - heating element,
- 29 - mixing camera.

Thermohydraulic studies were conducted in a channel of rectangular cross section with a width of 90 mm and a height of from $H = 2$ to 12 mm. The channel had SHs with sharp edges. The parameters of SHs varied in the following range: $h = 0.7-5.0$ mm; $D = 5.14-10.0$ mm; the dimensionless design parameters of the intensifiers and the channel were as follows: $h/D = 0.1-0.5$; $h/H = 0.06-2.5$; $H/D = 0.2-2.3$. The relative increase in the surface area f due to the presence of SHs was from 60 to 80%; SHs had sharp edges. Such combination of the parameters provided heat transfer and pressure drop be studied in constricted and unconstricted channels with holes in a wide range of Reynolds numbers; the latter were calculated with the use of the equivalent diameter of a channel D_{eq} ($Re_{Deq} = 200-30000$). To provide visualization of flow in SH in more detail, in addition to the surfaces described above, we used surfaces with a single hole of larger dimensions (with a depth of 0.71-24.0 and a diameter of 7-58 mm), which correspond to a relative depth of 0.1-0.5. Identification of the flow regimes was performed by means of the smoke visualization. The specifics of the experimental data treatment, while calculating heat transfer and pressure drop, was the use of the effective flow velocity in channels with SHs. The latter was calculated with an account of the effective channel

height, which increased due to the growth of the channel cross-sectional area because of the presence of frequently located holes. While calculating heat transfer, an increase in the heat transfer surface was accounted for as well. When constructing the regime map and generalizing experimental data on heat transfer and pressure drop, a depth of SH was taken as a governing dimension.

Commercial Promising Heat Transfer Apparatuses With Surface Heat Transfer Enhancement

The experience with operation of heat transfer equipment makes it possible to design new heat exchangers with intensifiers having optimum configurations and sizes for different regime parameters.

Presently, heat transfer intensifiers in terms of spherical holes are used in the following applications:

- in cooling systems of the gas-turbine blades (Moscow Aviation Institute);
- while cooling fuel rods of nuclear reactors (Kurchatov Atomic Energy Institute, BASERT company);
- while cooling articles of radio-electronic devices (Bauman Moscow State Technical University);
- in chemical reactors (Office of Industrial Technologies, Exxon Mobil, BP, et al.);
- in heat exchangers of different assignment, etc.

Up to present time, SHs have been used only in traditional tubular and plate heat exchangers. Nevertheless, the results of the investigations of the surface intensifiers in the form of spherical hole have shown their considerable thermohydraulic efficiency, which makes it possible to create a new type of heat-exchanging elements and apparatuses on this basis, i.e., plate-type stamped-welded HEs. Among manufacturers of such elements we should point out the following: ViEX (Canada), Tranter (USA), Alfa Laval (Sweden), Mueller (USA), Buko (Germany), Hisaka (Japan), Superplate (the Netherlands), etc.

The basis of the new plate stamped-welded heat exchangers is constituted by universal formed flat or bent plates having one- or two-sided relieves. Such plates are assembled as plate heat-exchanging cassettes, which can withstand against considerable design pressure without being embedded in heat-exchanging apparatuses.

A form of stamped holes, their pitch and geometric characteristics are the significant parameters that determine thermal, hydraulic, and mechanical efficiency of a heat-exchanging apparatus. They are chosen individually for each the apparatus. Formed plates can be used outside of heat-exchanging apparatuses as independent heat-exchanging elements in technological processes. They can be placed inside or line the sections of cylindrical reservoirs and other power-and-technological equipment from outside.

Stamped plates have many advantages as compared to chevron plates of plate-type heat exchangers. For example, they permit changes in pressure (including cyclic oscillations) or pressure inversion; they are stable against warping.

Versatility of heat-exchanging elements made on the basis of surfaces with stamped holes makes it possible to construct different heat-exchanging apparatuses such as: with a shell that can be disassembled and welded heat-exchanging matrix, welded and soldered lamellas, free assemblies in highly fouled flows, hybrid-type heat exchangers.

On Figure 4 and 5, we present the prototype of high effective heat exchanger on the basis of surfaces with stamped holes.

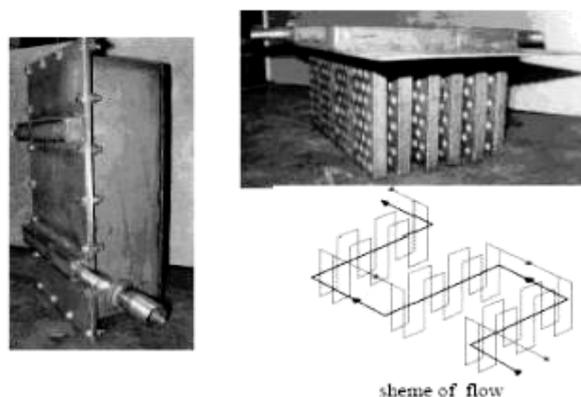


Figure 4 - Prototype of shell-and-plate heat exchanger on the basis of surfaces with stamped holes.

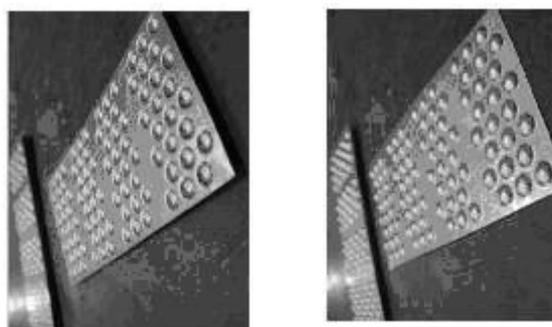


Figure 5 - Surfaces of shell-and-plate heat exchanger with stamped holes.

Resume

While studying the flow and heat transfer in channels with spherical holes, the following results were obtained:

- the energy efficiency of the use of spherical holes was shown; this was done not only for turbulent flows but for laminar flows, as well;
- the effect of the regime and design parameters on heat transfer was determined;
- the data on the flow and heat transfer in channels with SHs under forced convection was systemized;
- the regime map for flows in channels with SHs was developed.

To provide generalization and development of engineering techniques for designing optimum energy-efficient heat-exchange equipment, it is necessary to continue studies. The data presented can form the basis while developing new and testing existed mathematical models for numerical studies of the effects of different disturbing factors on heat transfer and pressure drop in channels with SHs (presently, such studies are the cheapest and the most fast ones). The data presented show that HEs with stamped and welded heat-exchanging elements have certain advantages as compared with other-type apparatuses. They are promising ones for wide commercial using.

Results of this work were used for implementation of the state contract of December 06, 2012 No. 12411. 1007 499. 09.214

References

1. Gortyshev Yu.F., Popov I.A., Olimp'ev V.V., Shchelchikov A.V., Kaskov S.I., Gureev V.M. Yesterday, today and tomorrow of heat exchange enhancement // Proceedings of the 5th Russian national conference on heat exchange. In 8 vol. V.1. Over-all problem papers. 2010. October, 25-29. Moscow, 2010. pp.37-40
2. Gortyshev Yu.F., Popov I.A., Olimp'ev V.V., Shchelchikov A.V., Kaskov S.I. Thermal and hydraulic efficiency of perspective methods of a convective heat transfer enhancement in heat exchange equipment channels. Kazan: Center of innovative technologies, 2009. 513p.
3. Yu.G. Nazmeev, A.M. Konakhin, B.A. Kumirov, et al., 1993. Experimental Study of Heat Transfer under Laminar Flow in Tubes with the Use of Spiral Wire Inserts," in Abstracts of the Anniversary Scientific Conference of the Kazan Branch of the Moscow Power Institute, Kazan, 12-14.
4. Yu.G. Nazmeev, A.M. Konakhin, B.A. Kumirov, et al., 1993. Heat Transfer and Pressure Drop for Laminar Flow of a Viscous Fluid in Artificially Roughened Tubes, *Teplotekhnika*, No. 4, 66-69.
5. Yu.G. Nazmeev and I.A. Konakhina, 1993. Intensification of Heat Transfer in Spirally Knurled Tubes Conveying Viscous Fluids, *Teplotekhnika*, No. 11, 59-62.
6. Uttarwar and Raja Rao, 1985. Heat Transfer Enhancement under Laminar Flow in Tubes Using Spiral Wire Inserts," *Teplotekhnika*, 107 (4), 160-165.
7. V.P. El'chinov, A.I. Smorodina, and V.A. Kirpikov, 1990. Enhancement of Convective Heat Transfer under Flow of Droplet Liquid of Increased Viscosity," *Teplotekhnika*, No. 6, 34-37.
8. Yu.V. Petrovskii and V.G. Fastovskii, 1961. Study of Heat Transfer and Pressure Drop under Oil Flow in a Model of the Turbogenerator Stator Steel, *Vestnik elektromyshlennosti*, No. 6, 16-22.
9. N.V. Zozulya and I. Ya. Shkuratov, 1964. Effect of Spiral Inserts on Heat Transfer under Viscous Liquid Flow in a Tube, in *Teplotekhnika i Teplotekhnika*, Naukova Dumka, Kiev [in Russian].
10. S.G. Zakirov, K.F. Karimov, and T.Kh. Sattarov, 1998. Application of Two-Dimensional Roughness for Heat Transfer Enhancement of a Viscous Medium, in Proc. 2nd Russian National Heat and Mass Transfer Conf., Moscow, MEI Publishing, Vol. 6, 114-116.
11. S.F. Baev, 1965. Marine Compact Heat Exchange Apparatuses. *Sudostroenie*, Leningrad [in Russian].
12. V.V. Olimp'ev, 1995. Calculated and Experimental Simulation of Heat Transfer and Pressure Drop of Discretely Roughened Channels in Heat-Transfer Equipment, Doctoral Dissertation in Techn. Sci., Kazan.
13. E.K. Kalinin, G.A. Dreitser, I.Z. Kopp, and A. S. Myakochin, 1998. Efficient Heat Transfer Surfaces
14. Yu.N. Bogolyubov, M.N. Lifshits, and G.V. Grigor'ev, 1981. Results of Studying and Commercial Application of Screw-Shaped Tubes, *Teplotekhnika*, No. 7, 48-50.
15. P.A. Savel'ev, 1981. Study of Pressure Drop of Spirally-Shaped Tubes at High Reynolds Numbers, *Izv. Vuzov, Energetika*, No. 5, 43-46.
16. S.K. Lau, R.E. McMillin, and J.K. Han, 1991. Heat Transfer Characteristics under Turbulent Flow in a Square Channel with Tapered Discrete Fins, *Sovremennoe Mashinostroenie*, No. 10, 99-107.
17. A. Berkoune and T.T. Al-Shemmeri, 1993. Pressure Drop and Friction Correlations of Compact Heat Exchangers with Dimpled Flat Tubes, in Proc. 1993 ISHTM Int. Conf. on New Developments in Heat Exchangers, Lisbon, Portugal.
18. P.L. Kirillov, Yu.S. Yur'ev, and V.P. Bobkov, 1984. Handbook on Thermohydraulic Calculations. Energoatomizdat, Moscow.
19. A.K. Anisin, 1983. Heat Transfer and Pressure Drop of a Tube Surface with Two-Sided Spheroidal Roughness Elements, *Izv. Vuzov, Energetika*, No. 3, 71-74.
20. I.L. Shrader, A.A. Dashchyan, and M.A. Gotovskii, 1999. High Intensity Tubular Air Heaters, *Teplotekhnika*, No. 9, 54-56.
21. G.P. Nagoga, 1996. Effective Methods of Cooling of High-Temperature Gas Turbine Blades. MAI, Moscow.
22. M.Ya. Belen'kii, M.A. Gotovskii, and B. M. Lekah, 1991. Experimental Study of Thermal and Hydraulic Characteristics of Heat Transfer Surfaces Arranged with Spherical Holes, *Teplotekhnika. Vys. Temp.* 29 (6), 1142-1147.
23. A.I. Leont'ev, V.V. Olimp'ev, E. V. Dilevskaya, and S. A. Isaev, 2002. The Nature of Heat Transfer Enhancement Mechanism on Surfaces with Spherical Holes, *Izv. RAN, Energetika*, No. 2, 117-135.
24. Yu.F. Gortyshev and V.V. Olimp'ev, 1999. Heat Exchangers with Enhanced Heat Transfer. Tupolev KGTU, Kazan [in Russian].
25. Yu.F. Gortyshev, V.V. Olimp'ev., and B.E. Baigaliev, 2004. Thermohydraulic Calculations and Design of Equipment with Enhanced Heat Transfer. Tupolev KGTU, Kazan.
26. I.A. Popov, Yu.F. Gortyshev, V. V. Olimp'ev, and A. V. Shchelchikov, 2004. Thermohydraulic Efficiency of the Use of Spheroidal Holes for Heat Transfer Enhancement in Channels, in Proc. of V Minsk Intern. Forum on Heat and Mass Transfer, Section 1, CD-ROM. Lykov ITMO, Minsk, Belarus,
27. Yu.F. Gortyshev, V.V. Olimp'ev, I.A. Popov, 2002. Efficiency of Promising Heat-Transfer Intensifiers for Commercial Applications (Review, Analysis, Recommendations), *Izv. RAN, Energetika*, No.3, 102-118
28. A.I. Leont'ev, Yu.F. Gortyshev, V.V. Olimp'ev, and I. A. Popov, 2005. Efficient Heat-Transfer Intensifiers for Laminar (Turbulent) Flows in Channels of Power Installations, *Izv. RAN, Energetika*, No. 1, 75-91.

INFLUENCE OF APPLICATION OF ETHANOL ON INDICATORS PROCESS OF COMBUSTION AND THE CONTENT OF NITROGENOXIDES IN EXHOUST GASES IN DIESEL 2Ч 10,5/12,0 DURING THE WORK WITH DOUBLE SYSTEM OF FUEL FEEDING

Vitaliy A. Lihanov, Sergey A. Verstakov, Anton A. Anfilatov

Vyatka state agriculture academy
133, Oktyabrsky prospectus, 610017 Kirov, Russia

Abstract

The article deals with the problems of toxicity of diesel engines and the possibility of expanding fuel base available modern diesels. The article contains the results of research conducted on the engine D-120 (2Ч10,5/12,0) when running on ethanol, using a double system of fuel injection. Presented the influence of using ethanol on combustion process and ecological parameters of a diesel engine at different load condition.

В Вятской государственной сельскохозяйственной академии на базе кафедры тепловых двигателей, автомобилей и тракторов согласно целям, задачам и методике стендовых испытаний были проведены испытания по исследованию влияния применения этанола на экономические, токсические показатели и показатели рабочего процесса дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе с ДСТ в зависимости от изменения установочного угла опережения впрыскивания топлива (УОВТ), как по дизельному процессу, так и при подаче этанола через ДСТ. Данные характеристики снимались для определения оптимальных значений регулировочных углов опережения впрыскивания топлива для дизельного процесса и при подаче этанола при равных значениях средних эффективных давлений. Необходимо отметить, что заводом-изготовителем (ВТЗ) для дизеля 2Ч 10,5/12,0, с ТНВД марки 2 УТНМ, установлен оптимальный установочный УОВТ равный 30° п.к.в. На рисунке 1 представлены графики влияния применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 при работе на этаноле при различных установочных УОВТ на содержание оксидов азота в ОГ при номинальной частоте вращения двигателя, снятые при θ_{om} (26...42°) и θ_s (22...38°). Если при оптимальных значениях установочных УОВТ ($\theta_{om} = 30^\circ$ и $\theta_s = 30^\circ$) содержание оксидов азота в ОГ дизеля составляет 506 ppm, то при большем значении $\theta_s = 34^\circ$ содержание оксидов азота в ОГ возрастает и составляет 527 ppm. При других значениях $\theta_s = 26^\circ$ и $\theta_s = 22^\circ$ содержание оксидов азота в ОГ составляет, соответственно, 488 ppm и 475 ppm.

На рисунке 2а представлены графики влияния применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 при работе с ДСТ при различных установочных УОВТ на объемное содержание r_{NOx} оксидов азота в цилиндре дизеля, рассчитанное по результатам экспериментальных данных, полученных при номинальной частоте вращения двигателя ($n = 1800 \text{ мин}^{-1}$), снятые при θ_{om} (26...34°) и θ_s (26...34°). Если при оптимальных значениях установочных УОВТ ($\theta_{om} = 30^\circ$ и $\theta_s = 30^\circ$) объемное содержание r_{NOx} оксидов азота в ОГ дизеля составляет 554 ppm, то при

большем значении $\theta_s = 34^\circ$ объемное содержание r_{NOx} в ОГ дизеля возрастает и составляет 577 ppm. При значении $\theta_s = 26^\circ$ объемное содержание r_{NOx} оксидов азота составляет 535 ppm.

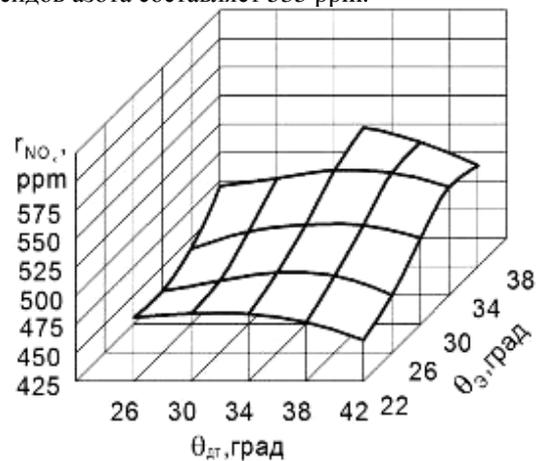


Рисунок 1 - Влияние применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 в зависимости от различных установочных УОВТ на содержание оксидов азота в ОГ при $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,584 \text{ МПа}$, $q_{цот} = 6,6 \text{ мг/цикл}$

На рисунке 2б представлены графики влияния применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 при работе с ДСТ при различных установочных УОВТ на массовую концентрацию C_{NOx} оксидов азота в ОГ, рассчитанную по результатам экспериментальных данных, полученных при номинальной частоте вращения двигателя ($n = 1800 \text{ мин}^{-1}$), снятые при θ_{om} (26...34°) и θ_s (26...34°). Если при оптимальных значениях установочных УОВТ ($\theta_{om} = 30^\circ$ и $\theta_s = 30^\circ$) массовая концентрация C_{NOx} оксидов азота в ОГ дизеля составляет 0,8 г/м³, то при большем значении $\theta_s = 34^\circ$ массовая концентрация C_{NOx} в ОГ дизеля возрастает и составляет 0,83 г/м³. При значении $\theta_s = 26^\circ$ массовая концентрация C_{NOx} оксидов азота составляет 0,77 г/м³. Кривые изменения массовой концентрации C_{NOx} оксидов азота в ОГ дизеля, полученные при установочном УОВТ $\theta_{om} = 26^\circ$ и различных углах впрыскивания этанола θ_s , показывают, что при установочных

УОВТ θ_3 , равных 30° и 34° , массовая концентрация C_{NOx} оксидов азота в ОГ дизеля равна, соответственно, $0,76 \text{ г/м}^3$ и $0,82 \text{ г/м}^3$.

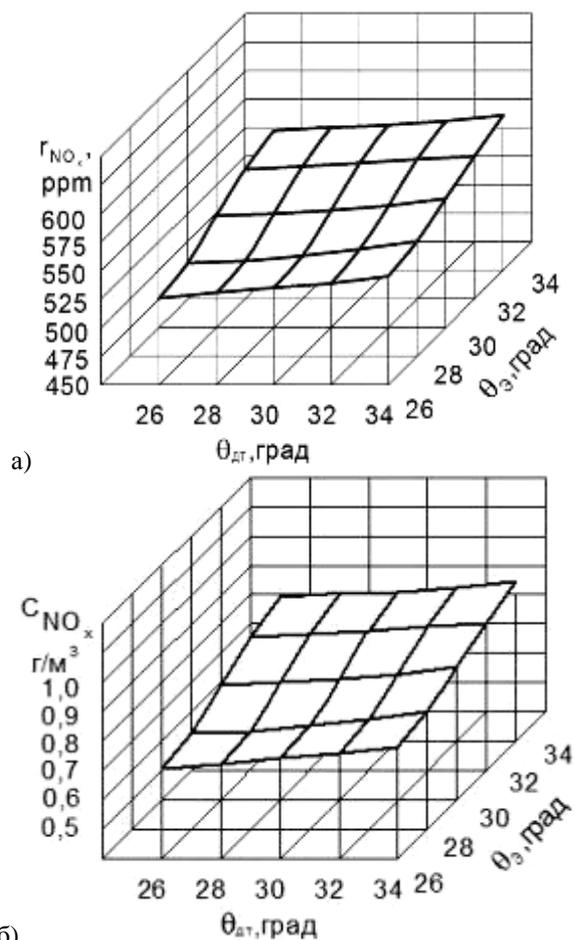


Рисунок 2 - Влияние применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 в зависимости от различных установочных УОВТ на объемное содержание оксидов азота (а) и массовую концентрацию (б) в ОГ при $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,584 \text{ МПа}$, $q_{цот} = 6,6 \text{ мг/цикл}$

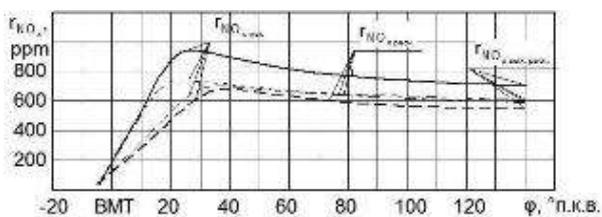


Рисунок 3 - Результаты теоретических расчетов по изменению объемного содержания оксидов азота в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на этаноле с ДСТ в зависимости от угла п.к.в. при $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$:

- - дизельный процесс;
- - - - $\theta_{DT} = 30^\circ$, $\theta_3 = 26^\circ$;
- · · · - $\theta_{DT} = 30^\circ$, $\theta_3 = 30^\circ$;
- · · · · - $\theta_{DT} = 30^\circ$, $\theta_3 = 34^\circ$

Результаты теоретических расчетов по изменению объемного содержания $r_{NOx \text{ расч}}$ оксидов азота в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 в зависимости от угла п.к.в. при работе на этаноле с ДСТ для ча-

стоты вращения 1800 мин^{-1} при $\theta_{DT} = 30^\circ$; $\theta_3 = 30^\circ$ также представлены на рисунке 3.

Из графиков видно, что максимальное значение теоретического расчетного объемного содержания $r_{NOx \text{ max расч}}$ оксидов азота в цилиндре дизеля при работе на этаноле с ДСТ составляет 745 ppm при $\phi = 25,0^\circ$ п.к.в. после в.м.т. Снижение составляет $23,1 \%$. Значение теоретического расчетного объемного содержания $r_{NOx \text{ расч}}$ оксидов азота в цилиндре дизеля при работе на этаноле с ДСТ при $\phi = 140,0^\circ$ п.к.в. после в.м.т. (выходное расчетное значение $r_{NOx \text{ вых расч}}$ в момент открытия выпускного клапана) составляет 583 ppm . Снижение составляет $12,2 \%$.

Графики объемного содержания $r_{NOx \text{ расч}}$, массовой концентрации $C_{NOx \text{ расч}}$ оксидов азота в ОГ, рассчитанных по результатам экспериментальных данных, и $r_{NOx \text{ опыт}}$, полученное по результатам газового анализа ОГ, осредненной температуры и давления газов в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на ДТ и этаноле с ДСТ, в зависимости от изменения нагрузки для номинальной частоты вращения 1800 мин^{-1} представлены на рисунке 4а.

Объемное содержание $r_{NOx \text{ опыт}}$ оксидов азота в ОГ при работе дизеля на этаноле с ДСТ существенно ниже, чем при работе на ДТ во всем диапазоне изменения нагрузки. Массовая концентрация $C_{NOx \text{ расч}}$ оксидов азота в ОГ при работе дизеля на этаноле с ДСТ также существенно ниже, чем при работе на ДТ во всем диапазоне изменения нагрузки. Такая же закономерность наблюдается и в зависимости от изменения частоты вращения коленчатого вала (рис. 4б).

Оксиды азота NOx образуются в процессе сгорания топлива в КС дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на ДТ и на этаноле в различных концентрациях. Очевидно, начало цепных реакций обусловлено появлением атомарного кислорода, который образуется вследствие распада при высоких температурах молекул кислорода. В следствии этого, при сгорании различных видов топлив, отличающихся по составу и свойствам, возможно предположить, что образование NOx преимущественно связано с концентрациями атомов кислорода в различных зонах КС и величиной максимальных температур. Скорость образования NOx объективно выше в пламени богатых смесей, чем в стехиометрических или бедных, но окончательная концентрация максимальна для смесей, в которых содержание кислорода ниже чем в стехиометрической смеси.

Зоны горения бедной смеси этанола и ДТ являются одними из главных зон образования NOx, т.к эта часть сгорает первой и имеет наибольшее время пребывания в послепламенной зоне. Повышение температуры вследствие горения в ядре и на стенках может увеличивать образование NOx.

Во-первых, к этому приводит увеличение средней температуры газов в цилиндре, приводящее к повышению концентрации NOx в зонах горения бедной смеси, а также в оставшемся воздухе.

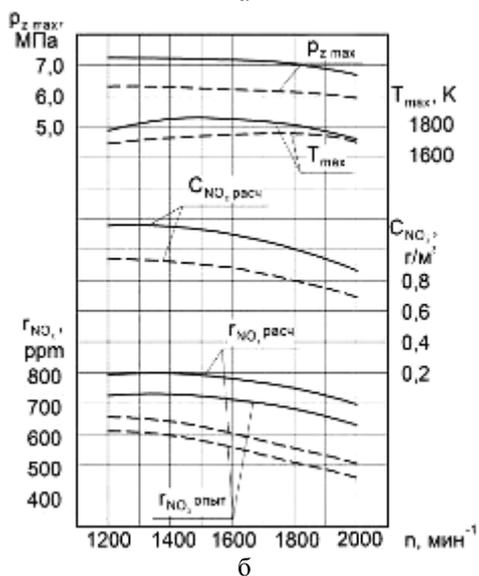
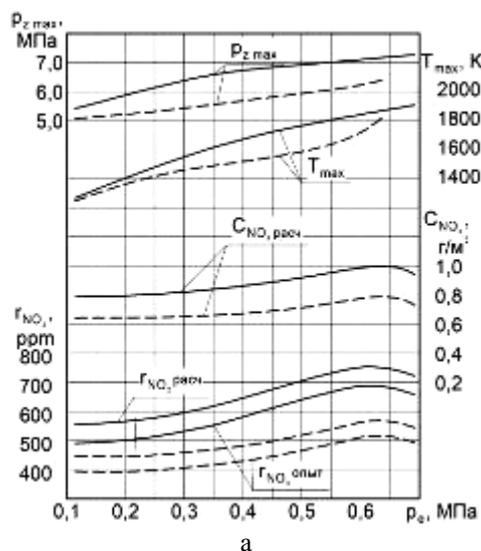


Рисунок 4 - Влияние применения этанола в дизеле 2Ч 10,5/12,0 при работе с ДСТ на объемное содержание и массовую концентрацию оксидов азота в ОГ, показатели процесса сгорания в цилиндре в зависимости от изменения нагрузки при $\theta_{dm} = 30^\circ, \theta_s = 30^\circ$ и $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ (а) и изменения частоты вращения (б):
 ————— — дизельный процесс;
 - - - - - этанол с запальным ДТ

Во-вторых, это может привести к очень высокой температуре пламени в ядре топливного факела. Количество NOx, образующегося в ядре, также зависит от локальной концентрации кислорода.

При снижении температуры во время хода расширения концентрация NOx не снижается до равновесной концентрации. Как установлено, в поршневых двигателях процесс исчезновения NOx в ходе расширения очень медленный, поэтому концентрация NOx в этом ходе по существу не меняется. В наибольшей степени это относится к горению бедных смесей.

Таким образом, при горении в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 двух видов топлива – этанола и дизельного топлива, - имеющих различный углеводородный состав, сильно отличающийся по физико-химическим свойствам друг от друга, возможно предположить, что образование NOx главным образом связано с горением в зонах бедной смеси, зонах локальных концентраций атомов кислорода и значениями, имеющих там место, максимальных температур, при этом образование оксидов азота происходит по высокотемпературному.

Литература

1. Лиханов В.А, Сайкин А.М. Снижение токсичности автотракторных дизелей. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: Колос, 1994. – 224 с.: ил.
2. Воинов А. Н. Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1977, 277 с.
3. Лиханов В.А., Чувашев А.Н Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на метаноле с двойной системой топливоподачи: Монография. - Киров: Вятская ГСХА, 2007. – 129с.
4. Лиханов В.А. Полевщиков А.С. Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на этаноле с двойной системой топливоподачи: Монография. – Киров: Вятская ГСХА, 2011. – 146 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИЗЕЛЯ 2Ч 10,5/12,0 ПРИ РАБОТЕ НА ЭТАНОЛЕ И РАПСОВОМ МАСЛЕ С ДВОЙНОЙ СИСТЕМОЙ ТОПЛИВОПОДАЧИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УСТАНОВОЧНЫХ УГЛОВ ОПЕРЕЖЕНИЯ ВПРЫСКИВАНИЯ ТОПЛИВ

Лиханов В.А., Деветьяров Р.Р., Арасланов М.И., Козлов А.Н.

Вятская Государственная Сельскохозяйственная Академия

610017, Россия, г. Киров, Октябрьский проспект, 133

dnka59@mail.ru

STUDY OF THE CHARACTERISTICS DIESEL 2Ч10.5/12.0 AT WORK ON ETHANOL AND RAPESEED OIL WITH DUAL FUEL SYSTEM ACCORDING TO THE INSTALLATION OF ANGLES FUEL INJECTION

Lihanov V.A., Devetyarov R.R., Araslanov M.I., Kozlov A.N.

Vyatka State Agricultural Academy

610017, Russian Federation, Kirov, October Avenue 133.

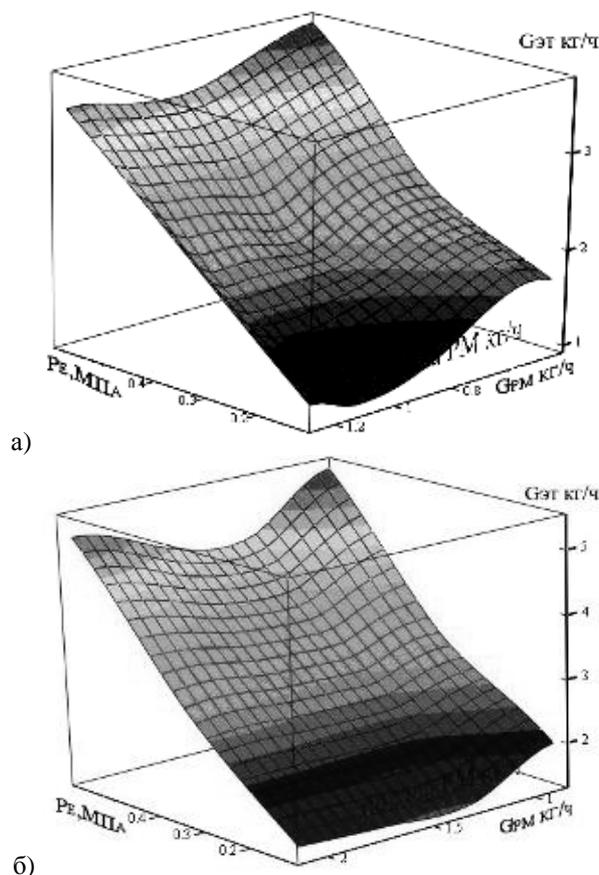
Abstract

This article presents the results of studies to determine the value of the seed portion of rapeseed oil and optimum combination of angles injection of ethanol and rapeseed oil on diesel 2Ч10.5/12.0 using a dual fuel system. Presented three-dimensional graph of the effect of these quantities on the fuel consumption and the temperature of the exhaust gases of diesel.

Истощение мировых запасов нефти и повышение цен на традиционные моторные топлива а также сложившаяся неблагоприятная экологическая обстановка в стране и мире сделала актуальными работы, направленные на поиск и обоснование применения альтернативных видов топлив из возобновляемых источников энергии, в частности рапсового масла и этанола.

В соответствии с целью, задачами и методикой исследований были проведены стендовые испытания.[1,2,3] Исследования показали, что наилучшие результаты по расходу топлива получаются при одновременной подаче рапсового масла (РМ) и этанола. Для оптимального протекания рабочего процесса и обеспечения минимального расхода топлива необходимо было определить значение минимальной запальной порции РМ. Величина запальной порции РМ при работе на этаноле с двойной системой топливоподачи (ДСТ) определялась исходя из оптимального соотношения расхода этанола и запального РМ на номинальной частоте вращения ($n=1800 \text{ мин}^{-1}$), а также на частоте, соответствующей максимальному крутящему моменту ($n=1400 \text{ мин}^{-1}$). Подача РМ уменьшалась до начала пропусков воспламенения, после чего она увеличивалась до достижения устойчивой работы дизеля, подача запального РМ фиксировалась и оставалась постоянной, а изменение нагрузочного режима велось только путем изменения подачи этанола. Подача запального РМ изменялась в пределах (1...2)кг/ч (9...19 мг/цикл) при $n=1800 \text{ мин}^{-1}$ и (0,6...1,2) кг/ч (7...14 мг/цикл) при $n=1400 \text{ мин}^{-1}$.

На рисунке 1 представлены графики влияния величины запальной порции РМ на часовую расход этанола в функции от среднего эффективного давления на номинальной частоте вращения, а также частоте, соответствующей максимальному крутящему моменту.



б) Рисунок 1- Влияние величины запальной порции РМ на расход топлив дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на РМ и этаноле с ДСТ:
а) при $n=1400 \text{ мин}^{-1}$; б) при $n=1800 \text{ мин}^{-1}$

На графике 1,а можно отметить, что оптимальное сочетание расходов запального РМ и этанола при работе дизеля на номинальной частоте вращения приходится на значение запальной порции РМ $q_{црм}=12$ мг/цикл (1,3 кг/ч), при увеличении порции РМ увеличивается расход этанола, при уменьшении подачи РМ также происходит увеличение расхода этанола.

На рисунке 1,б можно отметить, что оптимальное сочетание расходов запального РМ и этанола при работе дизеля на частоте, соответствующей максимальному крутящему моменту приходится на значение запальной порции $q_{црм}=12$ мг/цикл (1 кг/ч), при увеличении порции РМ увеличивается расход этанола, при уменьшении подачи РМ также происходит увеличение расхода этанола.

Оценивая правильность ранее выбранной величины запальной порции топлива можно отметить следующее, при $q_{црм}=11$ мг/цикл (1,2кг/ч) значение максимального давления сгорания $p_{zmax}=6,9$ МПа, при увеличении величины запальной порции РМ наблюдается рост максимального давления сгорания до $p_{zmax}=7,3$ МПа при $q_{црм}=17$ мг/цикл (1,8кг/ч). При уменьшении запальной порции РМ $q_{црм}=8$ мг/цикл (0,9кг/ч) наблюдается рост периода задержки воспламенения, процесс сгорания сдвигается за линию ВМТ и проходит не оптимально (рисунок 2).

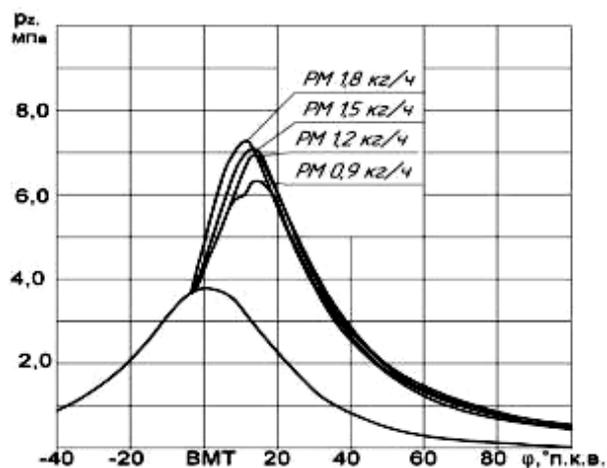
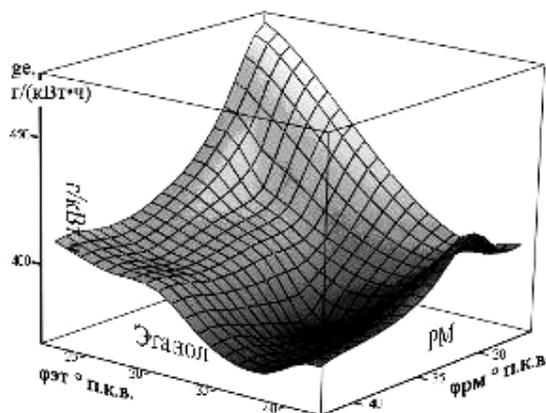


Рисунок 2 - Влияние величины запальной порции РМ на индикаторные диаграммы дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе РМ и этаноле с ДСТ при частоте вращения $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,588 \text{ МПа}$

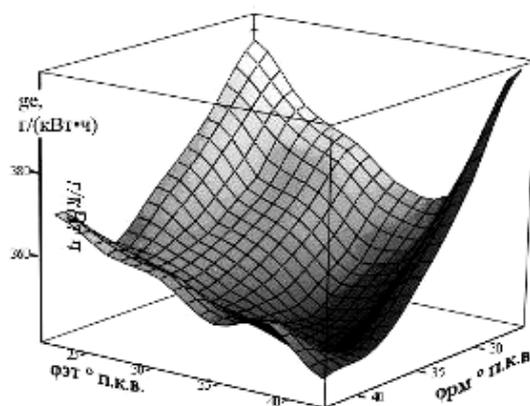
Величина $q_{црм}=12$ мг/цикл (1,3кг/ч) является оптимальной величиной запальной порции топлива. После определения величины запальной порции РМ нами была проведена регулировочная характеристика дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе его на этаноле и РМ с ДСТ. На рисунке 3 представлены графики изменения экономических показателей дизеля 2Ч 10,5/12,0 при различных установочных углах опережения впрыскивания топлива [2,3].

Анализируя рисунок 3,а можно отметить что оптимальное сочетание установочных УОВТ при работе дизеля на РМ и этаноле с ДСТ при ча-

стоте вращения $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,588 \text{ МПа}$, составляет для этанола $\Theta_{эм}=34^\circ$, для РМ $\Theta_{рм}=34^\circ$, при данном сочетании углов достигается минимальный удельный расход топлива $g_{e\Sigma} = 368 \text{ г/(кВт}\cdot\text{ч)}$.



а)



б)

Рисунок 3 - изменение экономических показателей дизеля 2Ч 10,5/12,0 при различных установочных углах опережения впрыскивания РМ и этанола:

- а) при $n=1800 \text{ мин}^{-1}$ $p_e = 0,588 \text{ МПа}$;
- б) при $n=1400 \text{ мин}^{-1}$ $p_e = 0,594 \text{ МПа}$;

Анализируя рисунок 3,б также можно отметить, что оптимальное сочетание установочных УОВТ при работе дизеля на РМ и этаноле с ДСТ при частоте вращения $n = 1400 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,594 \text{ МПа}$, составляет для этанола $\Theta_{эм}=34^\circ$, для РМ $\Theta_{рм}=34^\circ$, при данном сочетании углов достигается минимальный удельный расход топлива $g_{e\Sigma} = 350 \text{ г/(кВт}\cdot\text{ч)}$. При увеличении или же уменьшении установочного УОВТ минимальный удельный расход топлива увеличивается.

На рисунке 4 представлено влияние установочного УОВТ на температуру отработавших газов дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе его на этаноле и РМ с ДСТ.

Температура отработавших газов - косвенный показатель эффективности протекания процесса сгорания двигателя. Анализируя рисунок 4,а можно отметить, что минимальная температура ОГ $t_r=430^\circ\text{C}$ дизеля при работе на РМ и этаноле с ДСТ при частоте вращения $n = 1800 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,588 \text{ МПа}$ достигается при сочетании установочных

УОВТ, для этанола $\theta_{эм}=34^\circ$, для РМ $\theta_{рм}=34^\circ$. Аналогичные результаты дает анализ рисунка 4,б. эти данные говорят о правильно выбранном сочетании установочных УОВТ для этанола $\theta_{эм}=34^\circ$, для РМ $\theta_{рм}=34^\circ$.

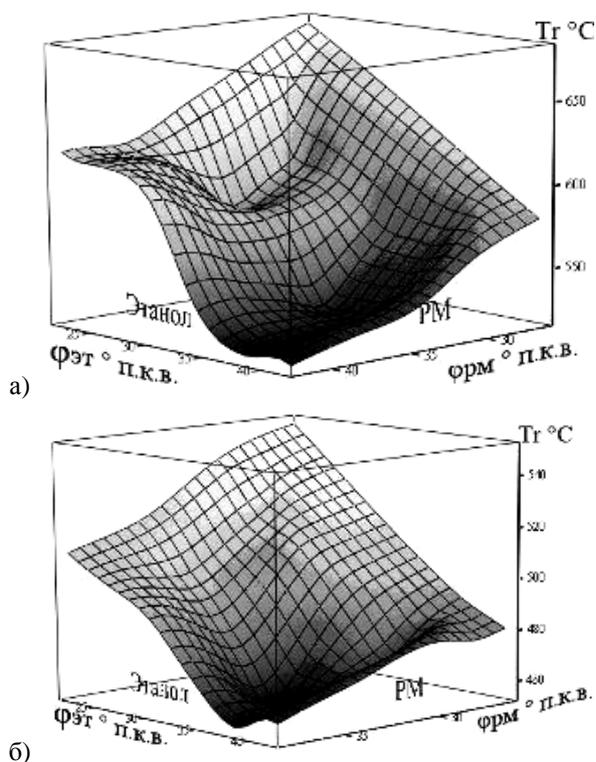


Рисунок 4 - Изменение температуры отработавших газов дизеля 2Ч 10,5/12,0 при различных установочных УОВТ РМ и этанола:
 а) при $n=1800 \text{ мин}^{-1}$ $p_e = 0,588 \text{ МПа}$;
 б) при $n=1400 \text{ мин}^{-1}$ $p_e = 0,594 \text{ МПа}$

Как видно из графика, при более позднем впрыскивании этанола его воспламенение происходит значительно позднее. В результате резко падает максимально давление цикла, и весь процесс сгорания сдвигается за линию ВМТ.

Раннее же впрыскивание этанола сопровождается предварительным испарением, накоплением в объеме КС паровой фазы, увеличивается масса топлива, участвующая в предпламенной подготовке, в результате чего заметно растет максимально давление сгорания, а также жесткость рабочего процесса. Возможно некоторое уменьшение этих углов при эксплуатации двигателя, однако увеличение недопустимо из-за резкого роста максимального давления сгорания.

На основании проведенных на кафедре двигателей внутреннего сгорания Вятской ГСХА экспериментальных стендовых испытаний дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на этаноле и РМ с ДСТ определены значения оптимальных установочных углов опережения впрыскивания топлив: для РМ- 34° до в.м.т., для этанола- 34° до в.м.т.

При работе дизеля на номинальном режиме минимальная величина запальной порции РМ должна составлять не менее $q_{црм}=12 \text{ мг/цикл}$.

Литература

1. Арасланов М.И. Методика проведения стендовых испытаний дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на рапсовом масле и дизельном топливе с использованием двойной системы топливоподдачи // Научное обеспечение развития АПК в условиях реформирования. Сборник научных трудов. – С.Петербург: СПбГАУ, 2012.
2. Лиханов В.А., Полевщиков А.С. Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на этаноле с двойной системой топливоподдачи: Монография.- Киров: Вятская ГСХА, 2011. - 146 с.
3. Лиханов. В.А., Чувашев А.Н. Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на метаноле с двойной системой топливоподдачи: Монография. - Киров: Вятская ГСХА, 2007. - 129с.
4. Методические указания по определению вредных веществ в отработавших газах тракторных и комбайновых дизелей. – М.: ЦНИЛТД, 1977. – 38 с.

INFLUENCE OF APPLICATION OF ETHANOL ON INDICATORS PROCESS OF COMBUSTION AND SOOTCONTAINING OF THE DIESEL 2Ч 10,5/12,0 DURING THE WORK WITH DOUBLE SYSTEM OF FUEL FEEDING

Vitaliy A. Lihanov, Mihail A. Dolgih, Aleksander S. Polevchikov

Vyatka state agroculture academy
133 Oktyabrsky prospectus, 610017 Kirov, Russia

Abstract

The article deals with the problems of toxicity of diesel engines and the possibility of expanding fuel base available for modern diesels. The article contains the results of research conducted on the engine D-120 (2Ч 10,5/12,0) when running on ethanol, using a double system of fuel injection. Presented the influence of using ethanol on combustion process and ecological parameters of a diesel engine at different load conditions.

При анализе проведенных работ на кафедре ДВС по исследованию рабочего процесса работы дизеля с двойной системой топливоподачи (ДСТ) а также оценка влияния применения этанола на показатели процесса сгорания в цилиндре и сажеосодержания в отработавших газах (ОГ) были получены следующие результаты. Одной из основных задач исследования, в соответствии с целью и методикой являлось проведение стендовых испытаний Дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на дизельном топливе (ДТ) и ДСТ. Величина запальной порции ДТ при работе на этаноле с двойной системой топливоподачи (ДСТ) определялась путем уменьшения подачи ДТ до начала появления пропусков воспламенения, после чего она несколько увеличивалась до достижения устойчивой работы дизеля. Изменение нагрузочного режима велось только путем изменения подачи этанола. Как показал эксперимент, наилучшие результаты получаются при одновременной подаче запальной порции ДТ и этанола ($\theta_{ДТ} = 30^\circ$ до ВМТ, $\theta_{Э} = 30^\circ$ до ВМТ).[1,2]

На рисунке 1, а представлено влияние применения этанола с ДСТ на показатели процесса сгорания в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12 в зависимости от изменения нагрузки при работе на ДТ и при работе на этаноле с ДСТ на номинальной частоте вращения коленчатого вала. Из графиков видно, что при работе дизеля на ДТ при увеличении нагрузки увеличивается максимальное давление сгорания $P_{z \max}$ от 5,42 МПа при $p_e = 0,115$ МПа до 7,10 МПа при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение $P_{z \max}$ составляет 1,68 МПа, или 31,0 %. Максимальная осредненная температура газов $T_{z \max}$ в цилиндре дизеля возрастает с 1370 К при $p_e = 0,115$ МПа до 1850 К при $p_e = 0,635$ МПа. Рост значения температуры составляет 480 К, или 35,0 %. Количество частиц сажи увеличивается с $N_{ДТ \text{ расч}} = 1,63 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,115$ МПа до $N_{ДТ \text{ расч}} = 12,32 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,635$ МПа. Происходит увеличение количества частиц сажи в 7,6 раза. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана, полученная опытным путем, $C_{ДТ \text{ опыт}}$ возрастает с 0,082 г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до 0,49 г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет 0,408 г/м³ или в 5,6 раза. Проведенные теоретические расчеты показывают,

что расчетная массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана $C_{ДТ \text{ расч}}$ возрастает с 0,095 г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до 0,53 г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа, т.е. увеличивается в 5,6 раза. Разница между теоретическим и экспериментальным значениями массовой концентрации сажи составляет от 8% при $p_e = 0,115$ МПа до 9% при $p_e = 0,635$ МПа.

Из кривых, представленных на рисунке 1, а, видно, что при работе дизеля 2Ч 10,5/12,0 на этаноле с ДСТ показатели процесса сгорания изменяются во всём диапазоне изменения нагрузки. Из графиков на рисунке 1, а, видно, что при увеличении нагрузки максимальное давление сгорания $P_{z \max}$ возрастает с 5,08 МПа при $p_e = 0,115$ МПа до 6,16 МПа при $p_e = 0,635$ МПа. Максимальная осредненная температура цикла при работе дизеля на этаноле увеличивается от 1350 К при $p_e = 0,115$ МПа до 1780 К при $p_e = 0,635$ МПа. Рост температуры при изменении нагрузки составляет 430 К, или 31,9 %. Количество частиц сажи увеличивается с $N_{Э \text{ расч}} = 0,21 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,115$ МПа до $N_{Э \text{ расч}} = 0,41 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,635$ МПа. Происходит увеличение количества частиц сажи в 1,95 раза. Содержание сажи в цилиндре на момент открытия выпускного клапана определяет дымность ОГ. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана, полученная опытным путем, $C_{Э \text{ опыт}}$ возрастает с 0,005 г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до 0,024 г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет 0,019 г/м³ или в 5 раз. Расчетная массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана $C_{Э \text{ расч}}$ возрастает с 0,010 г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до 0,023 г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа или в 2,3 раза.

Анализируя изменения значений показателей процесса сгорания в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 в зависимости от изменения нагрузки при $n = 1800$ мин⁻¹ и оптимальных УОВТ, можно отметить, что максимальное давление цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ на малых нагрузках меньше, чем при работе дизеля на ДТ. Так, при $p_e = 0,115$ МПа максимальное давление цикла снижается с $P_{z \max} = 5,42$ МПа при работе дизеля на ДТ до $P_{z \max} = 5,08$ МПа при работе дизеля на этаноле с ДСТ. Снижение составляет 6,3 %. С увеличением нагрузки разница в величине максимального дав-

ления сгорания сохраняется. Так, при $p_e = 0,635$ МПа $P_{z \max} = 7,10$ МПа при работе дизеля на ДТ, а при работе дизеля на этаноле с ДСТ $P_{z \max} = 6,16$ МПа. Снижение составляет 13,2 %. [3,4]

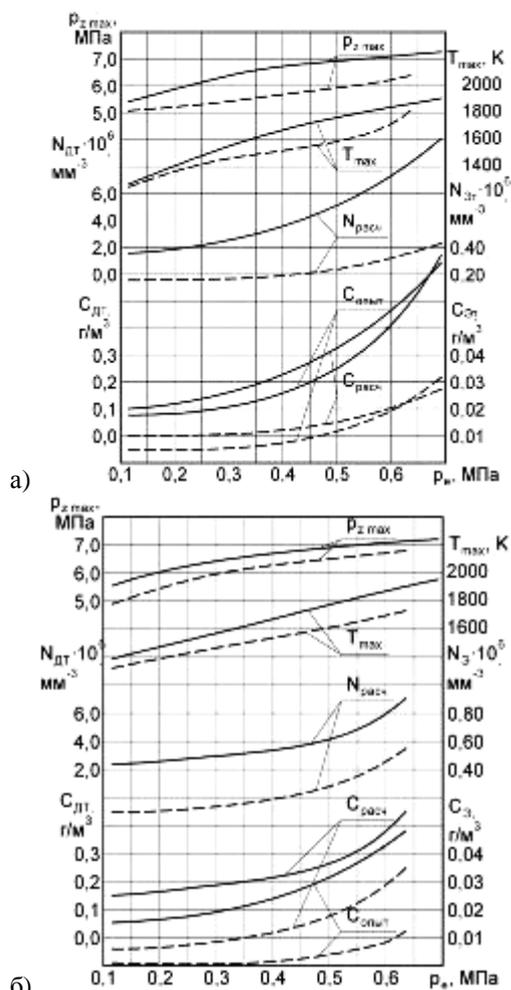


Рисунок 1 - Влияние применения этанола на показатели процесса сгорания в цилиндре и показатели сажесодержания в ОГ дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе с ДСТ при $\theta_{ДТ} = 30^\circ$ и $\theta_{Э} = 30^\circ$ в зависимости от изменения нагрузки:
 а – при $n = 1800$ мин⁻¹; б - при $n = 1400$ мин⁻¹

— дизельный процесс;
 — — — этанол с запальным ДТ

Максимальная осредненная температура цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ на малых нагрузках ($p_e = 0,115$ МПа) снижается и составляет 1350 К, а при работе дизеля на ДТ температура составляет 1370 К. Снижение составляет 20 К, или 1,5 %. При увеличении нагрузки до $p_e = 0,635$ МПа максимальная осредненная температура цикла при работе дизеля на этаноле с использованием ДСТ составляет 1780 К, что меньше, чем T_{max} при работе на ДТ, которая равна 1850 К. Уменьшение составляет 70 К.

При $p_e = 0,115$ МПа количество частиц сажи снижается с $N_{от \text{ расч}} = 1,63 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на ДТ до $N_{э \text{ расч}} = 0,21 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на этаноле с ДСТ. Снижение составляет $1,42 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ или 87,1%. При увеличении нагрузки до $p_e = 0,635$ МПа количество частиц сажи снижается с $N_{от \text{ расч}} = 12,3 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на

ДТ до $N_{э \text{ расч}} = 0,41 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на этаноле с ДСТ, что соответствует $11,89 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ или 96,7%. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана при работе на этаноле с ДСТ значительно снижается по сравнению при работе на ДТ. Так, при $p_e = 0,115$ МПа $C_{от \text{ опыт}}$ снижается с $0,082$ г/м³ до $0,005$ г/м³, т.е. в 16,4 раза. С увеличением нагрузки массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана увеличивается, и снижение становится еще более значительным. При $p_e = 0,635$ МПа массовая концентрация $C_{от \text{ опыт}}$ снижается с $0,49$ г/м³ при работе на ДТ до $0,024$ г/м³ при работе на этаноле с ДСТ. Концентрация сажи снижается в 20,4 раза.

На рис 1, б представлено влияние применения этанола на показатели процесса сгорания в цилиндре и сажесодержания в ОГ дизеля 2Ч 10,5/12,0 с ДСТ в зависимости от нагрузки на режиме максимального крутящего момента при $n = 1400$ мин⁻¹.

Из графиков видно, что при работе дизеля на ДТ при увеличении нагрузки увеличивается максимальное давление сгорания $p_{z \max}$ от 5,55 МПа при $p_e = 0,115$ МПа до 7,16 МПа при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет 1,61 МПа, или 29,0%. Максимальная осредненная температура газов в цилиндре возрастает с 1390 К при $p_e = 0,115$ МПа до 1910 К при $p_e = 0,635$ МПа. Рост температуры составляет 520 К, или 37,4 %. Количество частиц сажи увеличивается с $N_{от \text{ расч}} = 2,25 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,115$ МПа до $N_{от \text{ расч}} = 7,10 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,635$ МПа. Происходит увеличение количества частиц сажи в 3,16 раза. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана, полученная опытным путем, $C_{от \text{ опыт}}$ возрастает с $0,05$ г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до $0,38$ г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет $0,33$ г/м³ или в 7,6 раза. Проведенные теоретические расчеты показывают, что расчетная массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана $C_{от \text{ расч}}$ возрастает с $0,15$ г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до $0,45$ г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа.

Из кривых, видно, что при работе дизеля 2Ч 10,5/12,0 на этаноле с ДСТ показатели процесса сгорания изменяются во всем диапазоне изменения нагрузки. Из графиков видно, что при увеличении нагрузки максимальное давление сгорания $p_{z \max}$ возрастает с 4,90 МПа при $p_e = 0,115$ МПа до 6,60 МПа при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет 1,7 МПа, или 34,7 %. Максимальная осредненная температура цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ увеличивается от 1320 К при $p_e = 0,115$ МПа до 1730 К при $p_e = 0,635$ МПа. Рост температуры составляет 410 К, или 31,1 %. Количество частиц сажи увеличивается с $N_{э \text{ расч}} = 0,168 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,115$ МПа до $N_{э \text{ расч}} = 0,595 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при $p_e = 0,635$ МПа. Происходит увеличение количества частиц сажи в 3,54 раза. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана, полученная опытным путем, $C_{э \text{ опыт}}$ возрастает с $0,002$ г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до $0,012$ г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа. Увеличение составляет $0,010$ г/м³ или в 6,0 раз. Расчетная массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана $C_{э \text{ расч}}$ возрастает с $0,006$ г/м³ при $p_e = 0,115$ МПа до $0,035$ г/м³ при $p_e = 0,635$ МПа.

При рассмотрении изменений значений показателей процесса сгорания в цилиндре дизеля 2Ч 10,5/12,0 в зависимости от изменения нагрузки при частоте вращения $n = 1400 \text{ мин}^{-1}$ и оптимальных установочных УОВТ, отмечается, что максимальное давление цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ на малых нагрузках меньше, чем при работе дизеля на ДТ. Так, при $p_e = 0,115 \text{ МПа}$ оно снижается на 11,7 % с $p_{z \text{ max}} = 5,55 \text{ МПа}$ при работе дизеля на ДТ до $p_{z \text{ max}} = 4,90 \text{ МПа}$ при работе дизеля на этаноле с ДСТ. С увеличением нагрузки происходит увеличение максимального давления сгорания. Так, при $p_e = 0,635 \text{ МПа}$ значение $p_{z \text{ max}} = 7,16 \text{ МПа}$ при работе дизеля на ДТ, а при работе дизеля на этаноле с ДСТ $p_{z \text{ max}} = 6,60 \text{ МПа}$. Снижение составляет 7,8 %. Максимальная осреднённая температура цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ, на малых нагрузках ($p_e = 0,115 \text{ МПа}$) составляет 1320 К, а при работе на ДТ $T_{\text{max}} = 1390 \text{ К}$. Увеличение составляет 70 К, или 5,3%. При увеличении нагрузки до $p_e = 0,635 \text{ МПа}$ максимальная осредненная температура цикла при работе дизеля на этаноле с ДСТ составляет 1730 К по сравнению с T_{max} при работе дизеля на ДТ, которая равна 1910 К. Уменьшение составляет 180 К, или 9,4 %.

При $p_e = 0,115 \text{ МПа}$ количество частиц сажи снижается с $N_{\text{от расч}} = 2,25 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на ДТ до $N_{\text{э расч}} = 0,168 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на этаноле с ДСТ. Снижение составляет $2,082 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ или 92,5%. При увеличении нагрузки до $p_e = 0,635 \text{ МПа}$ количество частиц сажи снижается с $N_{\text{от расч}} = 7,1 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на ДТ до $N_{\text{э расч}} = 0,595 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ при работе на этаноле с ДСТ, что соответствует $6,505 \cdot 10^6/\text{мм}^3$ или 91,6%. Массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана при работе на этаноле с ДСТ значительно снижается по сравнению при работе на ДТ. Так, при $p_e = 0,115 \text{ МПа}$ $C_{\text{оньт}}$

снижается с $0,05 \text{ г/м}^3$ до $0,002 \text{ г/м}^3$, т.е. в 25,0 раз. С увеличением нагрузки массовая концентрация сажи в цилиндре в момент открытия выпускного клапана увеличивается, но снижение становится еще более значительным. При $p_e = 0,635 \text{ МПа}$ массовая концентрация $C_{\text{оньт}}$ снижается с $0,38 \text{ г/м}^3$ при работе на ДТ до $0,012 \text{ г/м}^3$ при работе на этаноле с ДСТ. Концентрация сажи снижается в 31,6 раза.

На основании полученных данных можно сделать вывод, что применение этанола с ДСТ позволяет обеспечить значительное снижение показателей сажесодержания во всем диапазоне изменения нагрузки.

Литература

1. Лиханов В.А., Глухов А.А. Снижение дымности отработавших газов дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на метаноле с двойной системой топливоподачи: Монография. - Киров: Вятская ГСХА, 2008. – 139 с.
2. Лиханов В.А., Чувашев А.Н. Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч10,5/12,0 при работе на метаноле с двойной системой топливоподачи: Монография. - Киров: Вятская ГСХА, 2007. – 129 с.
3. Лиханов В.А. Полевщиков А.С. Исследование рабочего процесса дизеля 2Ч 10,5/12,0 при работе на этаноле с двойной системой топливоподачи: Монография. – Киров: Вятская ГСХА, 2011. – 146 с.
4. Лиханов В.А. Торопов А.Е. Улучшение экологических показателей дизеля 4Ч 11,0/12,5 при работе на метаноле-топливной эмульсии путем снижения дымности отработавших газов: монография / под общ. Ред. В.А. Лиханова. – Киров: Вятская ГСХА, 2010. – 142 с.

ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ И ОКИСЛЕНИЯ САЖЕВЫХ ЧАСТИЦ В ЦИЛИНДРЕ ДИЗЕЛЯ С ТУРБОНАДДУВОМ РАЗМЕРНОСТИ 4ЧН 11,0/12,5 ПРИ РАБОТЕ НА ПРИРОДНОМ ГАЗЕ

Лиханов В.А., Россохин А.В.

Вятская государственная сельскохозяйственная академия

Октябрьский проспект, 133, 610017, Киров, Россия
rossokhin.dvs@mail.ru

Аннотация

Снижение выбросов вредных веществ с отработавшими газами ДВС, в том числе и дизелей, является очевидной и приоритетной задачей для всех производителей. На выполнение этих требований направлены и различные нормативно-правовые акты, принятые в большинстве стран мира.

Одним из способов снижения выбросов вредных веществ и, прежде всего, сажи является применение в качестве топлива компримированного природного газа. В данной работе нами рассмотрен способ снижения сажесодержания в ОГ за счет применения газодизельного процесса в дизеле с турбонаддувом Д-245.12С.

С помощью программы для определения массовой S и относительной g концентрации сажи в цилиндре дизеля нами была рассчитана массовая S и относительная g концентрации сажи в цилиндре дизеля и газодизеля с турбонаддувом 4ЧН 11,0/12,5 в зависимости от угла п.к.в.

На рис. 1 представлено влияние применения природного газа на показатели сажесодержания и температуру в цилиндре дизеля с турбонаддувом 4ЧН 11,0/12,5 в зависимости от угла п.к.в. на номинальном режиме работы ($n = 2400 \text{ мин}^{-1}$, $p_e = 0,84 \text{ МПа}$) при $\Theta_{впр} = 11^\circ \text{ п.к.в.}$

Из представленных зависимостей видно, что начало видимого сгорания топлива начинается через $2^\circ \dots 3^\circ$ после в.м.т. Воспламенение рабочей смеси приводит к интенсивному тепловыделению, и температура газов быстро достигает максимального значения: 2100 К при дизельном процессе и 2500 К при газодизельном. Результирующее сажесодержание в ОГ складывается из двух противоположно направленных процессов – образования и выгорания сажевых частиц. Преобладание какого-либо процесса на определенном участке процесса сгорания топливовоздушной смеси ведет к изменению концентрации сажи в ту или иную сторону.

Начало сажевыделения в цилиндре дизеля совпадает с началом видимого сгорания, то есть сажа образуется сразу же, как только появляется устойчивый фронт пламени. Результирующее сажесодержание складывается из трех этапов процесса сажеобразования.

На первом этапе происходит резкое возрастание массовой и относительной концентрации сажи в цилиндре дизеля в результате преобладающего влияния процесса сажеобразования над ее выгоранием. На этом участке пламя быстро распространяется на весь объем подготовленной к сгоранию за ПЗВ смеси.

Образование сажи происходит преимущественно в ядре струи запального ДТ в результате термического и окислительного пиролиза топлива в условиях недостатка окислителя. На начальном этапе преобладающим механизмом сажеобразования является НТФМ. Быстрое расширение фронта пламени обуславливает

увеличение количества топлива, сгорающего в этом фронте по диффузионному механизму, а следовательно, и соответствующий рост массового выхода сажи. В условиях повышенной турбулизации заряда основная масса образующейся сажи выносится из пламени в зоны с относительно низкой температурой и избытком окислителя. В этих зонах начинается окисление сажевых частиц, но из-за низкой температуры процессы окисления замедлены и не могут конкурировать с процессами сажеобразования, поэтому массовая концентрация сажи в цилиндре быстро возрастает.

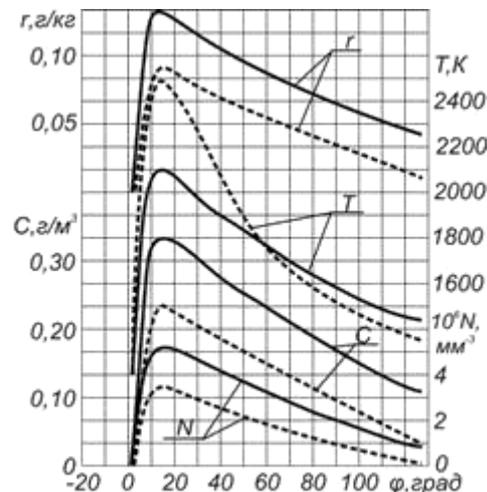


Рисунок 1 – Влияние применения природного газа на показатели сажесодержания и температуру в цилиндре дизеля с турбонаддувом 4ЧН 11,0/12,5 в зависимости от угла п.к.в. при $\Theta_{впр} = 11^\circ \text{ п.к.в.}$:
 $n = 2400 \text{ мин}^{-1}$ и $p_e = 0,84 \text{ МПа}$;
————— - дизель; - - - - - газодизель

На втором этапе процесса сажеобразования пламенем охвачена большая часть объема и происходит диффузионное горение основной части заряда. Температура в цилиндре повышается до максимального значения, и процессы образования и выгорания сажи идут с соизмеримыми скоростями, но суммарное сажесодержание продолжает увеличиваться. На этом участке

основным механизмом образования сажи является ВТАМ. Образовавшиеся в результате физико-химических превращений топлива частицы сажи окисляются, так как температура газов и общий коэффициент избытка воздуха становятся достаточно высокими.

На третьем этапе процесс выгорания сажи доминирует над процессом образования. Сгорание основной массы заряда к этому времени завершилось, и возможно лишь догорание отдельных локальных объемов смеси и сажевых частиц. Работа дизеля с турбонаддувом характеризуется значительным обеднением смеси даже на режимах высоких нагрузок и повышенной турбулентностью смеси в цилиндре двигателя. То есть создаются благоприятные условия для выгорания сажевых частиц. Этот процесс длится до открытия выпускных клапанов, а содержание сажи при этом снижается до значений, определяющих дымность ОГ.

При работе по дизельному процессу массовая концентрация C сажи достигает своего максимума в $0,33 \text{ г/м}^3$ через 15° п.к.в. после в.м.т., после чего начинает снижаться, достигая к моменту открытия выпускного клапана величины $0,11 \text{ г/м}^3$, т.е. снижается в 3 раза.

В то же время при работе по газодизельному процессу $C_{max} = 0,23 \text{ г/м}^3$, а к моменту открытия выпускного клапана составляет всего $0,03 \text{ г/м}^3$, т.е. снижается в 7,7 раза.

Изменение относительной концентрации сажи в цилиндре двигателя в зависимости от угла п.к.в. аналогично изменению массовой концентрации. При работе по дизельному процессу максимальная относительная концентрация g сажи составляет $0,133 \text{ г/кг}$, а к моменту открытия выпускного клапана она составляет уже $0,044 \text{ г/кг}$, т.е. снижение составляет 66,9 %. При работе по газодизельному процессу максимальная относительная концентрация g сажи составляет $0,093 \text{ г/кг}$, а к моменту открытия выпускного клапана всего $0,012 \text{ г/кг}$, т.е. снижается в 7,7 раза.

Сильное влияние на излучательную способность и радиационные характеристики пламени оказывает количество сажевых частиц в единице объема реакции. При проведении расчетов по определению количества N частиц сажи в единице объема нами были приняты следующие допущения:

1. Полидисперсная система сажевых частиц представлена монодисперсной с эквивалентным модальным радиусом частиц 20 нм.

2. Плотность сажевых частиц не зависит от механизма образования и составляет $1,9 \text{ г/см}^3$.

На основании этих допущений расчетное максимальное количество сажевых частиц составляет $5,2 \cdot 10^6$ в мм^3 для дизельного процесса и $3,6 \cdot 10^6$ в мм^3 для газодизельного процесса. После достижения максимума при дальнейшем повороте коленчатого вала количество сажевых частиц снижается пропорционально снижению массовой концентрации. К моменту открытия выпускного клапана при работе по дизельному процессу количество частиц N сажи составляет

уже $1,7 \cdot 10^6$ в мм^3 , т.е. снижается на 67 %, а при работе по газодизельному процессу количество частиц N сажи составляет $0,4 \cdot 10^6$ в мм^3 , т.е. снижается на 88,9 %.

Следует отметить, что при работе по газодизельному процессу значение T_{max} выше, чем при работе по дизельному процессу, но и скорость снижения температуры по углу п.к.в. тоже выше.

Окисление сажевых частиц, равно как и их образование, тоже идет несколькими путями. Схематически взаимодействие твердого углерода с газами можно разбить на несколько последовательно протекающих этапов. Первым из них является доставка окислителя из газовой атмосферы к поверхности раздела фаз путем молекулярной и конвективной диффузии. Второй этап заключается в физической или химической адсорбции молекул окислителя, сопровождающейся в ряде случаев объемным растворением. Третий этап сводится к взаимодействию адсорбированного окислителя с поверхностными атомами углерода и к образованию продуктов реакции, также адсорбированных на графите. Наконец, четвертый и пятый этапы представляют собой десорбцию продуктов реакции и удаление (ре-диффузию) их в газовую фазу. Таким образом, процесс в целом включает в себя три вида процессов: диффузионные, адсорбционные и собственно химические, из которых два последних весьма тесно переплетаются.

При низких температурах происходит медленное окисление углерода, при котором преобладают сорбционные процессы. Сорбционный механизм взаимодействия с кислородом даже для наименее активных углей (графит, электродный уголь, высокотемпературный кокс) перестает играть роль при температурах 600-800 К. (При взаимодействии углерода с двуокисью углерода или водяным паром сорбционные явления оказывают влияние даже при температурах 1000-1200 К). По мере повышения химической активности угля и увеличения экзотермического эффекта реакции наблюдается снижение значений тех температур, после достижения которых роль сорбционных процессов значительно сокращается.

При высокотемпературном горении скорости адсорбции и десорбции настолько велики, что можно пренебречь нестационарностью, связанной с сорбционными процессами. При этом можно считать, что данному количеству поглощенного углем окислителя отвечает стехиометрическое количество выделяющихся продуктов реакции. Механизм горения в этих условиях вследствие быстроты сорбционных процессов приобретает как бы мгновенный, «ударный» характер.

По результатам исследований можно сделать вывод об эффективности использования природного газа для улучшения экологических показателей автомобильных и тракторных дизелей, в том числе с турбонаддувом. Прежде всего это относится к снижению содержания в отработавших газах сажи, представляющей серьезную опасность для здоровья человека благодаря адсорбции на ее поверхности канцерогенных веществ.

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Решетов А.А.¹, Григорьев В.С.²

¹ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород»

²Чувашский филиал ОАО «СОГАЗ»

¹428027, Россия, г. Чебоксары, пр.И.Яковлева, д.25

²428000, Россия, г. Чебоксары, Президентский бульвар, 11

reshetov2006@mail.ru, 523434206@mail.ru

Реферат

Работа посвящена повышению эффективности диагностирования судовых энергетических установок (СЭУ) по крутильным колебаниям валопровода. Предлагаемые методы и средства основаны на применении расчетных энергетических спектральных портретов объекта диагностирования, существенно облегчающих прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращающих область поиска возможных повреждений узлов СЭУ и повышающих надежность обнаружения дефектов.

Введение

В практике эксплуатации морских (речных) судов, в т.ч. судовых энергетических установок (СЭУ), появляется необходимость в комплексировании систем параметрической и вибрационной диагностики технического состояния судов и развитии их диагностических возможностей, так как применение штатных систем параметрической и вибрационной диагностики дает оперативную и правильную информацию о техническом состоянии морских (речных) судов, в т.ч. основных узлов СЭУ (двигателей, муфт, демпферов, зубчатых передач, валов, подшипников, винтов и др.) с целью принятия соответствующих решений: для оценки технического состояния, о ремонте узлов СЭУ, качества проведенного ремонта, проведения внеочередных регламентных работ, возможности продолжения эксплуатации или продления ресурса и т. д. Поэтому Правила классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства требуют выполнять расчетно-экспериментальное исследование вибрационного состояния СЭУ и крутильных колебаний валопровода СЭУ (при их проектировании и глубокой модернизации). При этом необходимо повышение эффективности методов, средств и систем автоматического управления СЭУ, обеспечивающих надежность морских (речных) судов путем оперативной регистрации процессов деградации и обнаружения зарождающихся дефектов узлов СЭУ, диагностирования СЭУ по крутильным колебаниям их валопровода [1-5].

Практическая необходимость повышения эффективности диагностирования СЭУ

В области контроля, диагностики и прогностики технического состояния СЭУ широко используются методы, средства и стандарты, основанные на контроле и анализе изгибных (радиальных) и продольных колебаний валопроводов (которые передаются на опорные узлы). Для этого применяются преобразователи относительной вибрации (вихретоковые, индуктивные и другие), преобразователи абсолютной вибрации (пье-

зоэлектрические, электродинамические и другие). На практике наибольшее распространение получил алгоритм виброконтроля по общему уровню вибрации корпусов подшипников или корпусов СЭУ [1, 2, 5].

Также, значительное влияние на появление дефектов в СЭУ оказывает напряженно-деформированное состояние основных узлов СЭУ, вызванное крутильными колебаниями валопровода. По результатам анализа статистических данных Российского морского регистра судоходства и Российского речного регистра проблема повреждений и поломки гребных валов остается актуальной и в настоящее время, особенно для судов смешанного плавания типа «река-море», что может быть связано с конструктивными особенностями, условиями эксплуатации и высокой степенью изношенности танкерного флота (судов типа «река-море»). Основными причинами повреждения гребных валов судов являются усталость и коррозионная усталость основных узлов валопровода СЭУ, при этом основные места повреждений – посадочный конус гребного винта и район шпоночного паза. Так, например, по данным Российского морского регистра судоходства за период 1999-2001 гг. из порядка 100 судов ОАО «Беломоро-Онежское пароходство», на шести судах типа «Волго-Дон» проектов 507 и 1565, типа «Волжский» проекта 05074, произошли поломки гребных валов, связанные с их полной заменой, причем некоторые из этих случаев сопровождались потерей винта. По данным Российского речного регистра за период 2004-2008 гг. резко участились случаи поломки гребных валов на судах типа «Волго-Дон» и «Волгонефть», и имело место 73 случая повреждений гребных валов, что составляет 15 % от общего количества поврежденных судов и их элементов всех поднадзорных судов. При этом, размер экономических убытков судовладельца из-за простоя судна в случае аварийной поломки гребного вала в *шесть* раз превышает экономические затраты из-за простоя судна в случае плановой замены гребного вала (по результатам диагностирования СЭУ). Однако штатной аппаратуры для контроля

параметров крутильных колебаний в различных сечениях валопровода СЭУ не существует. Поэтому необходимо повышение эффективности методов, средств и систем автоматического управления морских (речных) судов, обеспечивающих оперативную регистрацию процессов деградации и обнаружения зарождающихся дефектов узлов СЭУ, диагностирование СЭУ по крутильным колебаниям их валопровода (рис.1) [1-5].

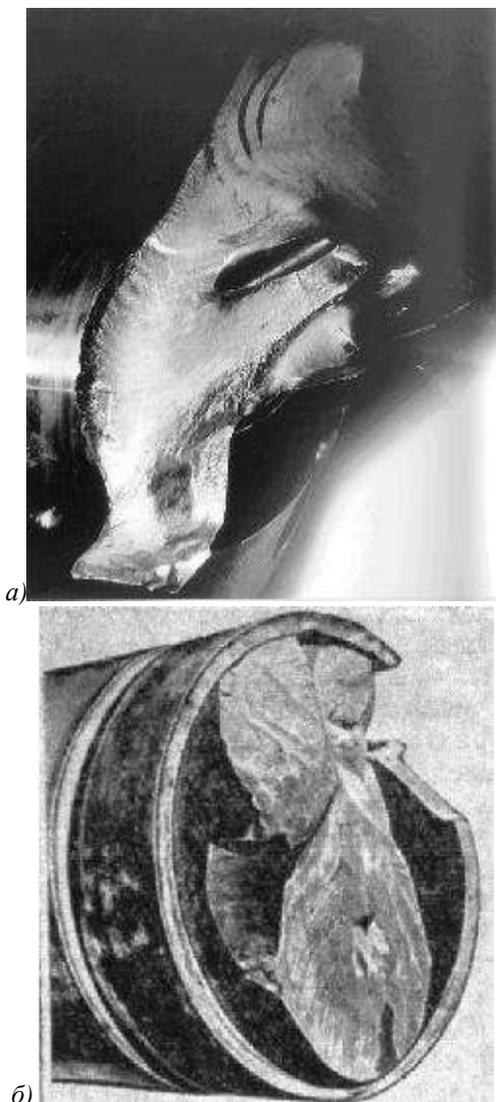


Рисунок 1 - Отказ СЭУ (разрушение основных узлов СЭУ) из-за крутильных колебаний:

а) усталостные разрушения коленчатого вала судового дизеля серии ЧН16,5/18,5; б) поломка гребного вала судна от образования и развития усталостных трещин около шпоночного паза [4]

По опыту торсиографирования валопроводов СЭУ известно, что иногда возбуждаются значительные вибрации СЭУ при сильных колебаниях моторной формы, связанные с возникновением так называемого обратного момента корпуса двигателя.

Все нагрузки, действующие на гребной вал СЭУ можно разделить на нагрузки систематического и случайного характера [4]. К систематическим нагрузкам относятся:

- переменный крутящий момент от главного двигателя (привода);
 - силы тяжести валов, фланцев, полумуфт и др.;
 - сила упора, передаваемая от гребного винта;
 - гидродинамический момент на гребном винте, связанный с неравномерностью поля скоростей набегающего потока воды;
 - контактное давление в месте посадки винта на вал;
 - изгибающие моменты, возникающие в связи с упругой деформацией корпуса судна.
- К случайным нагрузкам относятся:
- изгибающие моменты и реакции на опорах, связанные с монтажными искривлениями валопровода;
 - изгибающие моменты и реакции на опорах, связанные с износом трущихся подшипниковых пар;
 - изгибающие моменты и реакции на опорах, связанные с упругой деформацией корпуса судна на волнении;
 - нагрузки от неуравновешенности валов, муфт и т.п.;
 - силы инерции поперечной и продольной качки судна;
 - динамические нагрузки при столкновениях корпуса или гребного винта судна.

Методы и средства повышения эффективности диагностирования СЭУ

В целях повышения уровня надежности и безопасности морских (речных) судов (предупреждения аварий и отказов СЭУ, устранения их причин) и увеличения наработки на отказ судов разработаны расчетно-экспериментальные методы и соответствующие программно-технические средства (рис.2) [5-7]:

- метод тестового контроля параметров колебаний объекта по энергетическим формам для анализа свободных колебаний системы;
- метод диагностического контроля СЭУ по крутильным колебаниям валопровода на основе показателей чувствительности узлов к возбуждающим колебаниям воздействиям.

В отличие от существующих методов диагностирования СЭУ предлагаемые методы основаны на применении расчетных энергетических спектральных портретов объекта диагностирования, существенно облегчающих прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращающих область поиска возможных повреждений основных узлов СЭУ и повышающих надежность обнаружения дефектов. Уровень амплитуд вынужденных колебаний (отклик системы на зарождение дефекта) определяется энергетической чувствительностью к возбуждению (значением функций чувствительности), размерами дефектов, уровнем демпфирования в системе и отстройкой ее собственных частот колебаний от частот возмущения. Места правильной установки (наиболее интенсивного отклика) преобразователей крутильных колебаний валопровода вдоль его линии могут быть определены путем применения расчетной информации об энергетических формах на собственных частотах.



Рисунок 2 - Структурная схема методов повышения эффективности диагностирования СЭУ

Рассматривая математическую модель свободных колебаний системы любой природы, сложности, структуры и применяя метод Рэля можно записать выражения максимумов кинетической (магнитной) T_j^{\max} и потенциальной (электрической) W_j^{\max} энергий, определить j -ю собственную частоту колебаний путем рассмотрения баланса энергии системы $T_j^{\max} = W_j^{\max}$ при определенных допущениях относительно ее деформирования и функции чувствительности к проявлению дефектов (резонансным возбуждениям) для j -й собственной частоты колебаний при варьировании инерционных (индуктивных) и упругих (электрических емкостных) параметров электро-, гидро-, механической системы [5]:

$$\frac{d(\omega_j)/\omega_j}{dM_m/M_m} = -\frac{T_{mj}^{\max}}{2T_j^{\max}}, \quad \frac{d(\omega_j)/\omega_j}{dC_k/C_k} = \frac{W_{kj}^{\max}}{2W_j^{\max}},$$

где T_{mj}^{\max} , T_j^{\max} – максимальные значения кинетических (магнитных) энергий m -й массы (индуктивности) и всей системы при свободных колебаниях с частотой ω_j ; W_{kj}^{\max} , W_j^{\max} – максимальные значения потенциальных (электрических) энергий k -го участка и всей системы при свободных колебаниях с частотой ω_j ; M_m – момент инерции (масса, гидроакустическая масса, индуктивность) m -го элемента; C_k – жесткость (гидроакустическая жесткость, обратная величина электрической емкости) k -го участка.

Расчет уровней энергетических соотношений (функций чувствительности) элементов оборудования для определения энергетического спектрального портрета, рассматриваемого в качестве априорного базиса проектируемой системы технической диагностики, выполняется по компьютерной программе (рис. 3) [7].

Для вынесения заключения об отсутствии или наличии дефекта (дефектов), а также его развитии необходимо сравнить расчетную априорную информацию (расчетный энергетический спектральный портрет, определяемый по компьютерным программам) с апостериорным спектральным портретом на основе виброакустического канала. Энергетическая форма колебаний (в т.ч. крутильных) деформируемых тел характеризуется энергоемкими элементами – инерционными и упругими (рис. 3) в отличие от обычной формы колебаний (в т.ч. крутильных) деформируемых тел, характеризуемой дополнительными терминами – узлом и пучностью (рис.4).

При этом, наиболее энергоемким элементом называется тот элемент в системе, для которого при данной форме свободных колебаний кинетическая (потенциальная) энергия достигает относительно наибольшего значения. Согласно требованиям Правил классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства должны выполняться расчеты крутильных колебаний валопровода СЭУ для всех возможных в эксплуатации вариантов и режимов работы установки, в т.ч. расчеты свободных колебаний (частот и обычных форм свободных колебаний).

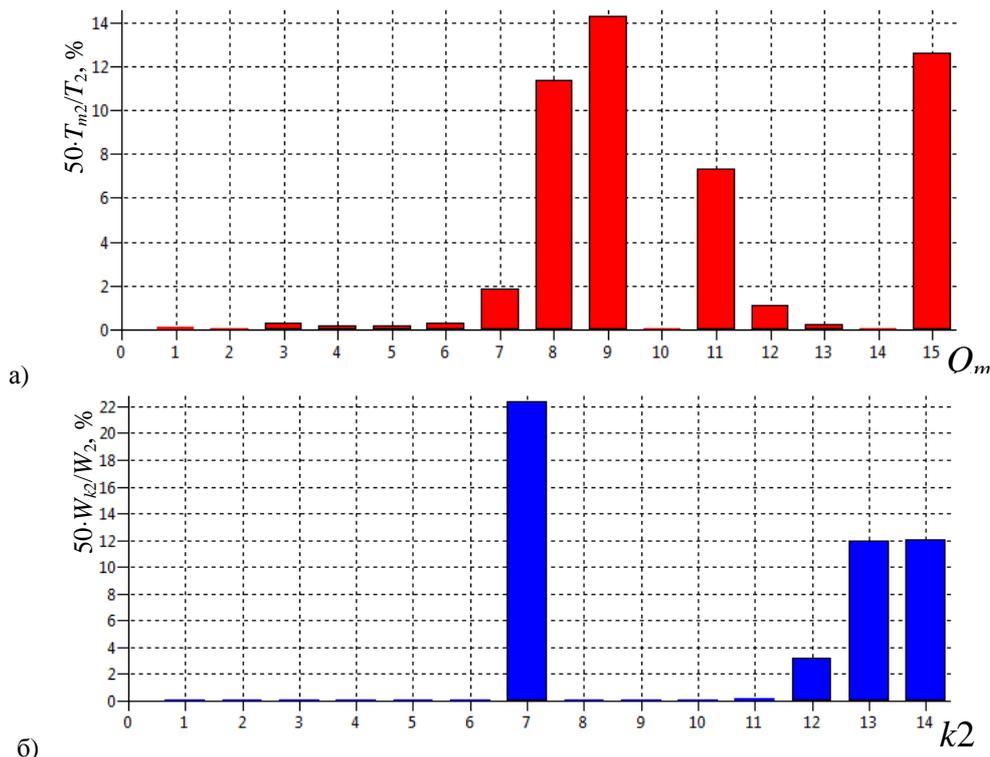


Рисунок 3 - Энергетические формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-02 на второй частоте собственных колебаний $f_2 = 29,4$ Гц (режим свободного хода): энергетическая форма инерционных элементов (а); энергетическая форма упругих элементов (б); Q_{m2} и $k2$ – обобщенные координаты и номера упругих участков валопровода на 2-й форме собственных колебаний

Однако, в практических задачах диагностирования СЭУ в качестве диагностической информации целесообразно использовать параметры энергетической формы колебаний (рис. 3), из-за того, что пучности и узлы обычных форм свободных колебаний (рис. 4) не всегда являются высокочувствительными местами соответственно к возбуждению колебаний и зарождению дефектов (в т.ч. трещин). При анализе свободных крутильных колебаний валопровода СЭУ выбираемой специалистом-диагностом формы лучшим местом и направлением возбуждения является точка в зоне энергоемкого элемента данной энергетической формы колебаний системы и направление, в котором эти колебания будут иметь максимум [5, 7].

По скорости затухания свободных колебаний можно контролировать состояние валов, гребных винтов, отдельных лопаток и других узлов СЭУ, имеющих в бездефектном состоянии очень малые потери. Для вибродиагностического контроля основных деталей валопровода СЭУ по его формам свободных колебаний может использоваться естественный режим возбуждения вынужденных колебаний на частотах свободных колебаний – режим пуска (выбега) машины.

Применение предложенных методов и средств

Апробация методов и средств повышения эффективности диагностирования СЭУ выполнена на стендовой установке, состоящей из судового дизеля 8ЧН16,5/18,5 (мощностью $P_H = 441,3$ кВт при частоте вращения коленчатого вала $n_H = 1750$ об/мин), упругой

муфты СТ.16.07.СБ и индукторного тормоза W700 (рис.5).

Согласно расчетным данным (рис.6): первая собственная частота $f_1 = 26,35$ Гц определяется, прежде всего, инерционными параметрами маховика двигателя, индукторного тормоза и упругими параметрами муфты; вторая собственная частота $f_2 = 169,53$ Гц (моторная форма) определяется, прежде всего, инерционными параметрами первой моторной массы, маховика и упругими параметрами коленчатого вала. При этом данная стендовая установка наиболее интенсивно откликается на моторной форме на возбуждение, приложенное к второй инерционной массе системы (первой моторной массе; относительная доля ее кинетической энергии – 22,1%), поэтому зарождение и рост повреждений деталей цилиндропоршневой группы ДВС (прежде всего, связанных со второй инерционной массой системы) будут проявляться в спектре колебаний установки в виде роста амплитуды частотной составляющей, равной $f_2 = 169,53$ Гц.

Измерение крутильных колебаний валопровода стендовой установки производилось на свободном конце коленчатого вала двигателя (у первой инерционной массы системы) с помощью радиоторсиографа инерционного типа конструкции ФГУП «Крыловский государственный научный центр» (в торсиографе используется емкостной способ преобразования углового перемещения инерционной массы в электрический сигнал, который по радиоканалу на частоте 660 кГц передается на регистрирующий прибор) (рис.7).

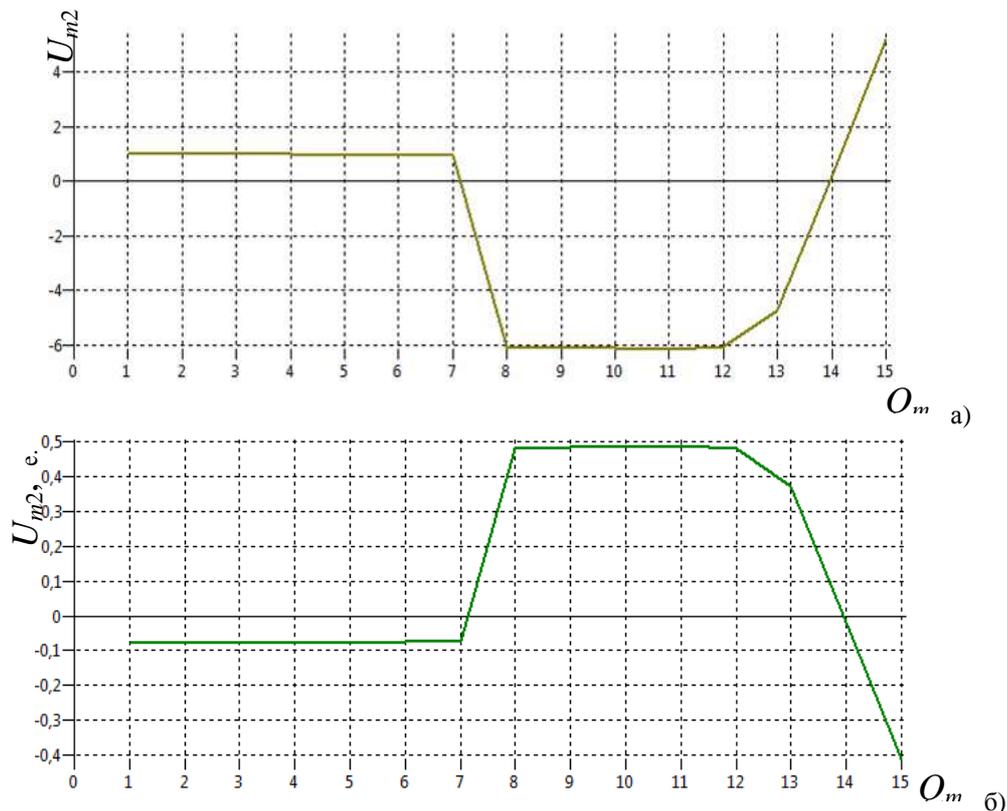


Рисунок 4 - Обычные формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-02 на второй частоте собственных колебаний $f_2 = 29,4$ Гц (режим свободного хода): при принудительной нормировке амплитуд обобщенных координат относительно первой инерционной моторной массы (а); при естественной нормировке амплитуд обобщенных координат (б); U_{m2} – амплитуды обобщенных координат Q_{m2} на 2-й форме собственных колебаний; e.e. – естественные единицы

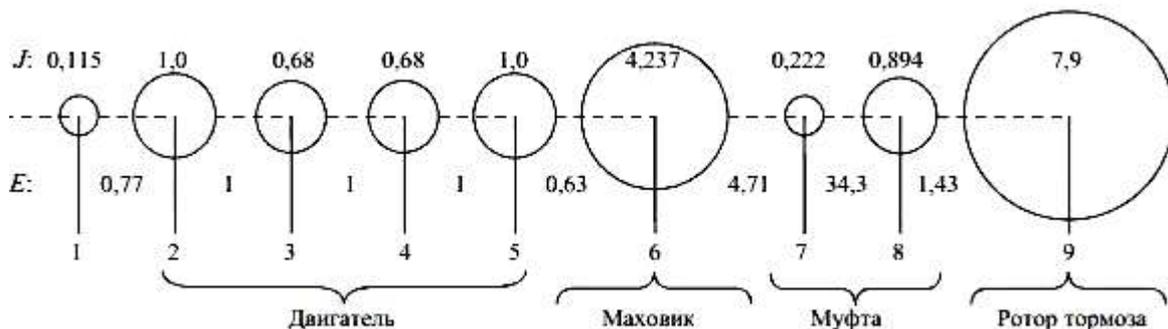


Рисунок 5 - Схема крутильных колебаний валопровода стендовой установки:
 J и E – безразмерные моменты инерции сосредоточенных масс (деталей) и податливости при кручении участков валов (в относительных единицах), определяемые как частное от деления реальных динамических параметров и постоянных безразмерной системы $j_0 = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момента инерции первой моторной массы и $e_0 = 2,174 \cdot 10^{-7} \text{ рад}/(\text{Н}\cdot\text{м})$ – податливости при кручении участка коленчатого вала

Сопоставление расчетных и экспериментальных данных по крутильным колебаниям валопровода стендовой установки с судовым дизелем 8ЧН16,5/18,5 позволяет сделать заключение о правильности построения математической модели крутильных колебаний и целесообразности диагностирования зарождающихся и развитых дефектов по разработанным методам и средствам (рис.6, 8):

1. В диапазоне 1570...1620 об/мин в валопроводе развиваются резонансные крутильные колебания первой формы от возмущающего момента пер-

вого порядка с частотой $N_1^T \approx 1580$ кол/мин практически совпадающей с расчетной $N_1^P \approx 1581$ кол/мин.

2. В диапазоне 1270...1320 об/мин зарегистрированы резонансные крутильные колебания второй (моторной) формы от возмущающего момента восьмого порядка с частотой $N_2^T \approx 10176$ кол/мин практически совпадающей с расчетной $N_2^P \approx 10172$ кол/мин.

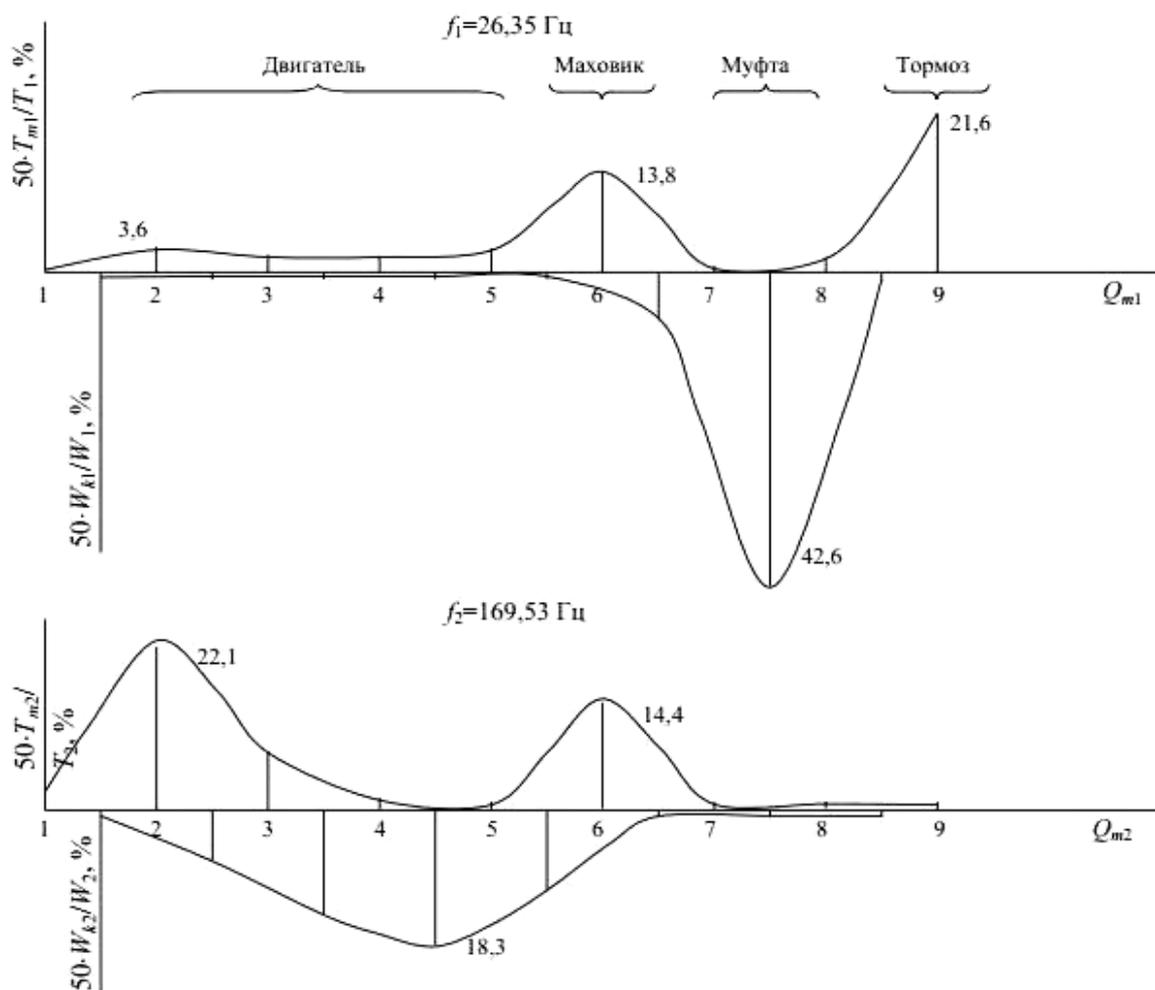


Рисунок 6 - Энергетические формы крутильных колебаний валопровода стендовой установки при $f_1=26,35$ Гц и $f_2=169,53$ Гц; Q_{m1} и Q_{m2} – обобщенные координаты на 1-й и 2-й форме собственных колебаний

Использование параметров крутильных колебаний валопровода СЭУ для диагностики эксплуатационных повреждений его узлов представляется весьма перспективным, если также ориентироваться на анализ демодулированных высокочастотных колебаний.

В качестве устройств измерения и диагностирования крутильных колебаний валопровода СЭУ могут применяться различные преобразователи крутильных колебаний:

- вихретоковые преобразователи, индуктивные преобразователи, лазеры и т.д. (бесконтактные преобразователи);

- тензодатчики;
- оптические декодеры;
- акселерометры, расположенные по окружности инерционной массы на углы 0 и 180 ° и другие.

При этом измеряемыми параметрами могут быть:

- скорость вращения валопровода;
- потребляемая мощность объекта диагностирования;
- амплитуда крутильных колебаний;
- деформации вала от крутильных колебаний;
- напряжения вала от крутильных колебаний;
- температура места контроля;
- собственные частоты крутильных колебаний;

- скоростной диапазон, в котором выполняются измерения.

Разработанные методы и средства позволяют повысить эффективность диагностирования СЭУ путем обнаружения и устранения врожденных, зарождающихся и развитых дефектов, причин повреждений и/или разрушений узлов валопровода СЭУ на всех этапах жизненного цикла изделия.

Например, при проектировании дизель-редукторных агрегатов ДРА-525-02/03 с валопроводом проекта 11980 выполнены расчеты крутильных колебаний СЭУ для всех возможных в эксплуатации вариантов и режимов работы установки согласно требованиям Правил классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства, в т.ч. [2, 7]:

- холостого хода ДРА-525-02/03;
- свободного хода с ДРА-525-02/03 (рис.9);
- свободного хода с ДРА-525-02/03 с одним неработающим цилиндром привода;
- совместной работы компрессора (насоса) ДРА-525-02/03 и валопровода судна;
- работы компрессора (насоса) ДРА-525-02/03 при отключенном валопроводе судна;
- торможения гребного вала при реверсировании ДРА-525-02/03.

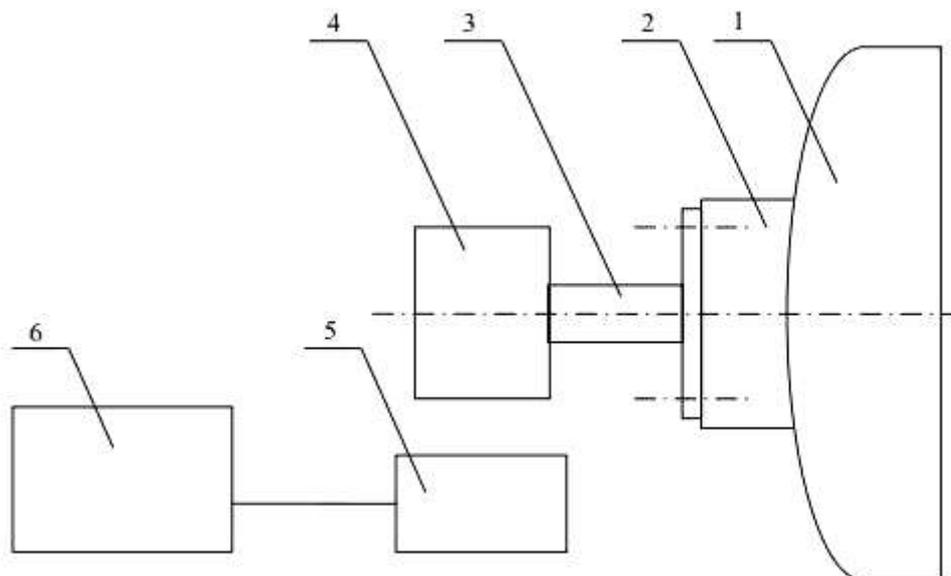


Рисунок 7 - Схема крепления радиотрассографа на стендовой установке:
 1 – двигатель 8ЧН16,5/18,5; 2 – коленчатый вал; 3 – валик привода;
 4 – радиотрассограф; 5 – регистрирующий прибор; 6 – ПЭВМ

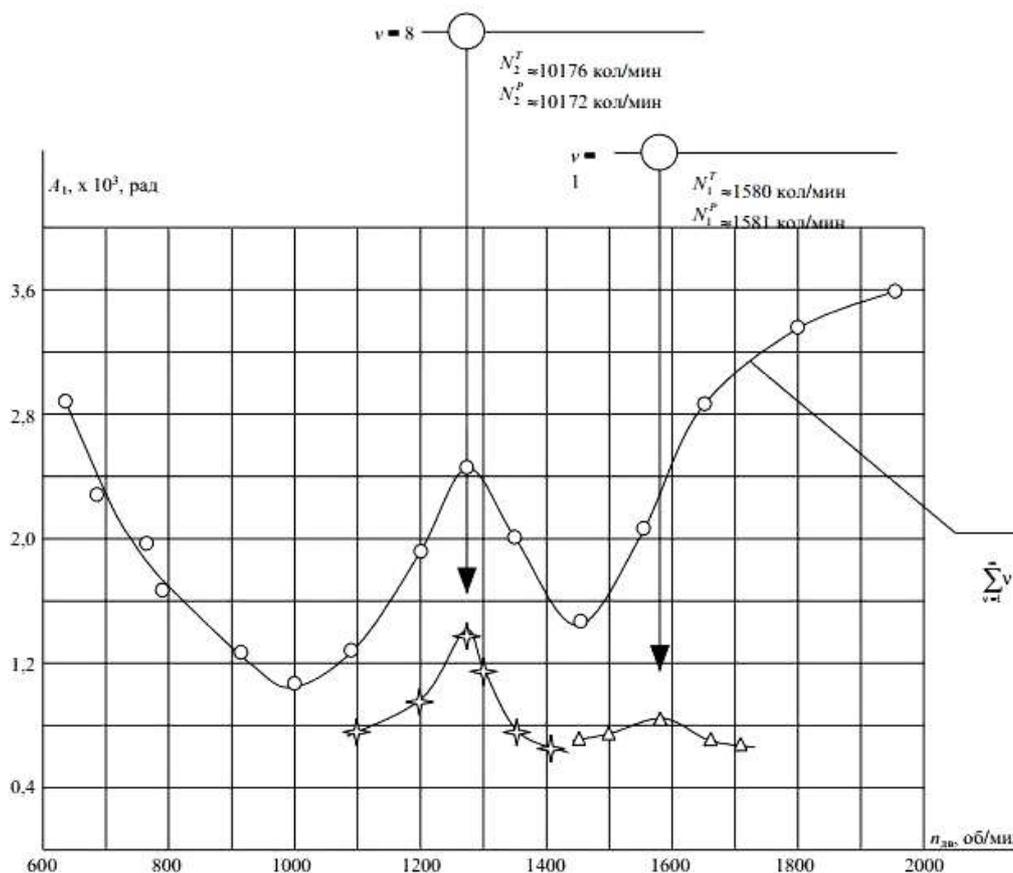


Рисунок 8 - Зависимость максимальных суммарных амплитуд крутильных колебаний первой массы стендовой установки от частоты вращения коленчатого вала двигателя при работе на холостом ходу (по точкам через 50 об/мин): $N_1^P \approx 1581$ кол/мин и $N_2^P \approx 10172$ кол/мин; $N_1^T \approx 1580$ кол/мин и $N_2^T \approx 10176$ кол/мин – расчетные и экспериментальные частоты свободных крутильных колебаний системы соответственно; ν – порядок возмущающего момента;

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu$ – физическое значение амплитуд крутильных колебаний по данным обработки осциллограмм

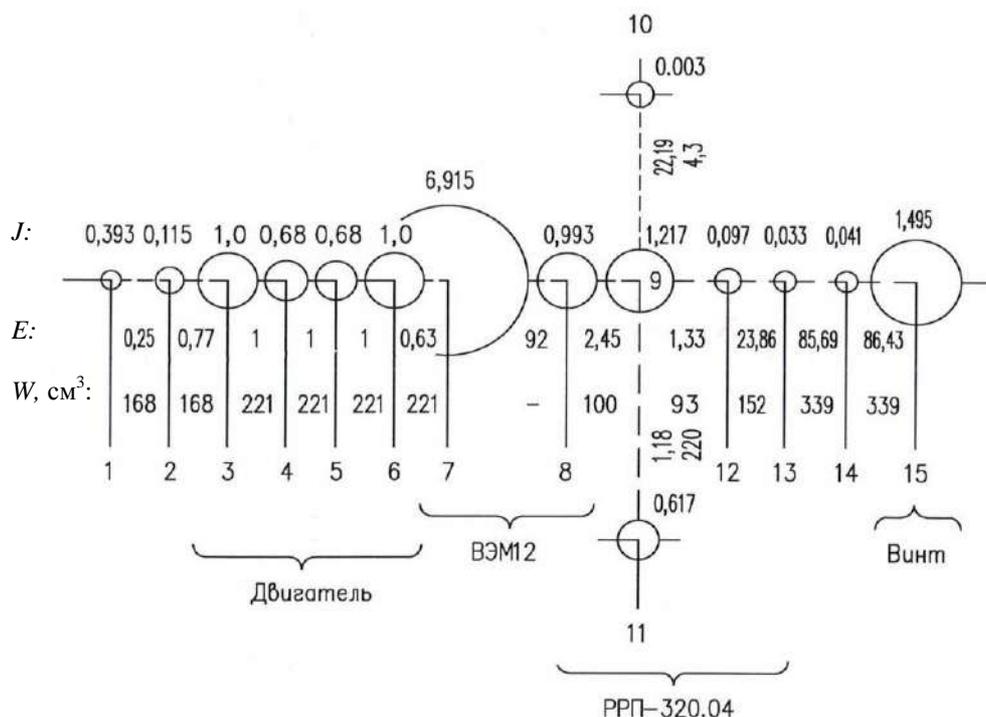


Рисунок 9 - Расчетная схема крутильных колебаний валопровода проекта 11980: режим свободного хода с ДРА-525-02; J и E – безразмерные моменты инерции сосредоточенных масс (деталей) и податливости при кручении участков валов (в относительных единицах), определяемые как частное от деления реальных динамических параметров и постоянных безразмерной системы $j_0 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момента инерции первой моторной массы и $e_0 = 2.174 \cdot 10^{-7} \text{ рад}/(\text{Н} \cdot \text{м})$ – податливости при кручении участка коленчатого вала; W – момент сопротивления кручению упругих участков (валов); ВЭМ12 – высокоэластичная муфта; РРП-320.04 – реверс-редукторная передача

При этом применение параметров энергетических форм колебаний позволило создать надежные конструкции с минимальной трудоемкостью проектных работ. В частности, по результатам расчета собственных крутильных колебаний валопровода проекта 11980 по компьютерной программе (режим свободного хода с ДРА-525-02) построены энергетические формы крутильных колебаний валопровода (рис. 3, 10), примененные в целях повышения эффективности отстройки систем от опасных резонансов [7].

Результаты расчетного исследования и торсиографирования вынужденных крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-02/03 подтвердили, что максимальные суммарные амплитуды напряжений и моментов от крутильных колебаний в валопроводе системы при полигармоническом возбуждении включительно не превосходят допускаемые для длительной надежной эксплуатации установки в рабочем диапазоне скоростей вращения (600...1750 об/мин) коленчатого вала дизеля 8ЧН16,5/18,5.

Также в рамках решения проблемы обеспечения надежности и безопасности морских (речных) судов, в т.ч. СЭУ, целесообразно страховым компаниям, сотрудничающим с владельцами судов работать по тарифам, зависящим от наличия заключенных договоров со специализированными организациями в области неразрушающего контроля и технической диагностики технического состояния морских (речных) судов. Наличие таких

договоров приводит к снижению количества инцидентов (отказов) и аварий (разрушений) судов, в т.ч. СЭУ (т.е. страховых случаев) и к снижению страховых выплат со стороны страховых компаний. Что дает возможность страховым компаниям снижать сумму страховых премий, взимаемых с судовладельца.

По каждому факту возникновения аварии на всех поднадзорных судах проводится техническое расследование ее причин специальной комиссией. В состав указанной комиссии также необходимо включать представителей страховщика, с которым организация, эксплуатирующая морское (речное) судно, заключила договор обязательного страхования гражданской ответственности.

Заключение

Разработанные методы и средства позволили повысить эффективность диагностирования СЭУ путем снижения трудоемкости работ при отстройке систем от опасных резонансов в рабочем диапазоне скоростей вращения, существенного облегчения прогнозирования зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращения области поиска возможных повреждений узлов СЭУ, повышения надежности обнаружения дефектов.

Для повышения уровня надежности СЭУ путем диагностического контроля зарождающихся дефектов предлагаются следующие мероприятия:

- разработка и штатное оснащение СЭУ

встроенными средствами измерения и анализа крутильных колебаний валопровода (например, энкодерами различного принципа действия, в т.ч. оптическими, магнитными, магниторезисторными, электромагнитноакустическими и/или другими преобразователями) и аварийной защиты с применением предложенной инновационной технологии;

- целесообразно внести изменения в Российский морской регистр судоходства в части обязательного расчета параметров энергетических форм свободных крутильных колебаний валопровода

СЭУ и их применения при торсиографировании/тензометрировании, а также при диагностировании технического состояния СЭУ в составе систем автоматического управления СЭУ;

- целесообразно страховым компаниям, сотрудничающим с владельцами морских (речных) судов работать по тарифам, зависящим от наличия заключенных договоров со специализированными организациями в области неразрушающего контроля и технической диагностики технического состояния СЭУ.

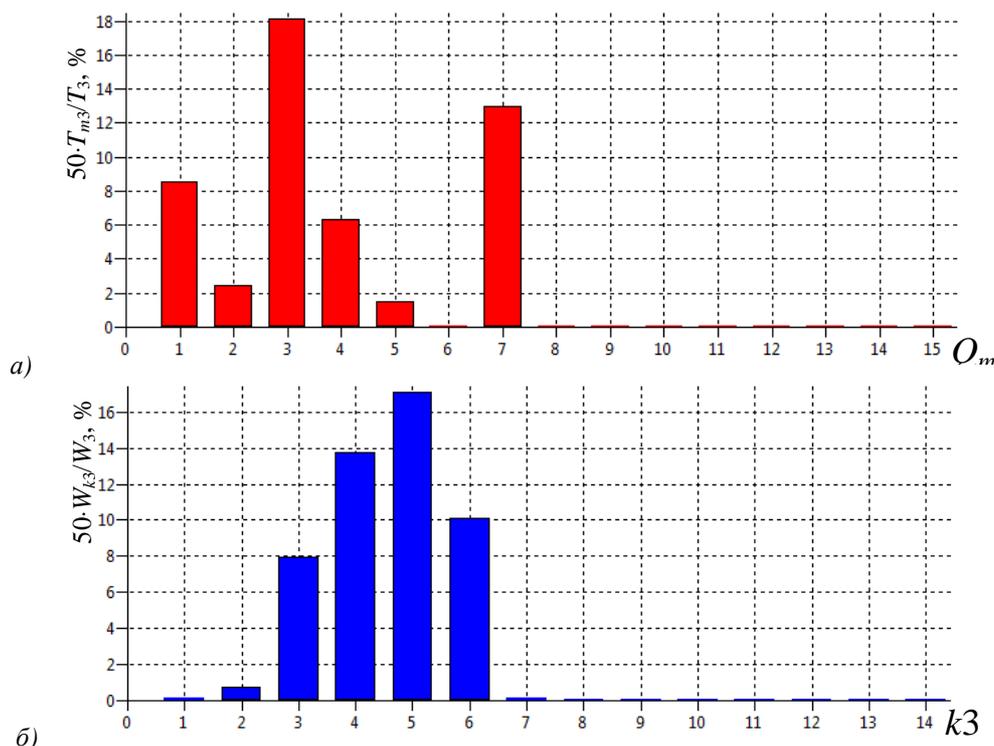


Рисунок 10 - Энергетические формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-02 на третьей частоте собственных колебаний $f_3 = 145,6$ Гц (режим свободного хода): энергетическая форма инерционных элементов (а); энергетическая форма упругих элементов (б); Q_{m3} и $k3$ – обобщенные координаты и номера упругих участков валопровода на 3-й форме собственных колебаний

Литература

1. Неразрушающий контроль: справ.: в 8 т. / под общ. ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 2003-2005.
2. Правила классификации и постройки морских судов. С.-П.: Российский морской регистр судоходства, 2012, т.2 – 686 с.
3. Ефремов Л.В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. – СПб.: Наука, 2007. – 276 с.
4. Прогнозирование начальной стадии усталостного разрушения судовых гребных валов (на примере т/х «Волгонефть» проекта 1577/550А): научно-исследовательская работа / М.Н. Чура; Новороссийск: ФГБОУ ВПО «Морская государственная акаде-

мия имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», 2010. – 57 с.

5. Решетов А.А. Неразрушающий контроль и техническая диагностика энергетических объектов: учеб. пособие / А.А. Решетов, А.К. Аракелян; под ред. проф. А.К. Аракеляна. Чебоксары: Изд-во Чуваш. унта, 2010. 470 с.

6. Решетов А.А. Методы и средства повышения эффективности вибродиагностического контроля энергомеханического оборудования газотранспортных систем // Контроль. Диагностика.– 2012. – №9. – С.32-41.

7. Программно-техническое средство повышения эффективности вибродиагностического контроля (ПТС ПЭВДК) энергомеханического оборудования / А.А. Решетов, Н.А. Захаров; Чебоксары: Чувашское республиканское РО РОНКТД, 2013.

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК ПО КРУТИЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЯМ ВАЛОПРОВОДА

Решетов А.А.¹, Захаров Н.А.²

¹ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород»

²Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова»

¹428027, Россия, г.Чебоксары, пр. И.Яковлева, д.25

²428015, Россия, г.Чебоксары, Московский пр., д.15

reshetov2006@mail.ru, nikalezah@gmail.com

Реферат

Работа посвящена разработке новых методов и средств диагностирования судовых энергетических установок (СЭУ) по крутильным колебаниям валопровода. Предлагаемые методы и средства основаны на применении расчетных энергетических спектральных портретов объекта диагностирования, повышающих эффективность отстройки систем от опасных резонансов в рабочем диапазоне скоростей вращения, существенно облегчающих прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращающих область поиска возможных повреждений узлов СЭУ, повышающих надежность обнаружения дефектов.

Введение

Обеспечение надежной и безопасной эксплуатации морских (речных) судов требует периодической оценки их технического состояния, обнаружения дефектов, потенциально опасных для дальнейшей эксплуатации, установления их причин и управления объектом путем применения методов и средств неразрушающего контроля и технической диагностики, в т.ч. в составе информационно-измерительных и управляющих систем морских (речных) судов. Применение ресурсосберегающей технологии технического обслуживания СЭУ по техническому состоянию и получение данных для прогнозирования остаточного ресурса основных узлов СЭУ невозможны без анализа и синтеза всех параметров, в т.ч. информативных параметров вибрационного состояния СЭУ и крутильных колебаний валопровода СЭУ. Поэтому Правила классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства требуют выполнять расчетно-экспериментальное исследование вибрационного состояния СЭУ и крутильных колебаний валопровода СЭУ (при их проектировании и глубокой модернизации). При этом использование крутильных колебаний для распознавания технического состояния СЭУ и учет крутильных колебаний при оценке остаточного ресурса позволит принять меры для повышения уровня надежности СЭУ [1-4].

Практическая необходимость диагностирования СЭУ

по крутильным колебаниям валопровода

По результатам анализа статистики отказов узлов СЭУ выход их из строя по механической части в 80% случаев обусловлен повреждением подшипников из-за дисбалансов, расцентровок, изгибов валов, дефектов подшипников и других причин. Поэтому в области контроля, диагностики и

прогностики технического состояния СЭУ широко используются методы, средства и стандарты, основанные на контроле и анализе изгибных (радиальных) и продольных колебаний валопроводов (которые передаются на опорные узлы). На практике наибольшее распространение получил алгоритм виброконтроля по общему уровню вибрации корпусов подшипников или корпусов СЭУ для среднегеометрических частот треть-октавных полос до 160 Гц (двигатели внутреннего сгорания), до 500 Гц (главные паровые турбозубчатые агрегаты, роторные вспомогательные механизмы, поршневые воздушные компрессоры) и до 8 000 Гц (газотурбозубчатые агрегаты) (СКЗ амплитуды виброскорости, измеренного в треть-октавных полосах частот). При этом увеличение общего уровня вибрации в 2,5 раза (на 8 дБ) по сравнению с граничным значением для нормального (хорошего) состояния указывает на переход в зону предельно допустимого (предварийного) состояния. Увеличение же амплитуды в 10 раз (на 20 дБ) по сравнению с опорным прямым спектром означает переход в зону недопустимого (аварийного) состояния и необходимость ремонта [1-5].

Однако данный алгоритм не позволяет учесть следующие факторы, сопутствующие зарождению и развитию деградационных процессов в машинах [4, 5]:

- увеличение амплитуд колебаний узлов оборудования, определяющих безопасность его функционирования за пределами указанного диапазона;
- появление выбросов в сигнале, часто связанных с развитием локальных, быстро развивающихся повреждений;
- появление модуляции колебаний в зонах вынужденных и/или собственных частот системы при зарождении повреждений;
- зарождение и развитие дефектов, проявляющихся при крутильных колебаниях валопроводов

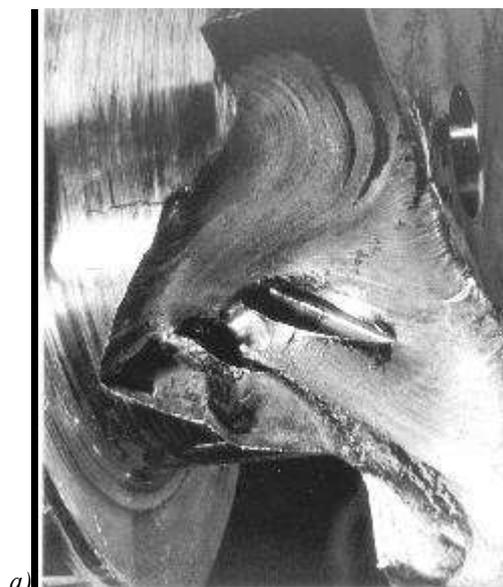
СЭУ (либо не передающихся на опорные узлы, либо проявляющиеся в вибрациях опорных узлов в зашумленном виде).

Для вибродиагностического контроля зарождающихся дефектов разработаны и применяются: метод анализа спектров и индексов амплитудной и частотной модуляции виброакустических сигналов в зонах вынужденных частот; метод анализа огибающей вибросигнала на резонансных частотах самого механизма; метод безразмерных S -дискриминантов с нормализованными вибрационными параметрами оборудования и другие методы [1, 4, 5].

Кроме того, до 20% случаев отказа СЭУ по механической части происходит по причинам повреждения основных узлов СЭУ, несущих технологическую нагрузку (муфт, демпферов, валов, лопаток и других) из-за крутильных колебаний валопровода (в т.ч. в переходных процессах в динамических режимах работы), что приводит к увеличению количества отказов СЭУ, уменьшению наработки на отказ СЭУ и возникновению опасности появления системных аварий (рис.1). При этом определяющим фактором образования и развития дефектов (трещин, повреждения зубьев зубчатых муфт, повреждения демпферов, деградации упругих свойств муфт, фреттинг-коррозии в сопряжениях вал-втулка зубчатая и других) в элементах конструкции СЭУ является качество отстройки валопровода от возбуждения резонансов крутильных колебаний (с учетом уровней демпфирования и показателей чувствительности элементов СЭУ к возбуждающим колебаниям воздействиям). Поэтому теория и практика эксплуатации СЭУ показывают, что контроль параметров крутильных колебаний валопровода СЭУ необходим как для подтверждения результатов расчетных исследований, так и для диагностирования СЭУ. Однако штатные системы автоматического управления СЭУ не оснащены контрольно-диагностической аппаратурой для определения начала зарождения дефектов в данных узлах СЭУ и трендов их развития [2-5].

Моментами, возбуждающими заметные крутильные колебания валопровода СЭУ могут быть: переменные крутящие моменты привода (ДВС, турбоустановки); динамические моменты, действующие на рабочие лопасти гребных винтов на частоте вращения гребного вала, на лопаточной и кратных ей частотах; динамические моменты со стороны дефектов в основных узлах СЭУ и другие. Следовательно, возникает потребность в разработке средств контроля и анализа крутильных колебаний валопровода СЭУ, и с учетом остальных параметров контроля состояния СЭУ, в создании уточненной модели всех действующих нагрузок на валопровод и элементы конструкции СЭУ. Согласно этой модели необходимо определить напряженно-деформированное состояние узлов конструкции СЭУ, выполнить его анализ и определить опасные участки, где возможно зарождение дефектов. На этих участках валопровода СЭУ необходимо вести непрерывный мониторинг напряженно-деформированного состояния металла; по результа-

там анализа определить время возникновения дефектов и соответствующий остаточный ресурс; принять меры для предотвращения разрушения или отказа основных узлов СЭУ [2-4].



а)

б)



Рисунок 1 - Отказ СЭУ
(разрушение основных узлов СЭУ)
из-за крутильных колебаний:

- а) усталостные разрушения коленчатого вала судового дизеля серии ЧН16,5/18,5;
- б) поломка гребного вала судна «Сатурн» проекта 502 [3]

Предложенные методы и средства

Необходимым предварительным этапом работ по разработке новых методов и средств диагностирования СЭУ по крутильным колебаниям валопровода является обоснование выбора и разработка методов и средств измерений крутильных колебаний, оценка возможных путей диагностирования. В этих целях использованы методы математического моделирования как экономически целесообразные и разработаны расчетно-экспериментальные методы и соответствующие программно-технические средства (рис.2) [4-6]:

- метод тестового контроля параметров колебаний объекта по энергетическим формам для анализа свободных колебаний системы;

- метод диагностического контроля СЭУ по крутильным колебаниям валопровода на основе показателей чувствительности узлов к возбуждающим колебаниям воздействиям.

В отличие от существующих методов диагностирования СЭУ, предлагаемые методы основаны на применении расчетных энергетических спектральных портретов объекта диагностирования, существенно облегчающих прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращающих область поиска возможных повреждений узлов СЭУ и повышающих надежность обнаружения дефектов. Для этого используются энергетические формы колебаний деформируемых тел, характеризуемые энергоемкими элементами – инерционными и упругими. При этом наиболее энергоемким элемен-

том называется тот элемент в системе, для которого при данной форме свободных колебаний кинетическая (потенциальная) энергия достигает относительно наибольшего значения. Инерционные характеристики задаются в простейших случаях списками инерционных элементов, отражающих вращательные движения тел вращений. Линейные силы упругости описываются упругими элементами. Введенные таким образом элементы и твердые тела имеют в своем составе геометрическую (кинематическую) и физическую части. Первая включает переменные (координаты), описывающие обобщенные координаты и перемещения объектов механической модели, вторая отражает физические характеристики – инерционные и упругие свойства (определяемые по компьютерной программе).



Рисунок 2 - Структурная схема системы виброакустического диагностирования (дополненной методами повышения эффективности диагностического контроля)

Известно, что векторные дифференциальные уравнения движения с правой частью системы любой природы с n степенями свободы представляются математической моделью динамических процессов:

$$[A]\{\ddot{Q}\} + [B]\{\dot{Q}\} + [C]\{Q\} = \{P(t)\}, \quad (1)$$

где $[A]$ – матрица обобщенных коэффициентов инерции, значения которых определяются геометрическими, массовыми и/или индуктивными характеристиками системы; $[B]$ – матрица обобщенных коэффициентов сопротивления; $[C]$ – матрица обобщенных коэффициентов жесткостей, которые определяются геометрическими, массовыми, упругими и/или электрическими емкостными характеристиками системы; $\{Q\}$ – вектор обобщенных координат размера n ; $\{P(t)\}$ – вектор

силового возбуждения, приведенный к обобщенным координатам; t – время.

Симметрические матрицы $[A]$, $[B]$, $[C]$ размера $n \times n$ находятся из выражений $[A] = S_1^T [\bar{M}] S_1$, $[B] = S_2^T [\bar{D}] S_2$, $[C] = S_3^T [\bar{C}] S_3$, $\{P(t)\} = S_4^T \{\bar{P}\}$,

где $[\bar{M}]$, $[\bar{D}]$, $[\bar{C}]$ – диагональные матрицы, элементами которых являются компоненты векторов m_i соответственно инерционных (массовых, индуктивных), диссипативных d_i и упругих (емкостных) $c_{i,i}$ характеристик элементов энергетического оборудования; S_1 , S_2 , S_3 , S_4 – структурные матрицы инерции, сопротивления, упругости и силовая, определяемые функциональными связями между координатами движений инерционных

$\{\eta\}$, диссипативных $\{\theta\}$, упругих $\{\xi\}$ и силовых $\{\psi\}$ элементов и обобщенными координатами

$$\{\eta\} = S_1\{Q\}, \{\theta\} = S_2\{Q\},$$

$$\{\xi\} = S_3\{Q\}, \{\psi\} = S_4\{Q\}.$$

Отбрасыванием в (1) правых частей и диссипативных членов формируются уравнения свободных линейных колебаний. Подстановкой в них и в уравнения (1) гармонических решений, получаются алгебраические уравнения задач на свободные и вынужденные колебания.

Рассматривая математическую модель свободных колебаний системы любой природы, сложности, структуры и применяя метод Рэля можно записать выражения максимумов кинетической (магнитной) T_j^{\max} и потенциальной (электрической) W_j^{\max} энергий, определить j -ю собственную частоту колебаний путем рассмотрения баланса энергии системы $T_j^{\max} = W_j^{\max}$ при определенных допущениях относительно ее деформирования и функции чувствительности к проявлению дефектов (резонансным возбуждениям) для j -й собственной частоты колебаний при варьировании инерционных (индуктивных) и упругих (электрических емкостных) параметров электро-, гидро-, механической системы [4]:

$$\frac{d(\omega_j)/\omega_j}{dM_m/M_m} = -\frac{T_{mj}^{\max}}{2T_j^{\max}}, \quad \frac{d(\omega_j)/\omega_j}{dC_k/C_k} = \frac{W_{kj}^{\max}}{2W_j^{\max}},$$

где T_{mj}^{\max} , T_j^{\max} – максимальные значения кинетических (магнитных) энергий m -й массы (индуктивности) и всей системы при свободных колебаниях с частотой ω_j ; W_{kj}^{\max} , W_j^{\max} – максимальные значения потенциальных (электрических) энергий k -го участка и всей системы при свободных колебаниях с частотой ω_j ; M_m – момент инерции (масса, гидроакустическая масса, индуктивность) m -го элемента; C_k – жесткость (гидроакустическая жесткость, обратная величина электрической емкости) k -го участка.

Расчет уровней энергетических соотношений (функций чувствительности) элементов оборудования для определения энергетического спектрального портрета, рассматриваемого в качестве априорного базиса проектируемой системы технической диагностики, выполняется по компьютерной программе (рис. 3) [6]. Согласно требованиям Правил классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства должны выполняться расчеты крутильных колебаний валопровода СЭУ для всех возможных в эксплуатации вариантов и режимов работы установки, в т.ч. расчеты свободных колебаний (частот и обычных форм свободных колебаний).

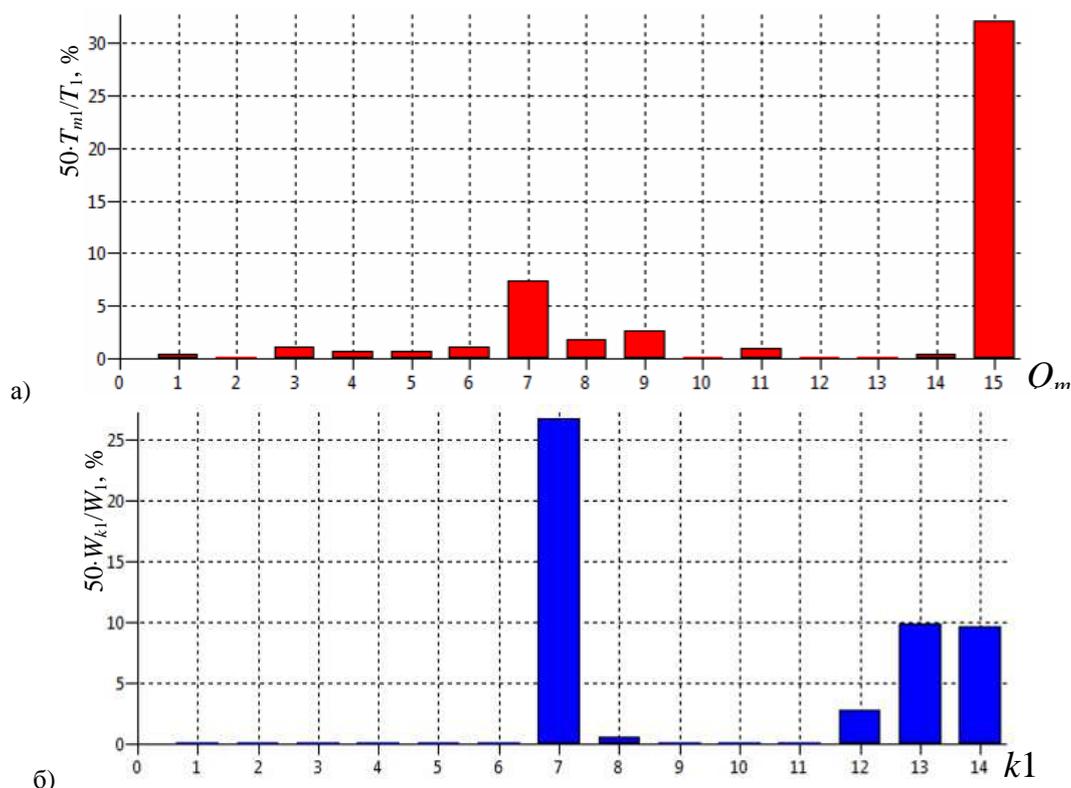


Рисунок 3 - Энергетические формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-03 на первой частоте собственных колебаний $f_1 = 16,4$ Гц (режим свободного хода): энергетическая форма инерционных элементов (а); энергетическая форма упругих элементов (б); Q_{m1} и $k1$ – обобщенные координаты и номера упругих участков валопровода на 1-й форме собственных колебаний

Однако, в практических задачах диагностирования СЭУ в качестве диагностической информации целесообразно использовать параметры энергетической формы колебаний (рис. 3), из-за того, что пучности и узлы обычных форм свободных колебаний (рис. 4) не всегда являются высокочувствительными местами соответственно к возбуждению колебаний и зарождению дефектов (в т.ч. трещин). При анализе свободных крутильных колебаний валопровода СЭУ выбираемой специалистом формой лучшим местом и направлением возбуждения является точка в зоне энергоемкого элемента данной энергетической формы колебаний системы и направление, в котором эти колебания будут иметь максимум [4, 6].

Для однозначного соотношения характеристик виброакустического сигнала с местом и типом зарождающегося дефекта предложено в качестве диагностических признаков зарождающихся дефектов использовать матрицы размером $N_J \times N_J$, $N_C \times N_C$ энергетических соотношений кинетических и потенциальных энергий дискретных элементов модели, соответственно, а также вектор частот свободных колебаний размером $(N - n_0)$, где N_J , N_C и N – число инерционных, упругих элементов, обобщенных координат; n_0 – число нуле-

вых частот свободных колебаний оборудования (в простейшем случае $n_0 = 1$).

Кроме того известно, что формы крутильных колебаний с малым демпфированием в сочетании с поперечными формами значительно увеличивают напряжения в элементах валопровода, что может привести к появлению трещины. При отслеживании трендов изменения вибрации крутильных колебаний можно на более ранней стадии, по сравнению с отслеживанием поперечной вибрации, определить момент зарождения трещины. Поэтому, расчетное исследование собственных крутильных колебаний валопровода СЭУ (частот и энергетических форм) выполняется с целью обоснования выбора установки вибропреобразователей для оптимального измерения крутильных колебаний и оценки близости собственных частот к частотам возбуждающих воздействий (со стороны привода, потребителя энергии – гребного винта, дефектов эксплуатационного и конструктивно-монтажного характера).

При этом вынужденные крутильные колебания валопровода СЭУ возможны из-за гармонических возбуждений и/или произвольных нестационарных возмущений крутильных колебаний.

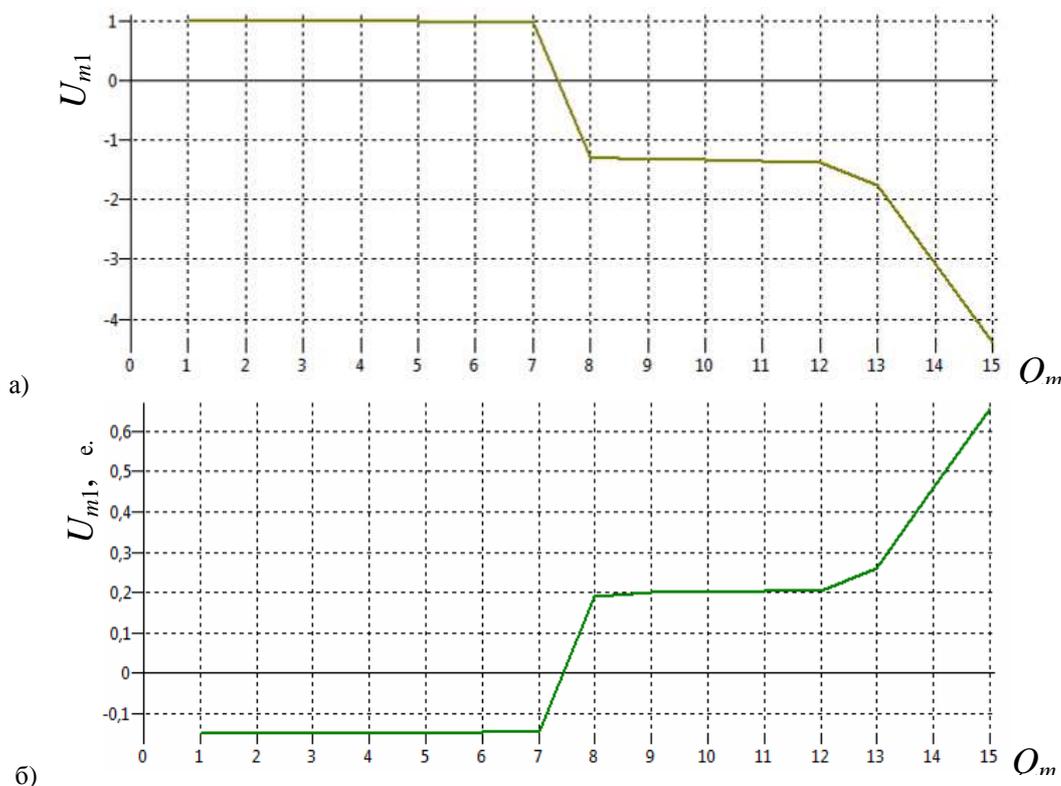


Рисунок 4 - Обычные формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-03 на первой частоте собственных колебаний $f_1 = 16,4$ Гц (режим свободного хода): при принудительной нормировке амплитуд обобщенных координат относительно первой инерционной моторной массы (а); при естественной нормировке амплитуд обобщенных координат (б); U_{m1} – амплитуды обобщенных координат Q_{m1} на 1-й форме собственных колебаний; е.е. – естественные единицы

Прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сокращение области поиска возможных повреждений оборудования и повышение надежности обнаружения дефектов достигаются за счет того, что путем математического моделирования определяют расчетный спектральный портрет (априорный базис проектируемой системы технической диагностики), являющийся совокупностью энергетических соотношений элементов оборудования на собственных формах и частотах колебаний. Для вынесения заключения об отсутствии или наличии дефекта, а также его развитии необходимо сравнить расчетную априорную информацию с апостериорным спектральным портретом на основе виброакустического канала. Основные узлы оборудования, предрасположенные к зарождению дефектов, обладают максимальными уровнями энергетических соотношений на собственных частотах. О возникновении дефекта судят по появлению амплитуд колебаний высокоэнергоемких узлов оборудования на собственных частотах объекта диагностирования. О развитии дефекта судят по разности амплитуд колебаний высокоэнергоемких узлов оборудования на собственных частотах объекта диагностирования, измеренных в различное время (по прямым спектрам) и/или спектрам огибающей сигнала.

Применение разработанных методов и средств

Апробация данных методов и средств выполнена на стендовой установке, состоящей из судового дизеля 8ЧН16,5/18,5 (мощностью $P_n=441,3$ кВт при частоте вращения коленчатого вала $n_n=1750$ об/мин), упругой муфты СТ.16.07.СБ и индукторного тормоза W700. Измерение крутильных колебаний валопровода стендовой установки производилось на свободном конце коленчатого вала двигателя (у первой инерционной массы системы) с помощью радиотресиографа инерционного типа конструкции ФГУП «Крыловский государственный научный центр» (в тресиографе используется емкостной способ преобразования углового перемещения инерционной массы в электрический сигнал, который по радиоканалу на частоте 660 кГц передается на регистрирующий прибор). Сопоставление расчетных и экспериментальных данных по крутильным колебаниям валопровода стендовой установки с судовым дизелем 8ЧН16,5/18,5 позволяет сделать заключение о правильности построения математической модели крутильных колебаний и целесообразности диагностирования зарождающихся и развитых дефектов по разработанным методам и средствам [4, 5]:

3. В диапазоне 1570...1620 об/мин в валопроводе развиваются резонансные крутильные колебания первой формы от возмущающего момента первого порядка с частотой $N_1^T \approx 1580$ кол/мин практически совпадающей с расчетной $N_1^P \approx 1581$ кол/мин.

4. В диапазоне 1270...1320 об/мин зарегистрированы резонансные крутильные колебания второй (моторной) формы от возмущающего момента восьмого порядка с частотой $N_2^T \approx 10176$ кол/мин практически совпадающей с расчетной $N_2^P \approx 10172$ кол/мин.

Примерами использования разработанных методов и средств является диагностический контроль по крутильным колебаниям сложных систем и объектов:

1. промышленных тракторов, дизель-генераторов и судовых энергетических установок на базе дизелей семейства ЧН16,5/18,5 мощностью до 1400 кВт при $n = 1750$ об/мин;

2. турбоустановки Р-50/60-130-1 + ТВФ-60-2 + ВТ-450-3000 мощностью 60000 кВт при $n = 3000$ об/мин;

3. насосных станций с электроприводом СДВ2-215/41-10 + 800В-2.5/100-1 мощностью 3150 кВт при $n = 600$ об/мин;

4. питательных центробежных насосов ТЭЦ с асинхронным электроприводом 2АЗМ-5000/6000-У4 + зубчатая муфта + насос ПЭ580-185-2 мощностью 5000 кВт при $n \approx 2985$ об/мин;

5. погружных центробежных насосов для добычи нефти с асинхронным электроприводом ПЭД22-117 + протектор 1ГБ52 + насос ЭЦНМ5-30-1450 мощностью 22 кВт при $n \approx 2910$ об/мин;

6. газоперекачивающих агрегатов с электроприводом типа ЭГПА 235-23-3, ЭГПА2-12,5/76-1,5 (ЭГПА 285-22-1) мощностью 12500 кВт при $n = 3000$ об/мин.

В первом случае данная инновационная технология применялась для отстройки систем от опасных резонансов в рабочем диапазоне частот вращения на этапах проектирования, изготовления и эксплуатации энергомеханического оборудования.

В других случаях – для распознавания причин повышенной вибрации, аварий, определения мест расположения врожденных, зарождающихся и развитых дефектов на этапе эксплуатации энергомеханического оборудования.

Предложенные методы и средства диагностирования СЭУ по крутильным колебаниям валопровода также применены для повышения эффективности отстройки систем от опасных резонансов в рабочем диапазоне скоростей вращения на этапах проектирования, изготовления и эксплуатации СЭУ на базе дизелей семейства ЧН16,5/18,5 мощностью до 1400 кВт при $n = 1750$ об/мин. Например, при проектировании дизель-редукторных агрегатов ДРА-525-02/03 с валопроводом проекта 11980 выполнены расчеты крутильных колебаний СЭУ для всех возможных в эксплуатации вариантов и режимов работы установки согласно требованиям Правил классификации и постройки морских судов Российского морского регистра судоходства, в т.ч. [2, 6]:

- холостого хода ДРА-525-02/03;
- свободного хода с ДРА-525-02/03 (рис. 5);
- свободного хода с ДРА-525-02/03 с одним неработающим цилиндром привода;
- совместной работы компрессора (насоса) ДРА-525-02/03 и валопровода судна;
- работы компрессора (насоса) ДРА-525-02/03 при отключенном валопроводе судна;
- торможения гребного вала при реверсировании ДРА-525-02/03.

При этом применение параметров энергетических форм колебаний позволило создать надежные конструкции с минимальной трудоемкостью проектных работ. В частности, по результатам расчета собственных крутильных колебаний валопровода проекта 11980 по компьютерной программе (режим свободного хода с ДРА-525-03) (табл. 1) построены

энергетические формы крутильных колебаний валопровода (рис. 3, 6), примененные в целях повышения эффективности отстройки систем от опасных резонансов [6].

Результаты расчетного исследования и торсиографирования вынужденных крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-02/03 подтвердили, что максимальные суммарные амплитуды напряжений и моментов от крутильных колебаний в валопроводе системы при полигармоническом возбуждении от 0,5-го до 12-го порядка гармоник возбуждения включительно не превосходят допускаемые для длительной надежной эксплуатации установки в рабочем диапазоне скоростей вращения (600...1750 об/мин) коленчатого вала дизеля 8ЧН16,5/18,5.

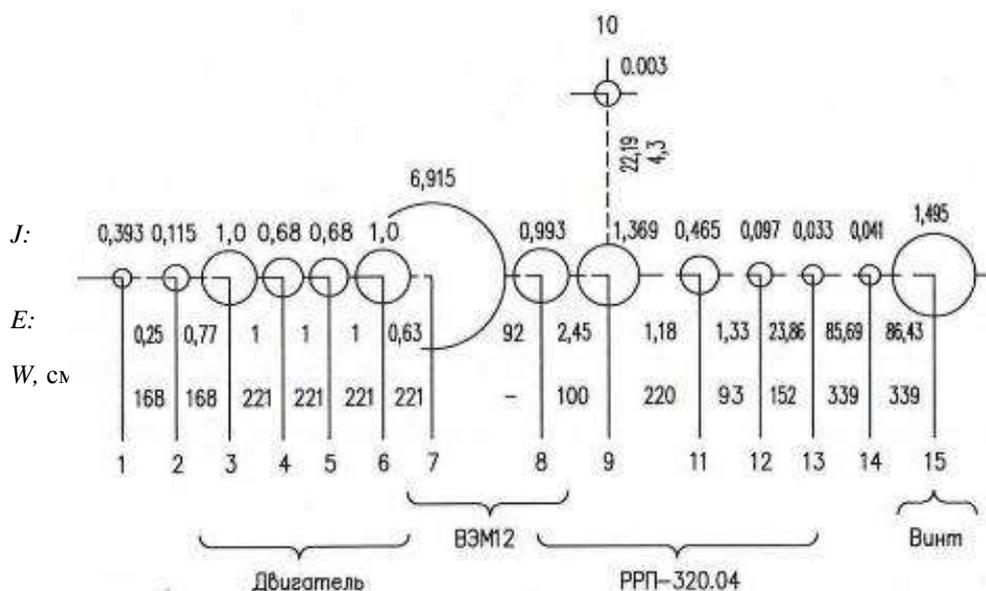


Рисунок 5 - Расчетная схема крутильных колебаний валопровода проекта 11980: режим свободного хода с ДРА-525-03; J и E – безразмерные моменты инерции сосредоточенных масс (деталей) и податливости при кручении участков валов (в относительных единицах), определяемые как частное от деления реальных динамических параметров и постоянных безразмерной системы $j_0 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ – момента инерции моторной массы и $e_0 = 2,174 \cdot 10^{-7} \text{ рад}/(\text{Н} \cdot \text{м})$ – податливости при кручении участка коленчатого вала; W – момент сопротивления кручению упругих участков (валов); ВЭМ12 – высокоэластичная муфта; РРП-320.04 – реверс-редукторная передача

Таблица 1 - Низшие собственные частоты крутильных колебаний и энергетический рейтинг элементов

Форма колебаний	Угловая скорость колебаний ω , рад/с	Частота f , Гц	Энергетический рейтинг элементов
1	103,2	16,4	$J_7=7,4\%$; $J_9=2,7\%$; $J_{15}=32\%$; $e_{7-8}=26,8\%$; $e_{13-14}=10\%$; $e_{14-15}=9,5\%$;
2	184,6	29,4	$J_8=11,4\%$; $J_9=16,2\%$; $J_{11}=5,4\%$; $J_{15}=12,5\%$; $e_{7-8}=22,5\%$; $e_{13-14}=11,9\%$; $e_{14-15}=12\%$;
3	914,9	145,6	$J_1=8,5\%$; $J_3=18\%$; $J_4=6,3\%$; $J_7=13\%$; $e_{3-4}=8\%$; $e_{4-5}=14\%$; $e_{5-6}=17\%$; $e_{6-7}=10\%$;
4	1466,7	233,4	$J_8=3,5\%$; $J_{13}=4,4\%$; $J_{14}=41\%$; e_{8-}

			$e_9=3,8\%$; $e_{12-13}=8,7\%$; $e_{13-14}=10\%$; $e_{14-15}=25,5\%$;
5	1669,6	265,7	$J_8=29\%$; $J_9=8\%$; $J_{11}=7\%$; $J_{14}=4,5\%$; $e_{8-9}=41,3\%$; $e_{9-11}=2,8\%$; $e_{13-14}=2,7\%$;
6	2385,6	379,7	$J_1=7\%$; $J_3=3\%$; $J_4=6,3\%$; $J_5=19\%$; $J_6=9,5\%$; $J_7=3,4\%$; $e_{2-3}=4,3\%$; $e_{3-4}=18,5\%$; $e_{4-5}=4\%$; $e_{5-6}=4\%$; $e_{6-7}=18,4\%$.

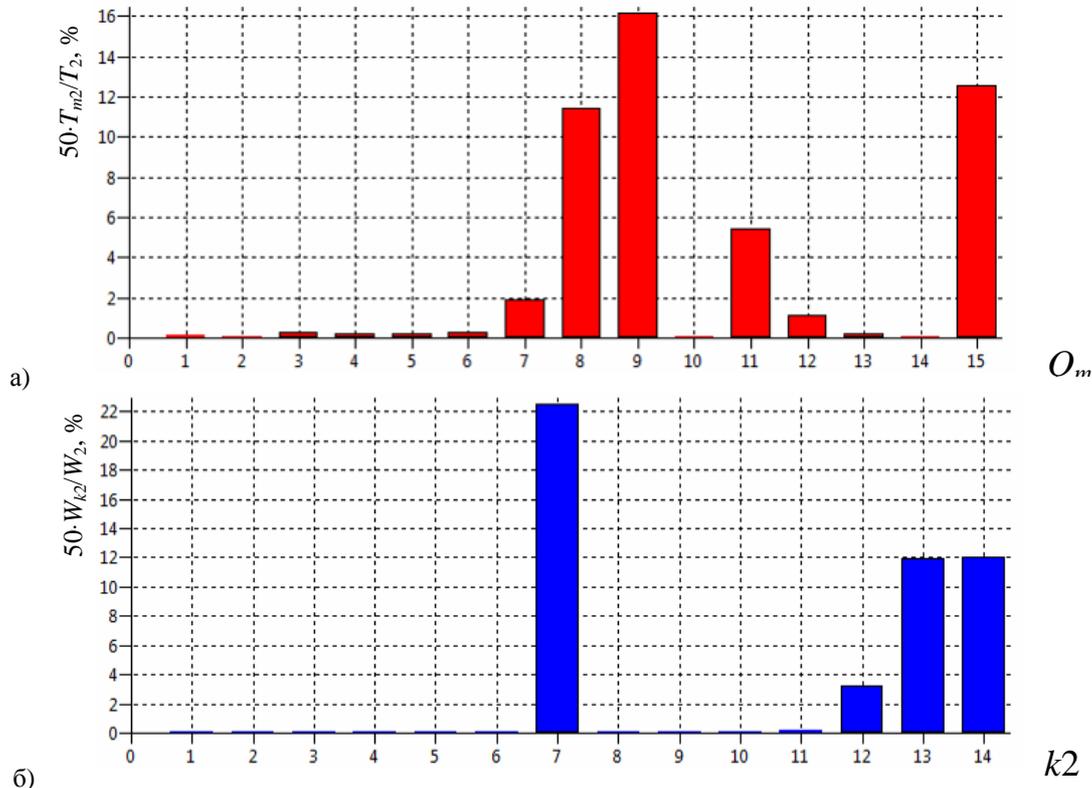


Рисунок 6 - Энергетические формы крутильных колебаний валопровода проекта 11980 с ДРА-525-03 на второй частоте собственных колебаний $f_2 = 29,4$ Гц (режим свободного хода): энергетическая форма инерционных элементов (а); энергетическая форма упругих элементов (б); Q_{m2} и k_2 – обобщенные координаты и номера упругих участков валопровода на 2-й форме собственных колебаний

Заключение

Разработанные методы и средства диагностирования СЭУ по крутильным колебаниям валопровода позволили повысить эффективность отстройки систем от опасных резонансов в рабочем диапазоне скоростей вращения, существенно облегчить прогнозирование зарождающихся дефектов по структуре изделия, сократить область поиска возможных повреждений узлов СЭУ, повысить надежность обнаружения дефектов.

Для повышения уровня надежности СЭУ путем диагностического контроля зарождающихся дефектов необходимы следующие мероприятия:

- разработка и штатное оснащение СЭУ встроенными средствами измерения и анализа крутильных колебаний валопровода (например, энкодерами различного принципа действия, в т.ч. оптическими, магнитными, магниторезисторными, электромагнитноакустическими и/или другими преобразователями) и аварийной защиты с применением предложенной инновационной технологии;

- целесообразно внести изменения в Российский морской регистр судоходства в части обязательного расчета параметров энергетических форм свободных крутильных колебаний валопровода СЭУ и их применения при торсиографировании/тензометрировании, а также при диагностировании технического состояния СЭУ в составе систем автоматического управления СЭУ.

Литература

1. Неразрушающий контроль: справ.: в 8 т. / под общ. ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 2003-2005.
2. Правила классификации и постройки морских судов. С.-П.: Российский морской регистр судоходства, 2012, т.2 – 686 с.
3. Ефремов Л.В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. – СПб.: Наука, 2007. – 276 с.

4. Решетов А.А. Неразрушающий контроль и техническая диагностика энергетических объектов: учеб. пособие / А.А. Решетов, А.К. Аракелян; под ред. проф. А.К. Аракеляна. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2010. 470 с.

5. Решетов А.А. Методы и средства повышения эффективности вибродиагностического контроля энергомеханического оборудования газотранспортных си-

стем // Контроль. Диагностика.– 2012. – №9. – С.32-41.

6. Программно-техническое средство повышения эффективности вибродиагностического контроля (ПТС ПЭВДК) энергомеханического оборудования / А.А. Решетов, Н.А. Захаров. - Чебоксары: Чувашское республиканское РО РОНКТД, 2013.

СЖИГАНИЕ УГЛЕВОДОРОДОВ В ВОДЕ НА ТЯГОВОЙ СТЕНКЕ

Тесленко В.С., Дрожжин А.П., Медведев Р.Н., Батраев И.С.

Институт гидродинамики им М.А. Лаврентьева СО РАН

Новосибирск
teslenko@hydro.nsc.ru

Аннотация

С помощью разрабатываемых методов сжигания газов на тяговой стенке рассматриваются возможности уменьшения потерь энергии в существующих сложных устройствах преобразования химической энергии в механическую энергию путем смены технологий сжигания топлив для водных движителей.

Введение. Как правило, в энергодвигательных установках для надводных и подводных средств передвижения используются поршневые двигатели или турбины, в которых с помощью разнообразных трансмиссий приводят во вращение гребные винты или водометы. Потери энергии на всех системах передачи механического импульса значительны. Перспективными для водных средств являются системы с непосредственной передачей механической энергии от продуктов сгорания в импульсы тяги. Системами с непосредственной передачей механической энергии от продуктов сгорания в импульсы тяги являются реактивные движители. Однако существующие реактивные движители на основе сжигания специальных топлив не приемлемы для широкого использования по экологической безопасности. В работе [1] был реализован метод сжигания горючих газов непосредственно в воде с отдельной подачей горючего газа и окислителя с помощью линейных щелевых форсунок для целей эффективного нагрева теплоносителя. Горючая смесь газа в воде образовывалась в динамическом режиме в виде квазицилиндрического пузыря из двух выдуваемых пузырей, горючего газа и кислорода. Осуществлены циклические режимы сжигания ацетилена, водорода, пропана с частотой до 2,5 Гц.

В данной работе рассматриваются возможности использования метода сжигания газов в воде для непосредственного преобразования химической энергии углеводородов в кинетическую энергию тела погруженного в жидкость, для создания пульсирующих движителей на основе сжигания углеводородов непосредственно в воде на тяговой стенке. В первую очередь рассматриваются природные горючие газы как перспективные топлива в рамках экологической безопасности.

Постановка экспериментов. Учитывая, что динамические режимы сжигания газов были успешно реализованы в [1], необходимы более детальные исследования гидродинамических процессов при горении газов вблизи жесткой стенки. С этой целью пузыри со стехиометрической смесью пропана с кислородом объемом 1-4 см³ выдувались в воду и фиксировались на границе между водой и

жесткой стенкой. Пузырь удерживался в горизонтальной плоскости в специальных пазах на металлической стенке длиной 30-70 мм или в кольцевых пазах диаметром 30-60 мм. Инициирование горючей смеси в пузырях осуществлялось искровым разрядом с энергией до 4 Дж. Проводилась скоростная киносъемка горения газа в пузырьках и динамика расширения пузырей после сжигания газовой смеси. Съёмка осуществлялась в двух проекциях: в фас и в профиль. Синхронно осуществлялись измерения импульсов силы $F(t)$ на горизонтальную стенку, удерживающую пузырь. Регистрация импульсов силы на стенку осуществлялась на цифровом осциллографе TDS-210 с помощью пьезоэлементов ЦТС ($d = 40$ мм, $h = 15$ мм) и эмиттерного повторителя с постоянной составляющей времени $\theta \approx 10$ сек.

Результаты. На Рис. 1, 2 представлены отдельные кадры киносъемки гидродинамических процессов при сжигании стехиометрической смеси пропана с кислородом в квазицилиндрическом пузырьке объемом 2 см³ и соответствующие динамические параметры силы и пузыря для первой пульсации.

На Рис. 3, представлены отдельные кадры теневой киносъемки гидродинамических процессов при сжигании стехиометрической смеси пропана с кислородом в кольцевом пузырьке $R = 40$ мм объемом 3 см³.

Для экспериментов, в представленной постановке, при прочих равных условиях, скорость горения носит «галолирующий» характер вдоль пузыря. От эксперимента к эксперименту для стехиометрической смеси пропана с кислородом разброс значений скорости фронта свечения находился в пределах 100-140 м/сек. В целом, этот разброс слабо влияет на динамику расширения и пульсаций пузырей. Важным параметром является начальный объем горючего газа. Так для начальных объемов газа 1-2 см³ образуется торообразный пузырь, который коллапсирует радиально по диаметру и симметрично к оси кольца, с образованием симметричных потоков жидкости вдоль оси. При начальных объемах газовой смеси более 2 см³ торообразный пузырь превращается в эллипсоид, «приплюснутый» в направлении к стенке.

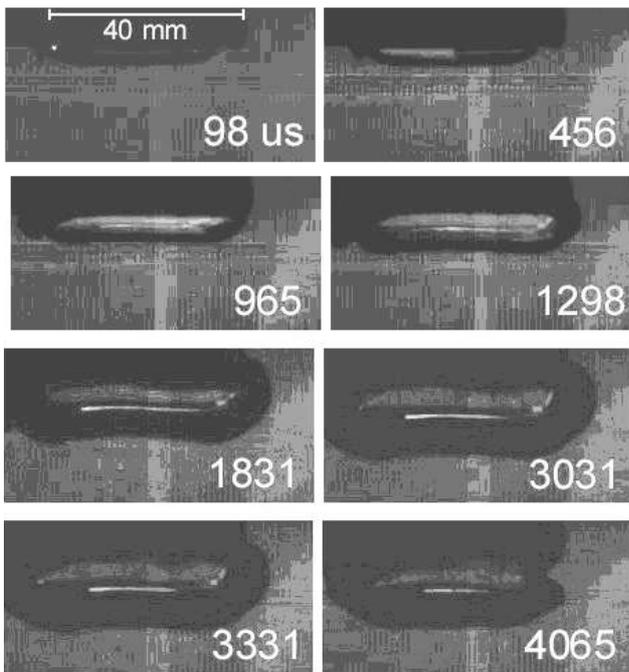


Рисунок 1 - Кадры скоростной съемки процесса горения в квазицилиндрическом пузырьке, и последующая динамика газового пузыря.

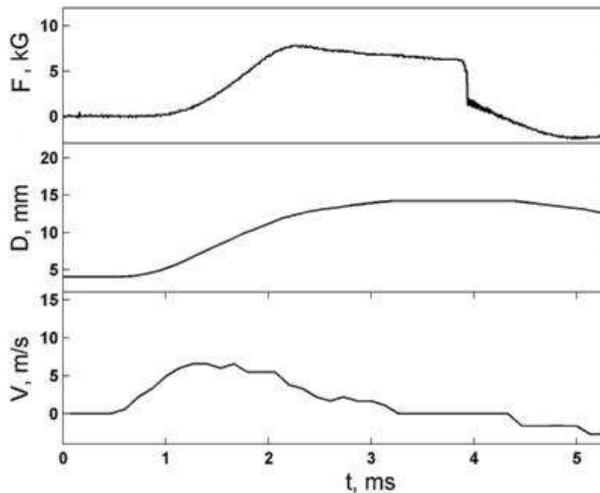


Рисунок 2 - Синхронные диаграммы импульса силы – $F(t)$, диаметра пузыря – $D(t)$, скорости границы пузыря – $V(t)$.

Такой пузырь коллапсирует радиально к оси кольца с формированием противоположных струйных потоков жидкости вдоль оси. На кинограммах, поток жидкости от стенки виден в виде струйного течения с образованием кольцевого вихря из мелких пузырьков. Струя, направленная в сторону стенки, косвенно отслеживается в виде растекания пленки пузырьков радиально вдоль жесткой стеки. Дополнительным показателем действия импульсов от расширения и захлопывания пузыря является процесс перемещения не закрепленного цилиндра (Рис. 3). При упоре рабочего цилиндра в динамометр в момент аксиального коллапса пузыря регистрируется второй импульс силы. На Рис. 4 представлена осциллограмма импульсов силы при сжигании 2 см^3 стехиометриче-

ской смеси пропана с кислородом. На данной осциллограмме отслеживаются два основных импульса. Первый импульс (F_1) соответствует процессу расширения пузыря после сгорания газа, а второй импульс (F_2) соответствует моменту коллапса образованного пузыря. Видно, что второй импульс соизмерим с первым, при этом: $P_1 = \int F_1 dt = 0,077 \text{ кГс}$, $P_2 = \int F_2 dt = 0,075 \text{ кГс}$,

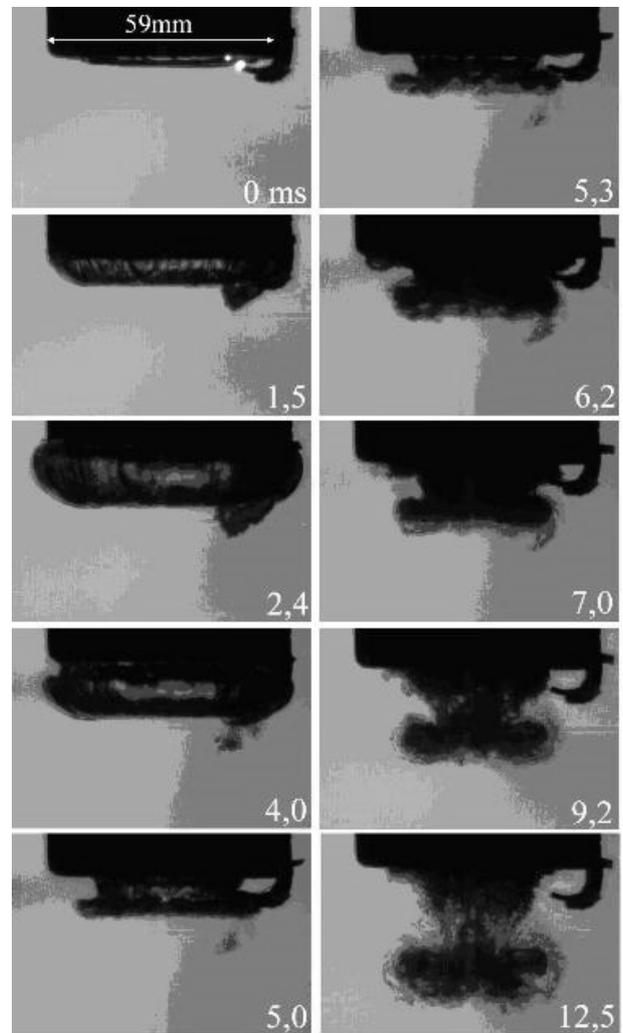


Рисунок 3 - Кадры теневой съемки гидродинамических процессов при сжигании газа в кольцевом пузырьке $R = 40 \text{ мм}$ на торце цилиндра $D = 59 \text{ мм}$.

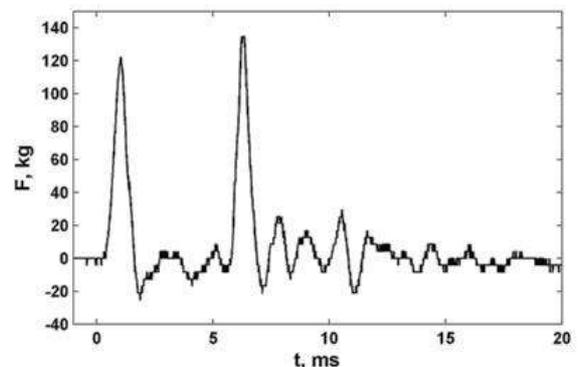


Рисунок 4 - Осциллограмма импульсов силы от расширяющегося и захлопывающегося пузыря.

После первого коллапса тора или эллипсоидального пузыря наблюдается дробление исходного пузыря с образованием вихря из более мелких пузырьков. Этот кольцевой вихрь из мелких пузырьков перемещаясь вдоль оси пульсирует. Пульсации эти отслеживаются на осциллограммах в виде слабых импульсов. Пульсации происходят за счет кооперативных процессов пульсаций мелких пузырьков в вихревых кластерах.

Краткий анализ результатов. Как для динамического смешения горючего газа с кислородом [1], так и для заранее приготовленной смеси в пузырях наблюдаются эффекты стохастичности процессов горения газов от эксперимента к эксперименту. Во всех экспериментах (ацетилен, водород, пропан) при динамическом смешении газов видимая скорость горения не превышала 400 м/сек. Таким образом, мы имеем дело с дефлаграционным механизмом горения газов в пузыре. Наблюдаемые стохастические процессы горения, по-видимому, связаны с неустойчивостью границы пузыря, которые отслеживаются на кинограммах, и как следствие, с различием концентраций паро-капельной составляющей воды в пузыре. Изучение роли паров воды на скорость горения газов являются актуальными задачами для разработки данных методов сжигания газов в жидкостях.

Наблюдаемая динамика течений в жидкости при расширении и пульсациях пузыря вблизи жесткой стенки качественно подобна процессам струйных течений описанных в монографии В.К.Кедринского [2] для случаев пульсаций пузыря от взрывов конденсированных взрывчатых веществ (ВВ) вблизи свободной поверхности жидкости. Важно отметить следующее отличие, при взрывах конденсированных ВВ и взрывов газов в воде: во втором случае отсутствуют процессы детонации источника взрыва. Следовательно, перераспределение энергии между кинетической энергией жидкости от расширения газового пузыря и энергией ударной волны будет происходить в пользу пузыря.

Выводы. Экспериментально показано, что сжигание газов в воде вблизи жесткой стенки позволяет выполнять преобразование химической энергии сжигаемой газовой смеси в поступательную составляющую на тяговой стенке за счет импульсов силы возникающих при расширении продуктов сгорания газа в воде и при захлопывании пузыря. При этом, за счет формирования аксиальных потоков жидкости при захлопывании пузыря вблизи стенки обеспечивается дополнительный вторичный импульс силы соизмеримый с первым. Этот эффект указывает на перспективную эффективность преобразования химической энергии газов в механическую энергию движения тела погруженного в жидкость.

С помощью рассмотренных методов сжигания газов на тяговой стенке можно исключить потери энергии в сложной цепочке существующих технологий преобразования химической энергии в механическую (ДВС, редуктор, винт) путем смены методов сжигания топлив для водных движителей, с непосредственным импульсным сжиганием газов в воде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-08-00838.

Литература

1. Тесленко В.С., Дрожжин А.П., Манжалец В.И., Медведев Р.Н., Ульяницкий В. Ю. Сжигание горючих газов в водном теплоносителе с отдельной подачей горючего и окислителя. // Современная Наука, Сборник научных статей №2(10), г.Киев, ISSN 2076-6866, «Триакон» - 2012 г., с. 64-67, http://www.swsl.newmail.ru/publ/teslenko_Alushta2012.pdf
2. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва эксперимент и модели // Из-во СО РАН, 2000 г., 434 стр.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАКАЗНЫЕ ДОКЛАДЫ

ГЕНИЙ АКАДЕМИКА А.Н. КРЫЛОВА: НАУЧНО-ИНЖЕНЕРНОЕ НАСЛЕДИЕ И ВКЛАД В ИСТОРИЮ СТРАНЫ

К 150-летию со дня рождения

Александров В.Л.

Герой России Президент Российского НТО судостроителей им. акад. А.Н. Крылова 9

А.Н. КРЫЛОВ, Н.Е. ЖУКОВСКИЙ, С.А. ЧАПЛЫГИН – ТРИ ТИТАНА, ЗАЛОЖИВШИЕ ФУНДАМЕНТ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ КОРАБЛЯ

Кишкина Н.Ю.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова 18

PROSPECTS OF APPLYING OF NON-TRADITIONAL PROPELLERS ON THE SHIPS OF VARIOUS TYPES

Leonid I. Vishnevsky¹, Anatolij-Branko R. Togunjac²

¹Krylov State Scientific Centre

²Research and Design Institute for Fishing Fleet, GIPRORYBFLOT 21

UNSTEADY THREE-DIMENSIONAL SOURCES IN DEEP WATER WITH AN ELASTIC COVER AND THEIR APPLICATIONS

Izolda V. Sturova

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences 25

ИСКУССТВЕННАЯ КАВИТАЦИЯ И ОПЫТ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ОТЕЧЕСТВЕННОМ СУДОСТРОЕНИИ

Пустошный А.В., Русецкий А.А.

Крыловский государственный научный центр 34

ЭНЕРГИЯ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ И СПОСОБЫ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Терентьев А.Г

Чебоксарский политехнический институт МГОУ 39

КАВИТАЦИЯ

STABILITY OF THE STABLE LINEAR MOTION OF HIGH-SPEED UNDERWATER VEHICLE WITH RING-TYPE TAIL WING

Grumondz V.T., Korzhov D.N., Makhrov V.P.

Moscow State Aviation University 45

CHARACTERISTICS OF HIGH SPEED GAS JET IN CONCURRENT WATER FLOW

Yury F. Zhuravlev, Valery M. Lapin, Anton N. Varyukhin

Central Aerohydrodynamic Institute 49

EFFICIENCY OF HIGH-SPEED UNDERWATER MOTION

Igor Nesteruk

Institute of Hydromechanics, NASU, Kyiv, Ukraine 55

PROPULSION PERFORMANCE OF AN AXISYMMETRIC BODY WITH IDEAL PROPULSOR IN VISCOUS FLUID

Alexander S. Achkinadze

Saint Petersburg State Marine Technical University 63

THE RESONANT MECHANISM OF GAS BUBBLE BREAK-UP IN FLUID

Vladimir Vanovsky, Alexander Petrov

Moscow Institute for Physics and Technology, Institute for Problems in Mechanics RAS 68

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Димитрисева Н.А.¹, Павлова Н.А.²

¹Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

²Чебоксарский политехнический институт «МГОУ им. В.С. Черномырдина» 72

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ Житников В.П., Зиннатуллина О.Р Уфимский государственный авиационный технический университет.....	78
EXAMPLES OF FREE-BOUNDARY FLOWS Karabut E.A., Zhuravleva E.N. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk State University	86
SOME EXPERIMENTAL RESULTS INVESTIGATIONS of CAVITY FLOW FORMED by OUTSIDE HYDRODYNAMIC SINGULARITIES Vladislav P. Makhrov Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI	91
SOME ASPECTS OF SUITABILITY OF THE PACKAGE OF THE ENGINEERING ASSAYING STARCCM + FOR DEFINITION OF THE CHARACTERISTICS OF THE VAPOR BUBBLE COLLAPSE Nikolay Ovchinnikov, Sergey Chalov Krylov State Research Centre (KSRC)	95
ASYMPTOTIC SOLUTIONS AND DEPENDENCES FOR ENGINEERING CALCULATION OF CAVITATION FLOWS BEHIND SLENDER AXISYMMETRIC BODIES Vladimir V Serebryakov Institute of Hydromechanics, National Academy of Sciences of Ukraine.....	99

ВХОД. ГЛИССИРОВАНИЕ

DITCHING HYDRODYNAMICS OF LAND-BASED AIRPLANES Shorygin O.P., Gontzova L.G., Belyaevsky A.N., Arilin A.V. Central Aerohydrodynamic institute named after prof. N.Ye. Zhukowsky (TsAGI)	103
SOME ASPECTS OF SUBMERSION OF THE CYLINDRICAL SOLID OF REVOLUTION WITH CURVED NOSE AT SMALL ATTACK AND TRIM ANGLES Bragin S.L., Grumondz V.T. Moscow Aviation Institute (State University).....	108
О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ Маклаков Д.В.¹, Петров А.Г.² ¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет ² Институт проблем механики РАН.....	111
О НАТЕКАНИИ СТРУИ НА ПОЛИГОНАЛЬНУЮ СТЕНКУ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ Маклаков Д.В., Сулейманов С.З. Казанский (Приволжский) федеральный университет.....	121
IMMERSED INCLINED PLATE INTERACTION WITH INCOMING WATER WAVES Ocheretyanny S.A., Prokofiev V.V., Takmazian A.K., Filatov E.V. Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State university	131
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЛИССИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРА В КАВЕРНЕ Парышев Э.В. Филиал ФГУП ЦАГИ “Московский комплекс ЦАГИ”	136
PREDICTION OF MANEUVERING OF SUPERCAVITATING VEHICLE Volodymyr N. Semenenko National Academie of Sciences of Ukraine, Institute of Hydromechanics.....	143

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ КАЧЕСТВ ПОВРЕЖДЕННОГО КОРАБЛЯ В УСЛОВИЯХ МОРСКОГО ВОЛНЕНИЯ Шауб П.А. ¹ НИИ кораблестроения и вооружения ВМФ, ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия»	153
--	-----

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХОДА ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ С КОНТУРА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ	
Горелов Д.Н., Говорова А.И.	
Омский филиал института математики СО РАН	158
HEAT TRANSFER OF THE CIRCULAR CYLINDER IN THE VISCOUS BUBBLE FLOW	
Damir A. Gubajdullin¹, Irina V. Morenko¹, Vladimir L. Fedyaev^{1,2}	
¹ Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences (IME KazSC RAS)	
² Kazan National Research Technical University (KSTU)	162
ПОСТРОЕНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ	
Житников В.П.¹, Муксимова Р.Р.²	
¹ Уфимский государственный авиационный технический университет	
² Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации	167
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК	
Казакова А.О.	
Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова	177
CONFORMAL MAPPINGS, PADE APPROXIMANTS AND EXAMPLE OF FLOW WITH SIGNIFICANT DEFORMATION OF FREE BOUNDARY	
Karabut E.A., Kuzhuget A.A.	
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk State University	182
ВЛИЯНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ПОВЕДЕНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ПОТОКЕ	
Махров В.П.¹, Глущенко А.А.², Юрьев А.И.²	
¹ Moscow Aviation Institute (National Research University) – MAI	
² ООО "Компания "ЭЛТА"	189
NONISOTHERMAL VISCOUS FLOW WITH PARTICLES PAST OF THE ROTATING CIRCULAR CYLINDER	
Irina V. Morenko¹, Vladimir L. Fedyaev^{1,2}	
¹ Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences (IME KazSC RAS)	
² Kazan National Research Technical University (KSTU)	193
ДВУХСЛОЙНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ	
Снигерев Б.А.	
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН	198
ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА	
Стакун А.А.	
Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова	202
ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	
Шерыхалина Н.М., Поречный С.С.	
Уфимский государственный авиационный технический университет.....	212
ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОСНОВАНИЙ ОТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ГРУНТА	
Пилягин А.В.	
Чебоксарский политехнический институт (филиал) МГОУ	216
ПРОГРАММНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ДВС С ИСКРОВОМ ЗАЖИГАНИЕМ, РАБОТАЮЩЕГО НА БИНАРНОМ ТОПЛИВЕ	
Жолобов Л.А., Ушаков М.Ю., Фролов С.А.	
Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия	219
ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРЫЛОВЫХ ГИДРОДВИГАТЕЛЕЙ	
Терентьев А.А.	
ООО «Энергоинновации», Чебоксарский политехнический институт МГОУ	224

MODELLING AND CALCULATION OF COOLING OF WATER IN COOLING TOWERS WITH THE FILM-DROP OF IRRIGATOR

Vladimir L. Fedyaev, Evgeny M. Vlasov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences..... 227

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО НАПЫЛЕНИЯ В СУДОСТРОЕНИИ

Архинов В.Е., Лондарский А.Ф., Москвитин Г.В., Пугачёв М.С.

ИМАШ РАН..... 233

STUDY OF TWO AUTO-OSCILLATORY REGIMES OCCURING WHEN A ZONE WITH PRESSURE HIGHER THAN EXTERNAL IS CREATED BY MEANS OF JET VEIL

Ivan I. Kozlov, Sergey A. Ocheretyany, Vladislav V. Prokof'ev

Institute of mechanics of the Moscow State University..... 237

HYDRODYNAMIC INSTABILITIES IN INTERACTION OF LASER RADIATION WITH A MAGNETIZED TARGET

Victor V. Kuzenov^{1,2}, Ivan V. Romadanov¹, Sergei V. Ryzhkov¹

¹Bauman Moscow State Technical University

²A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS 243

ПРИМЕНЕНИЕ СТАЛЕФИБРОБЕТОНОВ ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ СУДОВ И ПОДВОДНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Ростислав О. Красновский

ЗАО "Институт "Оргэнергострой" 249

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Лоскутов Ю.В.

Поволжский государственный технологический университет..... 253

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЯ ОБЩЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ГРУНТА ПО ДАННЫМ ПРЕССИОМЕТРИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Пилягин А.В.

Чебоксарский политехнический институт (филиал) МГОУ 259

HEAT TRANSFER ENHANCEMENT IN HEAT EXCHANGERS BY SPHERICAL DIMPLES

Sergey I. Kaskov¹, Igor A. Popov², Alexey V. Schelchikov²

¹Bauman Moscow State Technical University

²Kazan State Technical University named for A.N. Tupolev 262

INFLUENCE OF APPLICATION OF ETHANOL ON INDICATORS PROCESS OF COMBUSTION AND THE CONTENT OF NITROGENOXIDES IN EXHOUST GASES IN DIESEL 2Ч 10,5/12,0 DURING THE WORK WITH DOUBLE SYSTEM OF FUEL FEEDING

Vitaliy A. Lihanov, Sergey A. Verstakov, Anton A. Anfilatov

Vyatka state agriculture academy..... 267

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИЗЕЛЯ 2Ч 10,5/12,0 ПРИ РАБОТЕ НА ЭТАНОЛЕ И РАПСОВОМ МАСЛЕ С ДВОЙНОЙ СИСТЕМОЙ ТОПЛИВОПОДАЧИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УСТАНОВОЧНЫХ УГЛОВ ОПЕРЕЖЕНИЯ ВПРЫСКИВАНИЯ ТОПЛИВ

Лиханов В.А., Девятьяров Р.Р., Арасланов М.И., Козлов А.Н.

Вятская Государственная Сельскохозяйственная Академия..... 270

INFLUENCE OF APPLICATION OF ETHANOL ON INDICATORS PROCESS OF COMBUSTION AND SOOTCONTAINING OF THE DIESEL 2Ч 10,5/12,0 DURING THE WORK WITH DOUBLE SYSTEM OF FUEL FEEDING

Vitaliy A. Lihanov, Mihail A. Dolgih, Alexsander S. Polevchikov

Vyatka state agroculture academy..... 273

ПРОЦЕССЫ ОБРАЗОВАНИЯ И ОКИСЛЕНИЯ САЖЕВЫХ ЧАСТИЦ В ЦИЛИНДРЕ ДИЗЕЛЯ С ТУРБОАДДУВОМ РАЗМЕРНОСТИ 4ЧН 11,0/12,5 ПРИ РАБОТЕ НА ПРИРОДНОМ ГАЗЕ

Лиханов В.А., Россохин А.В.

Вятская государственная сельскохозяйственная академия 276

**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК**

Решетов А.А.¹, Григорьев В.С.²

¹ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород»

²Чувашский филиал ОАО «СОГАЗ» 278

**МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ СУДОВЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ
УСТАНОВОК ПО КРУТИЛЬНЫМ КОЛЕБАНИЯМ ВАЛОПРОВОДА**

Решетов А.А.¹, Захаров Н.А.²

¹ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород»

²Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова» 287

СЖИГАНИЕ УГЛЕВОДОРОДОВ В ВОДЕ НА ТЯГОВОЙ СТЕНКЕ

Тесленко В.С., Дрожжин А.П., Медведев Р.Н., Батраев И.С.

Институт гидродинамики им М.А. Лаврентьева СО РАН 296

ГИДРОДИНАМИКА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ И КОРАБЛЕСТРОЕНИЕ

Сборник трудов Международной научной конференции
«Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение»,
посвященной 150-летию со дня рождения академика А.Н. Крылова.

Компьютерный набор В.Л. Семенов
Подготовка к печати В.В. Чегулов
Компьютерная верстка И.О. Сорокина
Оформление: К.В. Шуюпов

Изготовлено в Редакционно-издательском отделе ЧПИ МГОУ
428022, г. Чебоксары, ул. П. Лумумбы, 8
Тел.: (8352) 63-60-85

Подписано в печать 01.10.13. Формат 60x84/16
Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная. Печать оперативная
Усл. печ. л. 25,43. Тираж 500 экз. Заказ № **397**

Отпечатано в типографии ИП Сорокина А.В. «Новое Время»
428034, г. Чебоксары, ул. Мичмана Павлова, 50/1
Тел.: (8352) 41-27-98, 46-43-46