

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Чебоксарский политехнический институт (филиал)



ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ

Сборник трудов научно-практической конференции

К 75-летию

Алексея Григорьевича ТЕРЕНТЬЕВА

Редакционно-издательский отдел ЧПИ МГОУ

ЧЕБОКСАРЫ 2011

УДК 532
ББК 22.253
И 32

Редакционная коллегия:

Докт. техн. наук, профессор А.П.Акимов (отв. редактор),
Канд. техн. наук, доцент В.В. Чегулов (зам. отв. редактора),
Докт. техн. наук, профессор И.Е. Илларионов,
Докт. физ.-мат. наук, профессор Г.М. Филиппов,
Канд. физ.-мат. наук, доцент Н.А. Димитриева.

Избранные проблемы гидродинамики больших скоростей:

И 32 Сб. тр. науч.-практич. конф. / ЧПИ МГОУ.– Чебоксары: Изд-во ЧПИ МГОУ, 2011. – 179 с. : ил.
ISBN 978-5-4246-0080-7

Научный сборник посвящается семидесятипятилетию выдающегося ученого, Заслуженного деятеля наук Российской Федерации и Чувашской Республики, Почетного доктора Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, доктора физико-математического наук, профессора Терентьева Алексея Григорьевича. В него вошли материалы, доложенные на научно-практической конференции «Избранные проблемы гидродинамики больших скоростей» 20 января 2011 г.

Доклады посвящены аналитическим и численным методам в гидродинамике больших скоростей, а также в теории дифференциальных уравнений и некоторых смежных вопросах механики сплошных сред.

Один из докладов посвящается всемирно известному ученому, долгое время возглавлявшему Академию наук СССР, академику Келдышу Мстиславу Всеволодовичу в связи с его столетним юбилеем. Его работы оказали огромное влияние на развитие науки и техники и, в частности, на гидродинамику, многие результаты используются в научных исследованиях А.Г. Терентьевым.

Научные исследования и многолетние дружеские отношения связывают двух талантливых ученых: профессора А.Г. Терентьева и профессора М.П. Тулина (США), которому исполняется в этом году 85 лет. Редколлегия сочла необходимым включить в данный сборник краткие сведения о М.П. Тулине в связи с его восьмидесятипятилетием.

Сборник может быть полезным специалистам, занимающимся численно-аналитическими методами и их приложениями, а также аспирантам и студентам старших курсов.

УДК 532
ББК 22.253

ISBN 978-5-4246-0080-7

© Чебоксарский политехнический институт (филиал) МГОУ, 2011
© Оформление. ИП Сорокин А.В. Издательство «Новое время», 2011



Игорь

К ЮБИЛЕЮ АЛЕКСЕЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ТЕРЕНТЬЕВА

Аквильянова И.Н., Дмитриева Н.А.

Чебоксарский политехнический институт

Московского государственного открытого университета,

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

В эти дни друзья, коллеги и ученики отмечают 75-летний юбилей и 50-летие научно-педагогической деятельности доктора физико-математических наук, профессора, Заслуженного деятеля науки Российской Федерации и Чувашской Республики, члена Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, члена Международного общества по граничным элементам, члена Американского математического общества Алексея Григорьевича Терентьева.

Алексей Григорьевич Терентьев родился 17 января 1936 года в селе Преображеновка Стерлитамакского района Башкортостана. После окончания школы в 1954 году поступил учиться на физико-математический факультет Казанского государственного университета. В 1957 году его направили в ГДР, где он продолжил обучение в Берлинском университете. Здесь под руководством ректора университета, ученика Л. Прандтля, профессора Курта Шрёдера студент А.Терентьев проводит свои первые исследования в области гидродинамики кольцевых крыльев.

После окончания университета в 1960 году А.Г.Терентьев поступил на работу в отдел гидродинамики НИИ Математики и Механики им. Н.Г.Чеботарева при Казанском университете, где занимался вопросами струйных и кавитационных течений и уже в 1965 году защитил кандидатскую диссертацию.

В начале 1968 года по приглашению А.Г. Терентьев переезжает в Чебоксары на работу в открывшийся Чувашский государственный университет. С университетом связаны многие годы его трудовой деятельности в качестве и.о. заведующего кафедрой теоретической механики, декана физико-математического факультета, заведующего кафедрой прикладной математики, председателя местного университета, проректора по научной работе.

В 1972 году Алексей Григорьевич защитил докторскую диссертацию «Плоские стационарные задачи струйных и кавитационных течений», это была первая докторская диссертация по физико-математическому направлению, выполненная в Чувашском государственном университете.

Осенью 1969 года в Чувашском госуниверситете была открыта аспирантура и Алексей Григорьевич начал руководить работой молодых учёных. Разносторонность научных интересов, колоссальная работоспособность, высокая требовательность к себе и аспирантам позволили поднять научную работу на физико-математическом факультете на очень высокий уровень. Алексей Григорьевич подготовил 19 кандидатов и двух докторов наук. Приобщение молодежи к научным исследованиям происходило под его руководством и на заседаниях научного семинара «Взаимодействие сплошных сред», и в результате привлечения аспирантов к выполнению хоздоговорной научной работы с круп-

ными научными организациями страны. Оригинальные работы аспирантов и сотрудников как университета, так и других научных организаций, регулярно публиковались в редактируемом профессором А.Г. Терентьевым межвузовском сборнике научных трудов, издававшемся в Чувашском госуниверситете с 1970 по 1996 годы, и имевшем большую популярность среди учёных - гидродинамиков. Большой авторитет Алексея Григорьевича позволил организовать и провести в Чебоксарах, с 1980 по 2008 годы десять Летних научных школ «Гидродинамика больших скоростей», собиравших значительное число маститых и молодых учёных. Участниками летних школ в разные годы были академики АН СССР Л. И. Седов, В. Н. Челомей, И.О. Образцов, академик АН Украины Г.В. Логвинович, известные иностранные учёные М. Тулин (США), В. Спарк (Германия), Ю. Тсуджимото (Япония) и другие. На этих научных конференциях царил доброжелательная творческая атмосфера. Подтверждением тому служат поэтические строки, написанные профессором В.Н. Буйволом, сотрудником Института гидродинамики АН Украины, в 1986 году, одним из участников третьей Летней школы, которые он посвятил Алексею Григорьевичу:

Хоть этот доклад не пленарный,
Но всё же Терентьев, как бог,
Обрушил нестационарный
На «школьников» наших поток.
 Ему проявляют покорность
 Де фи по де те и де икс.
 Ему помогает конформность
 И стены родные свои.
И как просветляются лица,
Когда, как в стакане с вином,
Свободная дышит граница
Над жёстким и сумрачным дном.
 Терентьев не может иначе
 И в сонме бегущих кривых
 Мелькают на слайдах задачи –
 И мир уж не мыслим без них.
Сплошная среда будет вечно,
Но только скажите: ужель,
Он поезд зажмет бесконечный
В полубесконечный туннель?
*(последняя фраза здесь относится к задаче,
о которой докладывал Алексей Григорьевич).*

Большую роль в формировании научных кадров сыграла работа в Чувашском госуниверситете с 1991 по 2000 год специализированного совета по защите кандидатских диссертаций по научным специальностям 01.02.05 Механика жидкости, газа и плазмы и 01.02.06 Механика деформируемого твердого тела, председателем которого являлся А.Г. Терентьев.

С 2000 года профессор А.Г. Терентьев свои знания и опыт передает студентам и аспирантам Чебоксарского политехнического института Московского государственного открытого университета.

Основные научные результаты А.Г. Терентьева относятся к теории струйных, кавитационных и нестационарных движений идеальной жидкости.

А.Г. Терентьев систематически исследовал несимметричное кавитационное отекание тел и разработал математически обоснованную теорию кавитационных течений. Схема, при помощи которой моделируется кавитационное течение при его теоретическом исследовании, предложенная ранее американским учёным Маршаллом Тулиным и математически обоснованная Алексеем Григорьевичем, получила в научной литературе название «Схема Тулина – Терентьева». В рамках этой модели подробно было исследовано обтекание различных тел с частичной и развитой кавитацией. Подробно изучено также в рамках нелинейной теории обтекание гибкой нерастяжимой оболочки с одной и двумя закреплёнными точками.

Большой цикл работ выполнен А.Г. Терентьевым по решению нестационарных задач нелинейной гидродинамики. Им был предложен метод, основанный на последовательном определении комплексной скорости и производной по времени от комплексного потенциала, позволивший рассмотреть широкий класс таких задач: об аэродинамическом взаимодействии встречных высокоскоростных поездов, о нестационарном и импульсивном движении тонкого профиля, о пересечении телом границ раздела жидкостей, о входе тел в туннель и т.д. Эти работы существенно дополняют результаты исследований таких известных ученых, как Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин, Л.И. Седов и других. Разработаны численные алгоритмы расчётов, основанные на методах крупных частиц, исследовано начальное проникание пластины и диска в воду с учётом сжимаемости среды; рассмотрено погружение с заданной скоростью и по инерции. Методами конечных и граничных элементов исследована деформация газовых пузырей и движение тел вблизи свободной поверхности весомой жидкости, а также кавитационное обтекание плоских и осесимметричных тел. Разработан алгоритм численного расчёта движения тел в предельно вязкой среде.

На основе взаимосвязи с нелинейной теорией исследованы особенности решения линейных задач. В случае нестационарного движения тонких тел предложено отыскивать производную по времени от комплексного потенциала и дан простой метод построения интегрального уравнения. В рамках развитой им линейной теории был исследован ряд новых задач гидродинамики: безотрывное и кавитационное обтекание тонких профилей, нестационарное движение тел, пересечение ими границ раздела, проникание в жидкость, влияние весомости жидкости и её неоднородности на движущееся тело.

А.Г. Терентьевым рассмотрены также новые математические модели сплошной среды в задачах определения выемки выброса при импульсном воздействии давления на среду, ряд задач фильтрации, связанные с подпочвенным поливом.

Исследуя проблемы гидродинамики, А.Г. Терентьев получил ряд важных результатов, представляющих самостоятельное значение и в математике. В ча-

стности, найденное им решение смешанной краевой задачи для двоякопериодической функции с кратными полюсами обобщает известные формулы Келдыша – Седова. Его обобщение интегрального тождества Грина на сингулярные функции позволило расширить возможности численного метода граничных элементов. Именно на основе этих формул ему удалось разработать прямой итерационный метод, позволивший рассчитать широкий круг сложнейших задач в гидродинамике со свободными поверхностями.

Отличительной чертой научных работ А.Г. Терентьева является их завершенность. Во всех исследованиях он не ограничивается изложением метода и общего аналитического решения, но и приводит результаты многочисленных расчетов, что представляет большой интерес для специалистов–практиков. Научные исследования Алексея Григорьевича неоднократно поддерживались грантами РФФИ, в настоящее время им успешно разрабатывается проект, финансируемый Фондом содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, СТАРТ 10.

Научные результаты Алексея Григорьевича отражены в более чем 150 научных статьях, учебных пособиях, трёх патентах на изобретения. В настоящее время он завершает работу над монографией, в которую войдут его многолетние исследования.

Алексей Григорьевич неоднократно представлял свои результаты на различных форумах, в том числе на международных конгрессах и конференциях в Болгарии, Германии, США, Франции, Японии, Англии, Италии, Дании.

За научные успехи А.Г.Терентьев неоднократно награждался Почетными грамотами Правительства Чувашии и различных научных организаций, в том числе премией Министерства высшего и среднего специального образования СССР. Признанием больших заслуг Алексея Григорьевича перед научным сообществом стало присвоение ему в минувшем году звания Почётного доктора Санкт-Петербургского государственного морского технического университета, ведущего вуза России.

Свой 75-летний юбилей А.Г. Терентьев встречает в расцвете творческих сил. Друзья, коллеги и ученики Алексея Григорьевича желают ему здоровья, счастья и успехов в реализации его творческих планов.

СПИСОК ТРУДОВ А.Г. ТЕРЕНТЬЕВА

1962

К теории кольцевого крыла. *Сб. аспирантских работ*, Казань, КГУ, 203-215. Работа написана по материалам дипломной работы в Берлинском университете им. Гумбольдта "Zu Theorie des drehsymmetrischen Ringflugels", 1960, 64s.

1963

Задача о струйном обтекании двух пластин под свободной поверхностью. *Сб. Итог. научн. конф. за 1962*, Казань, КГУ, 179-181.

1964

Кавитационное обтекание плоской пластинки. *Известия ВУЗ, Математика, № 6 (43)*, 159-167.

Струйное обтекание системы двух препятствий. *Труды Семина. по обратным краевым задачам*. Казань, КГУ, 1964, вып. 1, 110-123.

Задача о косом обтекании криволинейной дуги с развитой кавитацией. *Труды Семина. по обратным краевым задачам*. Казань, КГУ, вып. 2, 187-200.

К теории обтекания криволинейной дуги по семе с «зеркалом». Итог. Науч. Конф. КГУ за 1963г. (кратк. содер. док.), 120-122.

Задача о кавитационном обтекании наклонной пластинки. Итог. Науч. Конф. КГУ за 1963г. (кратк. содер. док.), 122-124.

1965

Обтекание наклонной пластинки в канале по схеме с параллельными стенками. *Известия ВУЗ, Математика, № 3 (46)*, 155-268.

Некоторые задачи кавитационного обтекания препятствий. *Канд. диссертация*, Казань, КГУ.

1967

К теории кавитационного обтекания препятствий. *Сб. «Современные вопросы гидродинамики»*. Киев, «Наук. Думка», 303-312.

Обтекание решетки пластин с развитой кавитацией. *Известия АН СССР, МЖГ*, 2, 52-58.

Кавитационное обтекание ребристой стенки *Сб. «Судовые движители, кавитация и управляемость судов»*. НТО СП «Судостроение», вып. 90, 146-150.

Об одной схеме обтекания пластинки с частичной кавитацией (соавтор Кузнецов А.В.). *Изв. высш. учебн. завед. Математика, №11 (66)*, 43-46.

1968

Нелинейная задача о кавитационном обтекании пластины потоком весомой жидкости (соавтор Котляр Л.М.). *Сб. «Судовые движители и кавитация»*. НТО СП "Судостроение", вып. 106, 103-107.

Кавитационное обтекание пластины под свободной поверхностью (соавтор Лазарев В.А.). *Сб. «Судовые движители и кавитация»*. НТО СП "Судостроение", вып. 106, 124-128.

О влиянии циркуляции на гидродинамические характеристики кавитирующей пластинки. *Тр. Семинара по краевым задачам*, Казанск. ун-т, вып. 5, 212-216.

Об одном случае струйного обтекания пластинки идеальным газом в присутствии прямолинейной стенки. *Тр. Семинара по краевым задачам*, Казанск. ун-т, вып. 5, 217-220.

Нелинейная задача о кавитационном обтекании пластины в поле сил тяжести (соавтор Котляр Л.М.) - доклад. *III Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике*, анн. 174.

1969

Кавитационное обтекание пластины ограниченным потоком (соавтор Лазарев В.А.). Сб. «Физ.-техн. проблемы». Чебоксары, ЧГУ, 89-101.

Кавитационное обтекание пластины в присутствии точечного вихря. Сб. «Физ.-техн. Проблемы». Чебоксары, ЧГУ, 102-105.

К нелинейной теории обтекания профиля с частичной кавитацией. Сб. «Гидродинамика быстророходных судов». НТО СП «Судостроение», вып. 124, 134-140.

1970

Обтекание пластины с частичной кавитацией. *Известия ВУЗ, Математика*, № 6 (97), 112-118.

Кавитационное обтекание криволинейной дуги с закрылком. *Тр. Семинара по краев. задачам*. Казань, КГУ, 1970, вып.7, 249-255.

Обтекание пластины с частичной кавитацией потоком тяжелой жидкости (соавтор Котляр Л.М.). *Тр. Семинара по краев. задачам*. Казань, вып.7, 178-182.

Об обтекании пластины с развитой кавитацией (соавтор Гусев В.А.). Сб. «Вопросы гидродинамики и низкотемп. плазмы», Чебоксары, ЧГУ, 3-10.

Обтекание решетки пластин с частичной кавитацией (соавтор Вишневский В.А.). Сб. «Вопросы гидродинамики и низкотемп. Плазмы», Чебоксары, ЧГУ, 11-20.

1971

К решению смешанной краевой задачи. *Доклады АН СССР*, т.196, №1, 57-60. (Перев. англ. «On th solution of mixed boundary problem», *Americ. Math. Society*, pp 61-65..

К линейной теории кавитационного обтекания препятствий. Сб. «Вопросы прикл. мат-ки и механики». Чебоксары, ЧГУ, вып. 1, 3-35.

Оптимизация процесса ускорения проводников в магнитном поле (соавтор Бондалетов В.Н.). Сб. «Исследование новых электрофиз. и электротермич. Установок», Чебоксары, ЧГУ, 5-16.

1972

К решению линейной задачи кавитационного обтекания криволинейной дуги. *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1, 34-38.

Струйное обтекание тонкого профиля ограниченным потоком. *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 2, 137-139.

Влияние границ потока на гидродинамические характеристики профиля (соавтор Галанин А.В.) – доклад. *Краткие тезисы НТО СП «Судостроение»*, вып.177, 37-38.

Метод малых возмущений в теории струй. Сб. «Вопросы прикл. мат-ки и механки». Чебоксары, Чуваш. ун-т, вып.2, 90-102.

Плоские стационарные задачи теории струйных и кавитационных течений. *Диссертация на соискание доктора физико-математических наук по специальности 01.024 – гидроаэромеханика и газовая динамика*.

1973

Теоретическое исследование нелинейных задач течения жидкости со свободными границами (соавторы: Кузнецов А.В., Киселев О.М., Котляр Л.М.). Сб. «Неустановившиеся течения воды с большими скоростями». *Труды Междунар. Симп. в Ленинграде, 1971*. «Наука», М., 253-266.

Влияние границ потока на геометрические размеры каверны - доклад. *Краткие тезисы докладов НТО СП «Судостроение»*, вып. 3,

1974

Влияние сил тяжести в задачах кавитационного обтекания препятствий (соавторы: Вишневецкий В.А., Котляр Л.М.). Сб. «*Вопросы прикл. мат. и мех.*», Чебоксары, ЧГУ, 1974, вып. 3, 9-24.

Влияние границ потока на гидродинамические характеристики тонкого профиля (соавтор Галанин А.В.). Сб. «*Вопросы прикл. мат. и мех.*». Чебоксары, ЧГУ, 1974, вып. 3, Краевые задачи линейной теории струй. *Труды симпозиума по мех. сплошн. среды и родственным проблемам анализа*. Тбилиси, 1974, вып. 2, 253-268.

1975

Влияние точечного вихря в потоке на гидродинамические характеристики кавитирующего профиля. Сб. *Вопросы прикл. мат-ки и мех-ки*. Чебоксары, ЧГУ. 1975, вып. 4, 84-101.
Нелинейная теория кавитационного обтекания препятствий (содокл. Васильев В.Н. и Кузнецов Ю.В.). *Тезисы докладов на 25 Всесоюзн. научно-техн. конф. по теории корабля*. Л., "Судостроение".

1976

К нелинейной теории кавитационного обтекания препятствий. *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1, 158-164.

Об основной проблеме в нелинейной теории кавитационных течений – доклад. *IV Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механике (анн. докл.)*, Киев, изд. «Наукова думка», с.75.

1977

Нелинейная теория кавитационного обтекания. Сб. «*Вопросы прикл. мат-ки и мех-ки*». Чебоксары, ЧГУ, вып. 5, 138-185.

Струйное обтекание пластины в канале (соавт. Кузнецов Ю.В.). Сб. «*Вопросы прикл. мат-ки и мех-ки*». Чебоксары, ЧГУ, вып. 5, 186-194.

Наклонный вход тонкого тела в несжимаемую жидкость. *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5, 16-24.

1978

Движение тонкого тела в канале переменной ширины (соавт. Хакимов А.). Сб. «*Струйные и кав. течения и совр. вопросы теории управления*». Чебоксары, ЧГУ, 122-126.

Симметричное кавитационное обтекание клина ограниченным потоком жидкости (соавт. Кузнецов Ю.В.). Сб. «*Струйные и кав. течения и совр. вопросы теории управления*». Чебоксары, ЧГУ, 54-67.

1979

Наклонный вход в идеальную невесомую жидкость тонкого тела с вентилируемой каверной. *Изв. АН СССР МЖГ*, № 3, 66-76.

Нестационарное движение тонких тел в идеальной жидкости (соавт. Михайлов В.М.). Сб. «*Нестационарное движение тел в жидкости*». Чебоксары, ЧГУ, 1979, 111-148.

Аэродинамическое взаимодействие встречных полубесконечных скоростных поездов (соавт. Хакимов А.). Сб. «*Нестационарное движение тел в жидкости*». Чебоксары, Чув. ун-т, 1979, 149-159.

1980

Обтекание пластины вблизи свободной поверхности невесомой жидкости (соавт. Кузнецов Ю.В.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1980, № 1, 158-162

Импульсивное воздействие на неоднородную по прочности сплошную среду (соавт. Краснов В.К. и Артемьев И.Т.). Сб. «*Динамика сплошной среды со свободными поверхностями*», Чебоксары, ЧГУ, 3-10.

Нестационарное движение тонких тел в жидкости с границами раздела (соавт. Никитин В.В.). Сб. «Динамика сплошной среды со свободными поверхностями». Чебоксары, ЧГУ, 113-123.

Применение ТФКП в гидродинамике (соавт. Галанин А.В.). Учебное пособие. Чебоксары, Чуваш. ун-т, 83стр.

1981

К теории нестационарного движения тел в жидкости. Сб. «Гидродинамика больших скоростей». Чебоксары, Чуваш ун-т, 126-138.

Глубинное и поверхностное смыкание вентилируемой каверны при входе тел в весоую жидкость (соавт. Гусев В.А.). Сб. «Гидродинамика больших скоростей». Чебоксары, Чуваш ун-т, 48-58.

Проникание тел в жидкость конечной глубины (содокл. Галанин А.В., Михайлов В.М., Порфирьев Н.П.) – доклад. V Всесоюзный съезд по теор. и прикл. мех-ке (анн. докладов).

Математические вопросы кавитации. Учебное пособие. Чув. ун-т, Чебоксары, 131стр.

Die Umströmung von Profilen bei Kavitation (доклад). *Mathematiker Kongress der DDR, Vortragungszuge*, 2. Leipzig,

1982

Течение однородной завихренной жидкости вдоль твердой границы (соавт. Васильев В.Н.). Струйные течения жидкостей и газов (Тезисы Всесоюзн. научн. конф., 2-5 июня, 1982г.), Новополюцк, ч. II).

Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости (соавт. Житников В.П.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, №6, 6-43.

Проникание тел в жидкость конечной глубины (соавт. Галанин А.В., Михайлов В.М. Порфирьев Н.П.) Сб. «Динамика сплошн. среды с границами раздела». Чебоксары, ЧГУ, 45-61.

Горизонтальное движение тонкого профиля в стратифицированной жидкости (соавт. Никитин В.В.). Сб. «Динамика сплошн. среды с границами раздела». Чебоксары, ЧГУ, 112-118.

Приближенный метод учета атмосферы при исследовании входа тупых тел в воду (доклад).

Сб «Проблемы гидродинамики больших скоростей и краевых задач» (Тезисы докладов)

г.Краснодар, Кубанский ун-т.

1983

Деформация свободной границы воды при приближении к ней тела прямоугольной формы (соавт. Никитина Г.В.). Сб. «Динамика сплошных сред с границами раздела», Чебоксары, ЧГУ, 117-126.

1984

Учет сжимаемости при кавитационном обтекании препятствий. Сб. «Газодинамика воздушно-реактивных двигателей». М., Тр. ЦИАММ, № 1093.

Безотрывное обтекание гибкой оболочки (соавт. Житников В.П.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, N 5, 15-20.

Граничные задачи линейной гидродинамики (соавт. Галанин А.В.), Методическое пособие, Чебоксары, ЧГУ. 1984, 83стр.

Применение метода конечных элементов в задачах со свободными границами (соавт. Афанасьев К.Е.). Сб. «Динамика сплошной среды с нестационарными границами». Чебоксары, ЧГУ, 1984, 8-17.

Theoretische Untersuchungen über die Umströmung von Profilen bei Kavitation. *Journ. Maschinenbautechnik*, Berlin, 564-567.

Statistical evaluation of the hydrodynamic characteristics of the wings, calculated by a discrete eddy current method (co-author Barinov M.P.). *Proc. "Compute Technique and advanced scientific instrumentation in ship hydrodynamics"*, Warna, 105.1-3.

1985

Об определении выемки выброса при взрыве в грунте с угловыми и криволинейными свободными границами (соавт. Родионов А.Т.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 1, 3-9.

Численное исследование входа пластины и диска в сжимаемую жидкость (соавт. Чечнев А.В.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1985, 2, 104-107.

Применение метода крупных частиц к задачам со свободными границами (содокл. Чечнев А.В.). Тезисы докл. *Всесоюзн. научн. тех. конференции "Проблемы совершенствования ходкости и мореходности судов"*. Л., "Судостроение".

Кавитационное обтекание препятствий с учетом испарения. *Сб. «Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды»*, Чебоксары, ЧГУ, 113-122.

Пересечение клином с кирхгофвской каверной границы раздела двух жидкостей (соавт. Никитин В.В.). *Сб. «Взаимодействие тел с границами раздела сплошной среды»*. Чебоксары, ЧГУ, 93-100.

Нелинейная задача о встречном движении тел в жидкости (соавт. Хакимов А.). *Сб. «Гидродинамика больших скоростей»*. Чебоксары, ЧГУ, 116-123.

1986

О циркуляционных движениях плавающих тел в вихревых воронках. *Сб. «Актуальные задачи механики сплошных сред»*, Чебоксары, ЧГУ, 114-117.

Исследование эволюции свободных границ при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости методами конечных и граничных элементов (соавт. Афанасьев К.Е., Афанасьева М.М.). *Изв. АН СССР, МЖГ*, № 5, 8-13.

Исследование неустановившегося движения тел в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами методом конечных элементов (содокл. Афанасьев К.Е.). *Тезисы докладов конференции "Динамические задачи механики сплошной среды"*. Краснодар

1987

Об импульсе и кинетической энергии жидкости при ударе и погружении твердых тел. *Сб. «Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами»*. Чебоксары, ЧГУ, 106-114.

Численные методы в гидродинамике (соавт. Афанасьев К.Е.) – учебн. пособие. Чебоксары, Чув. ун-т, 94стр.

Безотрывное обтекание мягкой и упругой замкнутой оболочки (соавт. Гажеев И.Г., Житников В.П., Киселев О.М.) – доклад. *Сб. «Расчетные методы и практика судовых мягких и гибких конструкций»*. Владивосток, ДВИМУ.

Simulation of Unsteady Free Surfaces Flow Problems by the Direct Boundary Element Method (co-authors: Afanasiev K.E., Afanasieva M.M.). *Proc. of the Symposium "Advanced Boundary Element Methods Proceeding of the Symposium"*, San-Antonio, Texas, 1987, Springer-Verlag, Berlin, 427-433.

Finite and boundary element investigation of the evolution of free surfaces in connection with the unsteady motion of bodies (co-authors: Afanasiev K.E., Afanasieva M.M.). *Fluid Dynamics*, 1987, 21(5)

1988

Приближенные и численные методы в гидродинамике со свободными границами (доклад). *Сб. «Современные проблемы механики жидкости и газа»*, АН СССР, Иркутск.

Кавитационное обтекание клина ограниченным потоком жидкости от источника – стока (соавт. Димитриева Н.А.). *Сб. «Гидродинамика ограниченных потоков»*. Чебоксары, ЧГУ, 30-39.

Нелинейная задача о кавитационном обтекании пластины с учетом поверхностного натяжения (соавт. Житников В.П.). *Сб. «Гидродинамика ограниченных потоков»*. Чебоксары, ЧГУ, 51-58.

Численное исследование погружения пластины и диска конечной массы в сжимаемую жидкость (соавтор Чечнев А.В.). Матер. VII Всесоюзного сем. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», Кемерово, 114-115.

Gas bubble dynamics in a fluid (co-authors: Afanasiev K.E., Afanasieva M.M.) – доклад. *Abstracts of the 12th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Grenoble.

1989

О влиянии коронного разряда на турбулилизацию потока и теплообмена (соавт. Ахметзянов И.Д., Казаков С.М.). Сб. «Турбулентные течения и техника эксперимента», АН СССР, Таллин, 75-77.

Краевые задачи для систем подпочвенных оросителей. Сб. «Актуальные задачи гидродинамики», Чебоксары, ЧГУ, 107-117.

Нестационарное движение тел в жидкости. *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, АН СССР, том 186, 182-191. Перевод: Nonstationary motion of bodies in a fluid. *American Mathematical Society*, 1991, pp. 211-221.

1990

Нестационарное движение системы двух колеблющихся полубесконечных профилей (соавт. Ибрагимов Л.М.). Сб. материалов 8-й Всесоюзной научно-технич. конференции по судовым движителям и системам управления КБ "Винт". М., 644-658.

Судовые движители типа деформируемого клина (соавт. Ибрагимов Л.М., Петров А.А., Литвин И.П.). Сб. материалов 8-й Всесоюзной научно-технич. конференции по судовым движителям и системам управления КБ "Винт". М., 610-619.

Теоретический анализ кавитационных течений. Сб. «Гидродинамика больших скоростей». Чебоксары, ЧГУ, 5-15.

1991

Численное исследование в гидродинамике со свободными границами (доклад). VII Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике (Тезисы докладов). М., МГУ, 336.

Numerical study of cavitating Flows (co-author Afanasiev K.E.). *Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems. Vol.1, Fluid Flow*, Southampton, U.K. 183-193.

Симметричное обтекание двух оболочек (соавтор Житников В.П.). Сб. Проектирование и расчет пневмоконструкций. Владивосток, 41-44.

1993

Осесимметричное обтекание газового пузыря идеальной жидкостью (соавтор Житников В.П.). *Известия РАН, МЖГ*, N 5, 98-103. Перевод: Axisymmetric flow of ideal fluid past a gas bubble. *Fluid Dynamics*, vol. 28, No.5, pp 667-671.

Приложение обобщенных аналитических функций в гидродинамике. Сб. «Проблемы гидродинамики больших скоростей», Чебоксары, ЧГУ, 10-25.

1994

Численное исследование в гидродинамике. *Известия АН ЧР, ФМТН*, N 2, Чебоксары, 61-84. On the infinite regions in the boundary element method. *Proc. Int. Fluid Dynamics Workshop "Boundary Element Methods in Fluid Dynamics II"*. Southampton, Comput. Mech. Publications, 103-109.

1995

Численное исследование системы крыловых профилей методом граничных элементов (соавт. Картузова Т.В.). Сб. «Актуальные задачи математики и механики». Чебоксары, ЧГУ, 108-116.

Исследование течений в трубах методом обобщенных аналитических функций (Троешестова Д.А.) - доклад. *Тезисы конф. Механика машиностроения*, Наб. Челны, Казанск. политех, ин-т. Применение метода граничных элементов к численному конформному отображению и исследованию системы крыловых профилей (соавторы: Картузова Т.В., Петрова Т.Н.) – доклад. *Тезисы конф. Оптимизация проектирования*. Казань, Казанск. гос. тех. ун-т. Numerical Investigation of Potential Flow by using of BEM (Troeshestova D.A., Petrova T.N.) – доклад. *The Int. Conf. "Optimization of Finite Elements Approximations"*, St-Petersburg.

1996

Применение метода граничных элементов к численному конформному отображению (соавтор Т.Н. Петрова). *Известия НАНИ ЧР*, Чебоксары, № 1, 56-73.
Импульсная генерация волн цунами. *Труды VI всероссийской конф. «Гидродинамика больших скоростей»*, Чебоксары, изд. ЧГУ, 178-184.
Многозвенные плавниковые движители (соавтор Ибрагимов Л.М.). *Труды VI всероссийской конф. «Гидродинамика больших скоростей»*, Чебоксары, изд. ЧГУ, 73-77.
Проектирование канала с боковыми отводами и равномерной раздачей потока. *Известия НАНИ ЧР, отд. ФМТН*, № 6, Чебоксары, 89-93.
Численное исследование профиля вблизи экрана (соавтор Картузова Т.В.). *Известия НАНИ ЧР, ФМТН*, Чебоксары, № 6, 94-104.

1997

О струйном истечении из щелей в стенке и проектирование канала с боковыми отводами. *Известия НАНИ, ФМТН*, № 4, Чебоксары, 128-137.
An application of analytic functions to axisymmetric flow problems (Zhitnikov V.P., Dimitrieva N.A.). *Appl. Math. Modeling*. Elsevier Science Inc. New York, Vol. 21, 91-96.
Wave generation by impulse moving of the bottom. *Proc. of 4th Int. Conf. on Moving Boundaries*. Southampton, UK. Vol. IV, 307-314.

1998

Теоретическое исследование плавниковых движителей (соавтор Ибрагимов Л.М.). *Тр. Второй международной конф. по судостроению*, С.Петербург.
Сравнительный анализ аппроксимаций в методе граничных элементов (соавтор Макаров В.В.). Матер. 2-го Всеросс. сем. «Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач», Казань, 67-68.
Равновесные полые и точечные вихри в потоке жидкости. *Известия НАНИ ЧР, ФМТН*, №5, Чеб., 66-84.
Применение метода граничных элементов к расчету проникаемого крылового профиля (соавтор Т.Н. Смирнова). *Известия НАНИ ЧР, ФМТН*, №5, Чебоксары, 85-95.
Theoretical investigation of cavitating flows (co-author Dimitrieva N.A.). *Proc. of Third Int. Symp. on Cavitation. Grenoble*, Vol. 2, 275-280.

1999

Полые и точечные вихри в потоке жидкости. *Материалы Всерос. научн. конф. "Краевые задачи и их приложения"*. Казань. *Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского*, т. 3, Казань, 362-367.
Применение аналитических функций для решения трехмерного уравнения Лапласа. *Тр. Всероссийской научн. конф. «Теория функций, ее прил. и смежные вопросы»*. Казань, Казанское математическое общество, 221-222.
Полые вихри в жидкости вблизи твердых и свободных границ (соавтор Макаров В.В.). Чебоксары, *Известия НАНИ ЧР, № 4*, 63-82.
Обтекание проникаемой пластины вблизи экрана (соавтор Смирнова Т.Н.). Чебоксары, *Известия НАНИ ЧР, № 4*, 83-94.

2000

Обтекание проницаемого профиля вблизи экрана (соавтор Смирнова Т.Н.). Чебоксары, *Известия НАНИ ЧР*, № 4, 61-69.

Движение тела в вязкой жидкости при предельно малых числах Рейнольдса. *Труды Международн. научной конф. «Актуальные пробл. матем. и механики»*. Казань, УНИПРЕСС, 2000, 203-204.

Обобщение формулы Грина и применение в численной гидродинамике. *Труды Международн. научной школы «Моделир., вычисл., проектирование в условиях неопределенности»*, УГАТУ, Уфа, 82-89.

Движение цилиндра в предельно вязкой ограниченной жидкости. *Труды Международн. научной конф. «Краевые задачи аэрогидродинамики и их приложения»*. Казань, Изд. «ДАС», 246-259.

Применение обобщенных аналитических функций к решению прямых и обратных краевых задач осесимметричного обтекания препятствий (соавтор Димитриева Н.А.). *Труды Международной научной конф. «Краевые задачи аэрогидродинамики и их приложения»*. Казань, Изд. «ДАС», 343-345.

2001

Аналитические функции с кратными полюсами на бесконечности и их приложение в гидродинамике (Гермогенова Е.В.). *Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского*. Казань, том 8, 72-73.

Численно-аналитическое решение бигармонического уравнения. *Труды Математического центра им. Н.И.Лобачевского*. Казань, том 8, 219-220.

2002

Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса (соавтор Терентьев А.А.). *Известия НАНИ ЧР*, № 2, Чебоксары, 44-62.

Problems in the theory of high speed hydrodynamics. *Proc. of International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"*, Cheboksary (Russia) – New York (USA), 11-27.

An application of the p -analytical functions to investigate cavitating flows (co-author Dimitrieva N.A.). *Proc. of International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"*, Cheboksary (Russia) – New York (USA), 119-126.

Numerical solution of biharmonic equation. *Proc. of 5th Int. Workshop on Computer Science and Information Technologies*, Ufa, 261-263.

2003

Модель Рябушинского в теории кавитации. *Известия НАНИ ЧР*, Чебоксары, № 3, 47-56.

Mathematical modeling of cavitating flows. *The 5th Int. Symposium on Cavitation*. Osaka, Japan, PDF, 11p.

2004

Gravitational effects in cavitation. *Proc. of 2nd International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"*, Cheboksary (Russia), 73-80.

On the design of supercavitating hydrofoils. *Proc. of 2nd International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"*, Cheboksary (Russia), 137-142.

2005

Введение в векторное и тензорное исчисление – учебное пособие. Чебоксары, ин-т (филиал) МГОУ, 55стр.

Об одном эффективном численном методе в гидродинамике. *Сб. «Вузовская наука – России»*, ч. 1., Наб. Челны, 46-49.

Итерационный метод в численной гидродинамике. *Сб. «Образование. Наука. Производство. Инновационный аспект»*, т. I. Москва, МГОУ ЧИ, 238-243.

Структура течений в дорожках Кармана. *Сб. «Образование. Наука. Производство. Инновационный аспект»*, т. I. Москва, МГОУ ЧИ, 244-249.

Формула Пифагора и ее роль в развитии математики. *Сб. «Образование. Наука. Производство. Инновационный аспект»*, т. II. Москва, МГОУ ЧИ, 52-61.

Numerical modeling of cavitating flows. *Proc. of Int. Conf. on Fast Sea Transportation*. S.-Petersburg, PDF, 15p.

Riabouchinsky cavity model in flow dynamics (co-authors Demidov A.S., Pavlova N.A.). *Proc. of Int. Conf. on Fast Sea Transportation*. S.-Petersburg, PDF, 6p.

2006

Численное исследование кавитационного обтекания тел (доклад). *IX Всероссийский съезд по теор. и прикл. Механике (анн. докл.)*, т. II, стр. 167.

Stationary two-dimensional inviscid flow with flexible boundaries including the effect of surface tension (co-author Zhitnikov). *Journal of Engineering Mathematics*, 55, pp 111-126.

Этапы научных идей (пленарный доклад). *Proc. of III Int. Summer Scientific Workshop "High Speed Hydodynamics and Numerical Simulation"*, Kemerovo, 35-52.

Numerical analysis of cavitating flows by direct iterative manner (co-author Pavlova N.A.). *Proc. of 6th International Symposium on Cavitation CAV2006*, Wageningen, the Netherlands, PDF, 12p.

2007

Метод граничных элементов и приложения. *Материалы XV Межд. конф. «Математика. Образование»*. Чебоксары, изд. Чуваш. госунив., 22-29.

Этапы научных идей (дополненный). *Сб. н. трудов «Численно-аналитические методы и их приложения»*. Москва, Изд. МГОУ, 7-39.

Краевые задачи теории полигармонических функций и их численное решение. *Сб. тр. Межрегион. науч-прак. конф. «Инновации в образовательном процессе»*, вып. 5, М. Изд. МГОУ, 194-199.

Numerical Analysis of Cavitating flows by direct iterative manner (co-author Pavlova N.A.). *Сб. н. трудов «Численно-аналитические методы и их приложения»*. Москва, Изд. МГОУ, 40-62.

Крыловые гидроэнергетические установки (соавтор Терентьев А.А.). *Журн. «Электрика»*, № 9, 31-34.

Numerical Solution of Poly-Harmonic Equations. *Proc. of the 9th International Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2007, v.I*, Ufa, Press UGATU, 251-254.

Numerical Modeling of a Perturbated Flow (co-author Pavlova N.A.). *Proc. of the 9th International Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2007, v.II*, Ufa, Press UGATU, 202-206.

Numerical Modeling on hydrodynamics. *Proc. of Int. Conf. on Subsea Technologies*, St.Petersburg State Marine Technical University, PDF, 16p.

2008

Numerical methods in hydrodynamics (co-author Afanasiev K.E.). *Proc. Int. Conf. on Innovative Approaches to Further Increase Speed of Fast Marine Vehicles, Moving above, under and in Water Surface, SuperFAST'2008*, Saint-Petersburg, PDF, 15p.

Numerical simulation of freeboundaries by perturbed flows. *Proc. Int. Conf. on Innovative Approaches to Further Increase Speed of Fast Marine Vehicles, Moving above, under and in Water Surface, SuperFAST'2008*, Saint-Petersburg, PDF, 5p.

Mesh and meshfree methods in hydrodynamics of free boundaries (co-author Afanasiev K.E.). *Proc. of 10th International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"*, Cheboksary (Russia), Cheboksary Polytechnic Institute of MSOU, 25-46.

2009

Компьютерное моделирование в механике сплошных сред. *Материалы XVII международной конференции «Математика. Образование»*. Чебоксары, изд. ЧГУ, 82-92.

Компьютерное моделирование кавитационного обтекания решетки произвольных профилей. *Тр. науч.-практ. конф. «Инновация в образовательном процессе»*, Чебоксары, ЧПИ МГОУ, вып.7, 33-38.

Компьютерное моделирование решений полигармонических уравнений. *Научный сборник семинара «Механика: современное состояние, проблемы, перспективы» (посвященный 95-летию со дня рождения первого ректора ЧГУ профессора С.Ф. Сайкина)*. Чебоксары, ЧГУ, 15-20.

Numerical investigation of cavitating flow through the cascade of arbitrary foil. *Proc. of the 7th International Symposium on Cavitation CAV2009*. Ann Arbor, Michigan, USA, 2009, Paper No 151.

2010

Компьютерное моделирование обтекания произвольных профилей с частичной кавитацией (соавтор Павлова Н.А.). *Известия РАН, МЖГ*, № 3, 33-42. Перевод: Computer Simulation of Flow past Arbitrary Hydrofoils with Partial Cavitation, *J. Fluid Dynamics*, 2010, Vol. 45, No 3, pp 369-377.

Water Entry of Thin Hydrofoils. Суперкавитация: достижения и перспективы. Киев: Инст-гидромех-ки НАН Украины, 210, 41-51.

2011

От частного к общему; теорема Пифагора и ее роль в развитии математики. *Труды XIX Международной конференции «Математика. Образование»*, Чебоксары, изд. ЧГУ, 229-238.

The Hydrodynamic of Cavitating Flow (co-authors: I.N. Kirschner, J.S. Uhlman). Backbone Publishing Company, Fair Lawn, USA, 598 pp.

К 85-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА М.П. ТУЛИНА RECOLLECTIONS OF M.P. TULIN ON HIS 85th ANNIVERSARY

Among scientists – hydrodynamicists, the special role for Cheboksary scientists is played by Prof. M.P.Tulin from USA. He is the first who formulated linearized problems on cavitating flows and has given their solutions, has received a number important for the applying of theoretical and experimental results on cavitation. These subjects have brought together two talented scientists M.P.Tulin and A.G.Terentiev. Having got acquainted for the first time on the International Symposium «The Non-steady Flow of Water at High Speeds» in Leningrad in 1971, their scientific communications did not stop. From a Meeting to Meeting on various International Forums these communications strengthened also were mutually useful to scientific works. Especially it is necessary to note international scientific school «High Speed Hydrodynamics», organized by A.G. Terentiev in Cheboksary in 2002. The most desirable and active participant was Prof. M.P. Tulin. His kindness and charm drew to themselves participants of school, especially youth which received from him interesting data on hydrodynamics. It was found out on that school, the difference in the age of M.P.Tulin and A.G.Terentiev makes 10 years. The pro-rector of Kemerovo State University Prof. K.E.Afanasiev organized in 2006 the anniversary scientific school «High Speed Hydrodynamics and Numerical Simulation» devoted to M.P.Tulin's eight-decade and A.G.Terentiev's seven-decade.

Celebrating the anniversary of the friend and colleagues Prof. Tulin's 85th-jubilees Prof. A.G. Terentiev has offered to include in the Proceedings brief data about Tulin, published in works of the above mentioned Proceedings of School to Kemerovo.

From Editorial Board



M.P. Tulin and A.G. Terentiev on opening of the International Summer Scientific School in Cheboksary, June, 16-23, 2002

MARSHALL PITER TULIN

Professor Tulin is past Director, and Founder, of the Ocean Engineering Laboratory at the University of California, Santa Barbara. He has been Professor Emeritus at the same university since 1994, and was a Presidential Professor there from 1982 to 1987. Earlier, he founded and directed Hydronautics, Inc., (1959-1982), after serving as a Scientific Officer in the Navy Department (Office of Naval Research, London, 1957-1959; Office of Naval Research, Washington, 1955-1957; David Taylor Model Basin, 1950-1955), and as an Engineer at the NACA Langley Laboratory, 1946-1950. He is a graduate of MIT, 1946 and 1949.

His early experiences led him to the lifelong pursuit of goal oriented research, and convinced him of the necessity and power of theoretical and mathematically based understanding combined with relevant experimentation.

Professor Tulin has been a member of the US National Academy of Engineering since 1979, and was a recipient of the Navy Department's Distinguished Public Service Medal in 1994, for his lifetime contributions to naval research. He is a Weinblum Lecturer, 1984. He received an OMAE Paper Award in 1993. The SIAM volume "Mathematical Approaches in Hydrodynamics" was dedicated to him on his 65th Birthday in 1991. He was elected a Fellow of the Engineering School, Tel Aviv University in 2000, and a Foreign Member of the Academy of Arts and Science of the Chuvash Republic, Russian Federation in 2002.

Professor Tulin has served on scores of Advisory Boards and Committees, including those of ASME, SNAME, SIAM, AIAA, ONR, NRC, NACA, MIT and UCSB. He has been an active consultant to government and industry.

His principal field of research is Naval Hydrodynamics. He is author of over 140 technical papers, in a wide variety of subjects, including: supercavitating flows; supercavitating propellers; ship waves; internal waves; breaking waves; nonlinear ocean wave evolution; remote sensing of ocean waves; polymer effects, and drag reduction. His work has been both fundamental and applied, mathematical and experimental. He has been responsible for the design and development of major experimental facilities (wind and water tunnels; wave and towing tanks) and for the creation and supervision of major hydrodynamic research Laboratories: at Hydronautics, Incorporated, and at the UCSB Ocean Engineering Laboratory. He has had a major impact on his field through personal achievements of an organizational nature:

- reorganization of ONR research programs in naval hydrodynamics (1955-57) to correspond to new directions in naval design and missions.

- conception and planning of the initial ONR Symposium on Naval Hydrodynamics (1956), held bi-annually since; the 26th SNH will take place in Rome in September 2006, sponsored by the Office of Naval Research and the National Academy of Engineering. The program of this Symposium has served to define the field of Naval Hydrodynamics.

- founding and management of Hydronautics, Inc. (Laurel, Md.), a small (100 persons) private company engaged in research and engineering in Hydrodynamics, which developed innovative laboratories and equipment, and carried out extensive testing and research (1959-1982); over 2000 Technical Reports were written. Spe-

cializations included the design and testing of sub- and supercavitating propellers, submarine model testing, and ship testing for maneuvering capabilities. Advanced research was carried out in a wide variety of subjects, including cavitation and other aspects of high speed flows.

- founding and direction of the Ocean Engineering Laboratory of the University of California, Santa Barbara (1982-2003), and of a related graduate program. The OEL specialized in the study of ocean waves, particularly wave breaking and its effects, and hydrodynamic aspects of radar remote sensing of the sea surface.

He has carried out personal research on a wide variety of subjects, very often related to advances in ship hydrodynamics and naval needs. His personal research has in several instances had a widespread impact, notably in the field of Supercavitating Flows. His early innovative use of linearized theory produced many useful and important results and inspired worldwide research in this field and led directly to the design of efficient supercavitating hydrofoils and propellers. His personal research in the field of Naval Hydrodynamics eventually covered a wide variety of subjects and provided illumination and direction to others.

МАРШАЛЛ ПИТЕР ТУЛИН

Среди ученых-гидродинамиков особую роль для Чебоксарских механиков играет профессор М.П. Тулин из США. Он первый, кто сформулировал линейризованные задачи кавитационного обтекания и дал их решение, получил ряд важных для приложения теоретических и экспериментальных результатов по кавитации. Именно эта тематика сблизила двух талантливых ученых А.Г. Терентьева и М.П. Тулина. Познакомившись впервые на международном симпозиуме «Неустановившиеся течения с большими скоростями» в Ленинграде в 1971 году, их научные связи не прекращались. От встречи к встрече на различных международных форумах эти связи крепили и были взаимно полезными для творческой работы. Особо следует отметить международную научную школу «Гидродинамика больших скоростей», организованную А.Г. Терентьевым в Чебоксарах в 2002г. Самым желаемым и активным участником был проф. М.П. Тулин. Его непосредственность и обаяние притягивали к себе участников школы, особенно молодежи, которая получала от него интересные сведения по гидродинамике. На этой школе обнаружилось, что разница в возрасте М.П. Тулина и А.Г. Терентьева составляет 10 лет. Именно этим датам, восьмидесятилетию М.П. Тулина и семидесятилетию А.Г.Терентьеву, была посвящена юбилейная научная школа «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование», организованная проректором Кемеровского госуниверситета профессором К.Е. Афанасьевым в 2006 году. Естественно, юбиляр проф. А.Г. Терентьев не мог не отметить юбилей друга и коллеги проф. Тулина (85лет) и предложил включить в сборник краткие сведения о Тулине, опубликованные в трудах вышеупомянутой школы в Кемерово.

От редколлегии

Профессор Тулин основал и руководил лабораторией Океанографии Калифорнийского Университета в Санта-Барбаре (США). В настоящее время он заслуженный профессор того же университета с 1994 г., был профессором, назначенным президентом, с 1982 по 1987 гг. Основал и руководил компанией Hydronautics, Inc., (1959-1982 гг.). Ранее работал научным сотрудником в Министерстве ВМФ (Управление Военно-Морских Исследований, Лондон, 1957-1959 гг.: Управление Военно-Морских Исследований, Вашингтон, 1955-1957 гг.: Испытательный Бассейн им. Дэвида Тейлора, 1950-1955 гг.), а также инженером в NASA Langley Laboratory, 1946-1950 гг. Окончил Массачусетский технологический институт в 1946 и аспирантуру в 1949.

Его ранние опыты привели к целенаправленным исследованиям, ставшим делом всей его жизни, и убедили его в необходимости и могуществе теоретически и математически обоснованного осмысления в сочетании с релевантным экспериментированием.

Профессор Тулин – член Национальной Инженерной Академии США с 1979 г., удостоен Медали Министерства ВМФ "За отличную службу" в 1994 г. за огромный вклад в военно-морские исследования. Он выступал на Вейнблумских чтениях, 1984 г., удостоен премии за доклад на ОМАЕ конференции в 1993. Труды общества промышленной и прикладной математики (SIAM) "Математические подходы в Гидродинамике", изданных в 1991 г., были посвящены ему в связи с его 65-летием. Он избран действительным членом научного общества Инженерного Отделения Тель-Авивского Университета в 2000 г., и иностранным членом Академии Наук и Искусств Чувашской Республики, Российская Федерация, в 2002 г.

Профессор Тулин входил в состав консультативных советов и комитетов ASME, SNAME, SIAM, AIAA, ONR, NRC, NASA, MIT и UCSB, был активным консультантом в сфере управления и промышленности.

Основная область его исследований военно-морская гидродинамика. Он является автором более 140 технических работ по самой разнообразной тематике, включая: суперкавитирующие течения; суперкавитирующие гребные винты; корабельные волны; внутренние волны; обрушающиеся волны; нелинейная эволюция океанской волны; дистанционные измерения океанских волн; уменьшение сопротивления воздействием полимеров. Его работы были одновременно фундаментальными и прикладными, математическими и экспериментальными. Он отвечал за разработку и проектирование наиболее значительных экспериментальных установок (аэро- и гидродинамических труб; волновые и буксировочные бассейны), а также за создание и управление крупными гидродинамическими исследовательскими лабораториями: в Hydronautics, Incorporated, и в Лаборатории Океанографии Калифорнийского Университета.

Он оказал существенное влияние в своей области благодаря личным достижениям организационного характера:

- реорганизация научно-исследовательских программ Управления Военно-Морских Исследований (ONR) по военно-морской гидродинамике (1955-57 гг.) в соответствии с новыми направлениями и задачами в военно-морском проектировании.

- разработка концепции и планирование первого Симпозиума ONR военно-морской гидродинамике (1956 г.), с тех пор проводящегося два раза в год при поддержке Управления Военно-Морских Исследований и Национальной Инженерной Академии. Программа этого Симпозиума сыграла большую роль в военно-морской гидродинамике.

- основание и управление Hydronautics, XI Inc. (Лорел, Мэриленд), небольшой (100 чел.) частной компанией, занимающейся научно-исследовательскими и инженерно-проектными работами в области гидродинамики, разрабатывавшей инновационные лаборатории и оборудование, и проводившей обширные исследования и испытания (1959 - 1982 гг.); было написано более 2000 технических отчетов. Специализации включали проектирование и испытания суб- и суперкавитирующих гребных винтов, испытания моделей субмарин, а также испытания кораблей на маневренность. Перспективные исследования проводились по самой разнообразной тематике, включая кавитацию и другие аспекты потоков больших скоростей.

- основание и управление Лабораторией Океанографии Калифорнийского Университета в Санта-Барбаре (1982-2003 гг.), и разработка соответствующей выпускной программы обучения. Лаборатория специализировалась на изучении океанских волн, особенно на опрокидывании волн и его эффектах, а также на гидродинамических аспектах дистанционных измерений морской поверхности на радаре.

Он производил собственные исследования по широкому кругу задач, часто связанных с передовыми достижениями в гидродинамике корабля и военно-морскими потребностями. Его личные исследования в нескольких случаях оказали широкомасштабное влияние, особенно в области суперкавитирующих течений. Его ранние инновационные применения линеаризованной теории принесли множество полезных и важных результатов, что стимулировало исследования в этой области по всему миру и привело непосредственно к проектированию эффективных суперкавитирующих гидрокрыльев и гребных винтов. Его личные исследования в области военно-морской гидродинамики, в конечном счете, охватили широкий круг задач и дали их толкование и направление исследований для других.

М.В. КЕЛДЫШ И Л.И. СЕДОВ В ЦАГИ (1931-1946 гг.)

Кишкина Н.Ю.

НИИ Механики

Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Речь идет о двух гигантах науки, академиков Мстислава Всеволодовича Келдыша и Леонида Ивановича Седова, нашего друга, учителя и коллеги. Первому в этом году исполнилось бы 100 лет, второму – 104 года. Обладая широким кругозором, феноменальной памятью и невероятной сообразительностью, они оказали неоценимый вклад в науку и технику, решили ряд проблем военной промышленности, а в послевоенное время, прежде всего, космонавтики. Именно конструкторские замыслы М.В. Келдыша

были воплощены в автоматических аппаратах, которые успешно доставили лунный грунт, долгое время бороздили лунную поверхность и исследовали атмосферу Венеры. Он всегда был рядом с С.П. Королевым при запуске ракет, деля с ним горечь неудач и невероятные успехи в космонавтике. Но космонавтика не единственная отрасль, в которой были достигнуты огромные успехи: это преодоление самопроизвольного колебания (флаттера) крыльев при больших скоростях, а также потери устойчивости переднего колеса самолета (шимми), это исследование дифференциальных уравнений и их решение. Как признание огромного вклада в науку академик М.В. Келдыш был трижды удостоен героя Социалистического труда, награжден семью орденами Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени, медалями, а также орденами и медалями иностранных государств. Многие математические работы были выполнены совместно с академиком Л.И. Седовым. Леонид Иванович более известен широкому кругу ученых и студентов по фундаментальным монографиям, ставшими настольными книгами для многих ученых. Примечательно, что решение Келдыша-Седова смешанных краевых задач были обобщены на сингулярные функции автором этих строк и, по представлению Л.И. Седова, опубликованы в Докладах АН СССР. Хотелось бы особо подчеркнуть влияние академика Л.И. Седова на становление школы гидродинамики в Чувашии, где он неоднократно бывал и был председателем оргкомитета первых летних научных школ по гидродинамике больших скоростей, проводимых в г. Чебоксары.



С.П. Королев, И.В. Курчатов и М.В.Келдыш



Л.И. Седов выступает на 4-й летней научной школе «Гидродинамика больших скоростей» (Чебоксары, 1984)

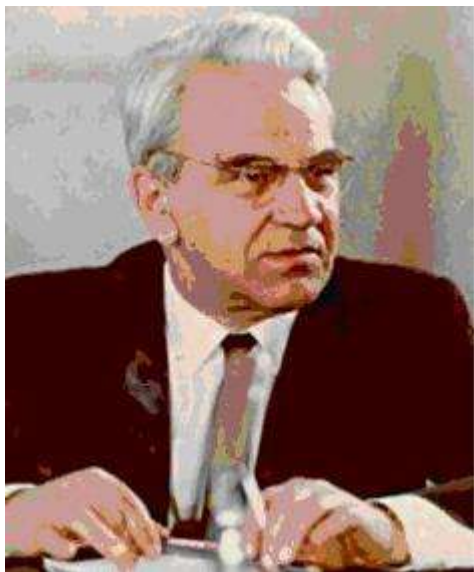
Хотелось бы особо подчеркнуть влияние академика Л.И. Седова на становление школы гидродинамики в Чувашии, где он неоднократно бывал и был председателем оргкомитета первых летних научных школ по гидродинамике больших скоростей, проводимых в г. Чебоксары.

Он любил Чувашию, с теплотой вспоминал о ней, охотно приезжал на научные форумы, проводимые в Чебоксарах. Как дань глубочайшего ува-

жения великому ученому в 2002г. была организована в Чувашии Международная летняя научная школа «High speed hydrodynamics (Гидродинамика больших скоростей)» в память о Леониде Ивановиче Седова. В ней приняли участие ученые многих стран ближнего и дальнего зарубежья (США, Германии, Японии, Италии, Норвегии, Украины и др.).

Мы знаем о научных достижениях М.В. Келдыша и Л.И. Седова в целом, но их совместная работа в ЦАГИ, возглавляемая академиком С.А. Чаплыгиным, где были сконцентрированы великие умы ученых гидромехаников, их научные достижения того периода нуждаются более детального освящения. Именно этому периоду посвящается доклад Н.Ю. Кишкиной, который является, одновременно, данью глубокого уважения М.В.Келдышу в связи с его столетним юбилеем.

А.Г. Терентьев



«Уважение к минувшему – вот черта, отличающая истинную образованность от дикости»

А. С. Пушкин

«Продвижение в науке невозможно без преодоления трудностей. Наука требует героизма. Но это как раз то, чего ищет молодость, то в чем она видит счастье»

М.В. Келдыш

Мстислав Всеволодович Келдыш –
президент Академии наук СССР

В своем сообщении хочу отметить наиболее яркие научные результаты М.В. Келдыша и Л.И. Седова только в период их совместной пятнадцатилетней деятельности в ЦАГИ. Их последующая деятельность в области ракетно-космической техники оказала неоценимое влияние на укрепление обороноспособности страны и на развитие мировой космонавтики. Но эта тема требует особого освещения. Многие стороны их деятельности широко представлены в научной литературе, но многие стороны еще ждут своего освещения в печати. Именно в рассматриваемом периоде раскрылись их таланты, сыгравшие важную роль в становлении Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) в области авиации и космонавтики как одного из мировых центров. По документам к истории ЦАГИ удалось проследить начало творческой деятельности М.В. Келдыша и Л.И. Седова в ЦАГИ. Круг их исследований необычайно широк от прикладных задач технической аэрогидродинамики до глубинных основ механики и физики.

В период индустриализации нашей страны перед ЦАГИ были поставлены проблемы создания отечественной авиации и флота, как надводного, так и подводного. В июле 1930 г. директор ЦАГИ С.А. Чаплыгин выступил с докладом о состоянии авиапромышленности и работах ЦАГИ на совещании в Революционном военном совете СССР (РВС). Принимается «Положение о ЦАГИ», по которому «ЦАГИ подчиняется Народному Комиссариату по военным и морским делам СССР (НКВМ) и является комплексным научно-техническим и экспериментальным органом НКВМ, обслуживающим области обороны и народного хозяйства, связанные с эксплуатацией «сил воздуха и воды».

С.А. Чаплыгин был не только гением в науке, но и мыслителем государственного масштаба. 11 января 1931 г. С.А. Чаплыгин, как начальник ЦАГИ, подписывает следующий приказ по ЦАГИ. «В соответствии с решением Наркомвоенмора о структуре ЦАГИ Общетеоретический отдел разделить на 2: отдел испытаний в натуре (ОИН) и теоретическую группу, состоящую при начальнике института. В Теоретическую группу входят основные работники Института: П.А. Вальтер, В.П. Ветчинкин, В.В. Голубев, А.П. Котельников, М.А. Лаврентьев, Н.Н. Лузин. Общее руководство Теоретической группой беру я на себя». С.А. Чаплыгин.

Возникла необходимость решения кадровых вопросов. В 1932 г. С.А. Чаплыгин и А.И. Некрасов организуют в ЦАГИ аспирантуру. А.И. Некрасов в газете «За авиационные кадры» в 1932 г. писал: «Влияние ЦАГИ на подготовку кадров (на стороне) наиболее проявилось в постановке преподавания на механическом отделении физико-математического факультета Московского университета. Благодаря инициативе ЦАГИ это отделение физико-математического факультета МГУ получило такую структуру, которая позволяет авиационной промышленности, в частности ЦАГИ, черпать из этого отделения необходимые кадры».

М.А. Лаврентьев вспоминает, что в 1931 г. С.А. Чаплыгин по рекомендации А.И. Некрасова приглашает в ЦАГИ в Общетеоретическую группу выпускников Университета М.В. Келдыша и Л.И. Седова заниматься проблемами авиации. Сохранился документ – направление Наркомата просвещения РСФСР, где записано, что в распоряжение ЦАГИ направляются в качестве специалистов М.В. Келдыш и Л.И. Седов. С трудоустройством в ЦАГИ у М.В. Келдыша и Л.И. Седова возникли осложнения. Как вспоминает М.А. Лаврентьев, решить эту проблему удалось, минуя кадровое начальство, через партийное бюро ЦАГИ. Секретарем парткома ЦАГИ был начальник отдела гидродинамики Николай Андреевич Смирнов (впоследствии вместе с А.Н. Туполевым оказавшийся в «шарашке»). Так 26 июля 1931 г. два беспартийных специалиста стали сотрудниками ЦАГИ.

С.А. Чаплыгин и главные авиационные конструкторы сформулировали важнейшие проблемы аэрогидродинамики, прочности и устойчивости разных видов самолетов. Теоретическими исследованиями в ЦАГИ руководил С.А. Чаплыгин, возглавлявший Теоретическую группу и научный семинар этой группы. По документам Теоретической группы удалось проследить тематику выступлений это обсуждение важнейших практических задач авиации, гидроавиа-

ции и вооружения военно-морского флота. На семинаре у С.А. Чаплыгина докладывались исследования по аэродинамике, гидродинамике, теории устойчивости движений механических систем и теории динамической прочности конструкций. Выступить на семинаре с докладом считалось большой честью. М.В. Келдыш в статье, посвященной памяти С.А. Чаплыгина, отмечал, что « у С.А. Чаплыгина не было ни капли снобизма, который присущ теоретикам. Он высоко ценил и инженерные работы. Он ценил всё то, где проявляется гений человеческого разума, всё, что ведет человечество к прогрессу».

М.В. Келдыш и Л.И. Седов были активными участниками семинара. Они были первыми, кто от математики перешли к нуждам технических задач. Теоретические достижения участников семинара сыграли важную роль в развитии аэрогидродинамики.

В 1932 - 1933 г.г. на семинаре выступил с тремя докладами М.В. Келдыш в соавторстве с М.А. Лаврентьевым: «К теории колеблющего крыла» и в соавторстве с Ф.И. Франклем: «К теории винта проф. Н.Е. Жуковского» и «Внешняя задача Неймана для нелинейных уравнений эллиптического типа и приложения к теории крыла в сжимаемом газе». С.А. Чаплыгин участников своего семинара называл слушателями и товарищами. Пройдут десятилетия и М.А. Лаврентьев назовет участников теоретического семинара С.А. Чаплыгина - «учениками, коллегами и друзьями». В 1932 г. М.В. Келдыш и Л.И. Седов выступили с докладами на I Всесоюзной конференции по механике. 21-27 декабря 1933 г. в ЦАГИ состоялась конференция по гидродинамике самолетов и глиссеров, где выступает Н.А. Соколов с впечатлениями о поездке в США (Н.А. Соколов начальник Бюро проектирования ЦАГИ), М.В. Келдыш и Л.И. Седов.

В апреле 1934 г. выходит специальный выпуск газеты «Комсомольская правда», приуроченный к 1-ой Московской конференции молодых научных работников. В разделе «Механика и математика» помещены тезисы докладов Л.И. Седова: «Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости» и М.В. Келдыша: «Общее решение задачи о поведении фронта морских волн для некоторых углов наклона дна, примыкающего к берегу».

21-25 декабря 1935 г.г. на Всесоюзной конференции по скоростной авиации доклад М.В. Келдыша: «Направление работ по вибрации крыльев и хвостового оперения». 21-22 мая 1936 г. в ЦАГИ конференция по волновому сопротивлению. Тематика – теоретическая гидромеханика, гидроавиация и судостроение. В оргкомитете А.Н. Крылов, С.А. Чаплыгин, А.И. Некрасов и Н.А. Соколов. На конференции три доклада Л.И. Седова. Доклад «Плоские задачи аэродинамики и гидродинамики» и два доклада совместно с М.В. Келдышем: «Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины» и «Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций». В 1937 г. оба доклада были переведены на французский язык. Как отметил Л.И. Седов в книге, посвященной памяти М.В. Келдыша «Работы М.В. Келдыша по гидродинамике, которые он докладывал в 1937 г. на конференции по теории волнового сопротивления движению тел внутри или на поверхности воды, содержат далеко развитую теорию, значительно опережавшую уровень мировой науки того времени». К сожалению, эти работы, напечатанные относительно небольшим

тиражом, остались малоизвестными. До сих пор содержащиеся в них результаты открываются заново зарубежными учеными.

На конференции по теории волнового сопротивления произошла встреча Л.И. Седова с А.Н. Крыловым и начало их научных контактов. Позже, в 1953 г. М.В. Келдыш, представляя Л.И. Седова в действительные члены АН отметил: «после кончины А.Н. Крылова Л.И. Седов является бесспорно наиболее крупным ученым нашей страны в области гидродинамики тяжелой жидкости и теории судостроения».

23 декабря 1933 г. на торжественном заседании по случаю 15^{тм} летия ЦАГИ нарком тяжелой промышленности Г.К. Ордженикидзе отметил, что «наша авиационная промышленность имеет неоспоримые огромные достижения. В этих достижениях ЦАГИ играет решающую роль. Мы имеем первоклассные моторы и самолеты своей советской конструкции. Мы имеем мощную авиационную промышленность. Особая заслуга ЦАГИ в том, что он не отгородился от заводов, от промышленности. Напротив, он тесно с ними связан и совместно с ними реализует плоды своих теоретических работ» (газета «Правда», 24 декабря 1933 г., № 353 (5879), стр. 2). К 1932 г. из ЦАГИ выделяются в самостоятельные институты - ЦИАМ, ВИАМ и Опытное конструкторское бюро А.Н. Туполева.

Первое десятилетие деятельности Л.И. Седова в ЦАГИ было посвящено решению задач движения идеальной несжимаемой жидкости. Задачи развития авиационной и морской техники ставили перед учеными сложные проблемы гидродинамики. Одной из таких проблем было создание теории глиссирования на поверхности тяжелой жидкости. Л.И. Седов получил теоретическое решение этой проблемы, а также формулы этих задач. Дальнейшие работы Л.И. Седова в теории глиссирования были связаны с теоретическими и экспериментальными методами исследования устойчивости, глиссирования и с циклом исследований по удару тел о воду и рикошетированию. Совместно с М.В. Келдышем Л.И. Седов в 1937 г. провел исследование волнового сопротивления корабля Митчеля в канале конечной глубины и основных задач теории плоских течений идеальной жидкости. Их метод был использован для решения других задач и, впоследствии нашел приложение в теории струи и теории решеток.

М.А. Лаврентьев, освещая деятельность М.В. Келдыша и Л.И. Седова, подчеркнул: «Их первые работы представляли собой дальнейшее развитие исследований Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина и были связаны с новыми методами качественного анализа и решения плоских задач гидродинамики с помощью теории функций комплексного переменного». Они в 1937 г. предложили метод сохранения устойчивости самолета при различных ситуациях. Формула Келдыша-Седова вошла во все учебники и монографии по гидродинамике и теории функций комплексного переменного.

В 1931 г. В ЦАГИ создается специальная группа флаттера для изучения вибрации самолета в полете. В решении проблемы возникали конфликтные ситуации, которые приходилось разрешать на уровне ЦК ВКП (б). В 1935 г. С.А. Чаплыгин поручает М.В. Келдышу решение проблемы флаттера самолета и переводит его в группу вибрации (отдел динамической прочности самолета), где

М.В. Келдыш начальник с 1941 г. до 1946 года. М.В. Келдыш и М.А. Лаврентьев решают задачу об установившихся колебаниях профиля в потоке жидкости. Исходя из более ранних немецких и английских работ, исправляя их ошибки, М.В. Келдышу и Е.П. Гроссману удалось для простейших случаев флаттера создать достаточно простую инженерную теорию явления, охватывающую его основные аспекты и в тоже время доступную для использования в конструкторских бюро (КБ).

22 мая 1934 г. в газете ЦАГИ помещается статья М.В. Келдыша и Е.П. Гроссмана «К вопросу Всесоюзной конференции по вибрации крыла и хвостового оперения», а также доклад - отчет М.В. Келдыша, подводящий итоги его работы в ЦАГИ за 3 года. По докладу - отчету М.В. Келдыша дается положительный отзыв о его деятельности. Сохранился документ, от 1935 года, подписанный С.А. Чаплыгиным, А.Н. Туполевым и А.И. Некрасовым, направленный в ВАК при ЦИК СССР «считать М.В. Келдыша прекрасно подготовленным и талантливым молодым ученым, работающим чрезвычайно продуктивно; по совокупности работ вполне достойным присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук без защиты диссертации и просим утвердить его в звании профессора и действительного члена ЦАГИ по специальности аэродинамика».

В 1936 г. очередное ходатайство в ВАК при ЦИК СССР о присуждении М.В. Келдышу, Л.И. Седову и группе ученых ЦАГИ степени кандидата технических наук и звания профессор без защиты. Но у М.В. Келдыша и Л.И. Седова почти готовы докторские диссертации по физ.- мат. наукам. В 1937 г. Л.И. Седов защищает на тему «Теория плоских движений идеальной жидкости». М.В. Келдыш пройдя докторантуру у М.А. Лаврентьева, в 1938 г. защищает докторскую диссертацию на тему: «О представлении рядами полиномов функций комплексного переменного и гармонических функций». В 1939 г. М.В. Келдыш приказом ЦАГИ аттестуется как высококвалифицированный специалист и назначается руководителем работ в области вибрации для укрепления научно—исследовательской работы ЦАГИ.

М.В. Келдышем в ходе исследований, начатых в ЦАГИ, были «сформулированы и поставлены основные задачи о флаттере, намечены пути их решения, получен ряд важнейших результатов. Был найден путь инженерного решения этой задачи». Работы М.В. Келдыша и его школы в ЦАГИ открыли возможность предсказания для каждого данного самолета, на какой скорости полета ему грозит флаттер и позволили авиаконструкторам получить средства гашения флаттера на самолетах того времени.

В 1940 г. появилось первое обобщение работ ЦАГИ по флаттеру в «Руководство для конструкторов под названием «Расчет самолета на флаттер» учитывались требования безопасности от флаттера при проектировании новых конструкций. Предотвращение флаттера проверялось на бомбардировщиках СБ, ТБ-3 и на самолетах ЛАГ-3. Впервые в 1942 г. испытания на флаттер натурного оперения были проведены в аэродинамической трубе $T = 104$. Указания, изложенные в Руководстве для конструкторов и расчет самолета на флаттер, прошли проверку в годы Великой Отечественной войны и дали выигрыш-

ный результат. Исследования М.В. Келдыша явления флаттера легли в основу нового раздела науки о прочности авиационных конструкций. В 1941 г. НК авиационной промышленности объявляет благодарность М.В. Келдышу и Е.П. Гроссману за «Руководство для конструкторов».

10.04.1942 г. Постановлением СНК М.В. Келдышу и Е.П. Гроссману присуждается Сталинская премия 2-ой степени за научные работы по предупреждению разрушения самолета «Расчет самолета на флаттер» и «Колебания крыла с упруго прикрепленным мотором», «Изгибно-элеронный флаттер» (впервые работы опубликованы в 1941 г.). В 1943 г. М.В. Келдыш награждается Орденом Трудового Красного Знамени и избирается членом-корреспондентом АН СССР.

В 1946 г. М.В. Келдышу присуждается вторая Сталинская премия за научные исследования в области теории методов расчета автоколебаний самолетных конструкций - явления называемого шимми. М.В. Келдышем было изучено явление шимми - самовозбуждающихся колебаний переднего колеса шасси при взлете и посадке самолетов. Это позволило найти простые конструктивные решения, предупреждающие появления шимми.

Результаты исследований М.В. Келдыша изложены в монографии «Шимми переднего колеса трехколесного шасси» 1945 г. В этом исследовании дано решение проблемы и предложены практические инженерные рекомендации. Проведенные исследования М.В. Келдыша по предупреждению явления флаттера и шимми сняли барьеры в развитии скоростной авиации. М.А. Лаврентьев отметил «Работа в ЦАГИ, дала М.В. Келдышу большой опыт решения проблем механики, который сыграл свою роль, когда М.В. Келдыш был привлечен к работе по созданию космических кораблей».

В начале 30-х годов актуальны вопросы гидродинамики (удар тела о воду, движение тела под водой). Гидросамолеты успешно конкурировали с сухопутными, их летные характеристики были выше, чем у сухопутных машин. Первые рекорды скорости самолетов в то время были достигнуты также на гидросамолетах (флаттер тоже впервые возник на гидросамолетах). В начале 1942 г., в годы ВОВ, Л.И. Седов продолжает исследования по гидродинамике, начатые еще в 1933г. Это работы по гидродинамике кораблей, кавитации, а также входа в воду различных тел и выхода из нее.

Как отмечает М.В. Келдыш: «Л.И. Седов вместе со своим коллективом во время войны разработали ряд специальных предложений морского вооружения, наиболее значительным в этом направлении оказалась теория движения торпед в воздухе и в воде, сбрасываемых с самолетов». В 1943г. работа Л.И. Седова «Управление полетом торпеды в воздухе» представлена начальником ЦАГИ С.Н. Шишкиным на Сталинскую премию. Вопрос о присуждении премии решался на уровне наркома авиационной промышленности. Сохранилась переписка - запрос председателя комитета по Сталинским премиям СНК С.В. Кафтанова к наркому авиапромышленности С.Н. Шахурину о возможности присуждения премии Л.И. Седову (ответ надо было дать в течение трех дней). В результате Государственную премию Л.И. Седов получил значительно позже, в 1952г. 1953 - ч/к АН СССР.



Л.И. Седов и М.А. Лаврентьев

Международный авторитет Л.И. Седова в это время был неоспорим. Как вспоминает М.А. Лаврентьев: «После окончания войны все трофейные германские суда, согласно договоренности между союзниками, должны быть уничтожены после предварительного «эксперимента по воздействию взрыва на корабли». Для проведения этих работ была создана комиссия во главе с вице-адмиралом Галлем. В комиссию включены М.А. Лаврентьев и Л.И. Седов от Академии Наук, а также представители военно-морских сил. Комиссия была неработоспособна, каждый отстаивал свою точку зрения. В итоге,

как отмечал М.А. Лаврентьев, «Диктатура Лаврентьева-Седова себя оправдала». А.И. Некрасов в своем представлении Л.И. Седова в АН СССР пишет: «В предвоенные годы и в годы ВОВ исследования Л.И. Седова проблем прикладной гидродинамики сыграла важную роль в проектировании современных морских судов, подводного плавания и подводного оружия».

Круг исследований Л.И. Седова широк. Л.И. Седов проводил исследования по гидродинамической теории торпедных катеров и гидросамолетов, по проблеме низкого торпедирования с самолетов, воздушных стабилизаторов для торпеды и замков крепления торпедного стабилизатора, автоматически раскрывающихся при ударе о воду, участвовал в натурных испытаниях боевой техники. Стабилизаторы ЦАГИ изготавливались серийно. Специальные исследования Л.И. Седова по различным вопросам морского вооружения ВВС ВМФ закреплены авторскими свидетельствами. В представлении Л.И. Седова в АН СССР А.И. Некрасов отмечал: «...являясь выдающимся математиком, Л.И. Седов проявляет себя в своих работах не только как крупнейший математик, но и как естествоиспытатель, применяющий свой математический талант к труднейшим вопросам гидромеханики, в то же время изучающий проблемы гидромеханики с помощью проводимых им тонких физико-технических экспериментов. По этой причине ряд работ Л.И. Седова имеют непосредственное применение в технике нашей страны и в укреплении ее обороны; многочисленные ученики Л.И. Седова развивают его дело». М.В. Келдыш, в своем отзыве подробно характеризуя работы Л.И. Седова, подразделяет их на пять основных групп:

1. Вопросы плоской гидродинамики несжимаемой жидкости в теории крыла.
2. Гидродинамика тяжелой жидкости и теория волн.
3. Специальные проблемы морского вооружения.
4. Исследования вопросов моделирования и подобия.
5. Газовая динамика и ее приложения.

А.И. Некрасов в своем представлении в академики особо выделяет работы Л.И. Седова - «удар о воду и работы, посвященные удару о воду, вызванные

главным образом явлениями, имеющими место при посадке на воду гидросамолетов... До Л.И. Седова этими проблемами занимались мало... Так у Н.Е. Жуковского имеется лишь одна небольшая работа, посвященная удару в шар, плавающий в жидкости...»

Л.И. Седов по праву может быть причислен к творцам этого практически весьма важного раздела гидродинамики. В разделе, посвященном теории крыла самолета, прежде всего, необходимо остановиться на работе по теории неустановившихся движений профиля крыла в жидкости. Здесь Л.И. Седов явился одним из основателей, и притом наиболее успешным, российской школы теоретических исследований по нестационарным движениям профиля крыла самолета. Эта работа дала дальнейшее развитие исследований С.А. Чаплыгина. Работа Л.И. Седова «Теория плоских движений идеальной жидкости» - выдающееся событие в научной литературе по гидродинамике».

М.В. Келдыш также отмечает, что «работы Л.И. Седова пользуются мировой известностью как среди ученых механиков, так и среди инженеров авиационной и судостроительной промышленности и вооружения Военно-морского флота». Результаты научных поисков Л.И. Седова получили практические приложения в гидроавиации, в технике скоростных катеров, в моторо- и самолетостроении и в технике вооружения. В последующие годы Л.И. Седов обобщил свои исследования по теоретической гидродинамике в ряде прекрасных монографий и учебников.



Леонид Иванович Седов

«Л.И. Седов принадлежит к числу крупнейших передовых механиков нашей страны, содействующих развитию науки и ее служению стране» (М.В. Келдыш).

«Л.И. Седов блестящий представитель отечественной науки, ее гордость» (М.А. Лаврентьев).

Г.Г. Черный в своей работе к 90-летию Л.И. Седова отмечает: «Увлечение Л.И. Седова проблемами прикладной гидродинамики и морского оружия берет начало еще со времен его работы в гидродинамической лаборатории ЦАГИ в предвоенные и военные годы, когда наряду с выдающимися работами в области теории крыла, теории глиссирования и теории входа тел в воду, Леонид Иванович участвовал в разработке новых типов подводного оружия».

В конце 1946г. по запросу ЦК ВКП(б) М.В. Келдыш и Л.И. Седов (сохранились характеристики) перешли на руководящие должности в НИИ-1 (ныне Институт тепловых процессов) и в ЦИАМ им. П.И. Баранова, где закладывались основы последующих достижений в авиационной, ракетной и космических областях. В последующие годы научные контакты М.В. Келдыша и Л.И. Седова с ЦАГИ не прерывались. Они оставались руководителями и консуль-

тантами научных проектов, членами ученых советов и редколлегии изданий собраний сочинений Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина, авторами статей к этим изданиям, а также членами жюри конкурса Н.Е. Жуковского. Неоднократно выступали с проникновенными докладами на юбилейных торжествах, посвященных памяти Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.

У французского историка Жака Ле Гоффа есть замечательное рассуждение, которое, по-моему, к нашему сообщению имеет прямое отношение: «Все значимые исторические события подчиняются одной и той же логике, которую можно определить двумя словами: «преемственность» и «перемены». Кроме того, это и есть два условия успешного развития. При отсутствии преемственности вас ждет поражение. При отсутствии перемен -смерть на медленном огне».

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. «Творческий портрет по воспоминаниям современников». М.: «Наука», 2002.
2. Черный Г.Г. «Памятные даты» к 95-летию со дня рождения Леонида Ивановича Седова (14 ноября 1907 г., 5 сентября 1999 г.). Ж. «Успехи механики», 2002, том 1, № 3.
3. Личное дело академика М.В. Келдыша. Архив РАН.
4. Личное дело академика Л.И. Седова. Архив РАН.
5. Сборник документов к истории ЦАГИ. Музей проф. Н.Е. Жуковского.
6. Бюшгенс Г.С., Бедржицкий Е.Л., Дмитриев В.Г. «Центр авиационной науки» 1918-2003, М.: ЦАГИ, 2004.
7. «ЦАГИ – основные этапы научной деятельности». 1993 – 2003, М.: физматлит, 2003.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК МЕТОДОМ ISPH В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЖИМОВ ОБРУШЕНИЯ

Афанасьев К.Е., Макаруч Р.С.

Кемеровский государственный университет

keafa@kemsu.ru, mak@kemsu.ru

Задачи гидродинамики со свободными границами относятся к одному из наиболее сложных для численного моделирования классов задач. Течение жидкости в таких задачах сопровождается значительными деформациями расчетных областей, что часто приводит к нарушению их связности, тем самым резко сужая круг используемых для моделирования численных методов. Дополнительные сложности возникают в том случае, если основными искомыми величинами являются поле давления и гидродинамические нагрузки на твердые границы расчетных областей.

Бессеточные методы, основанные на слабой форме уравнений движения и использующие сетку в численных расчетах, хорошо зарекомендовали себя при решении подобного рода задач [1-3]. В настоящей работе для численного решения задач со свободными границами используется модификация метода сглаженных частиц – метод ISPH (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics), использующий для интегрирования уравнений движения метод дробных шагов. Методы сглаженных частиц традиционно использовались для получения качественных кинематических картин течения, и лишь в последнее время стали появляться работы, посвященные вычислению поля давления [4-6].

Целью настоящей работы является исследование возможностей метода ISPH для вычисления поля давления, а также гидродинамических нагрузок на твердые стенки расчетных областей. Приводится описание метода, способы аппроксимации уравнений и постановки граничных условий. Эффективность метода демонстрируется сравнением результатов численных расчетов на ряде тестовых и модельных задач с аналитическими решениями и результатами других авторов.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в области Ω ищется решение уравнений Навье-Стокса, описывающих движения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – радиус-вектор точек области Ω , $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор скорости, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, ρ – плотность, ν – коэффициент кинематической вязкости, \mathbf{f} – вектор плотности массовых сил.

Помимо уравнений движения (1), в несжимаемых средах вектор скорости должен также удовлетворять условию несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Для решения системы уравнений (1-2) необходимо задать начальные и граничные условия. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – граница области Ω , где Γ_1 и Γ_2 – свободная и твердая границы соответственно. Тогда граничные и начальные условия записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_n(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Gamma_1} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} - p_{атм} \mathbf{n}; \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Gamma_2} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к свободной поверхности, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ – тензор вязких напряжений, $\mathbf{p}_n(\mathbf{x}, t)$ – вектор напряжений на свободной поверхности в направлении внешней нормали.

К системе уравнений (1)-(2) с граничными и начальными условиями (3)-(4) для перемещения частиц необходимо добавить следующее уравнение и начальные условия:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}, \quad (5)$$

$$\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}_0. \quad (6)$$

2. СХЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Для интегрирования по времени уравнений (1-2) используется схема расщепления по физическим процессам. Эта схема была впервые предложена в докладе Н.Н. Яненко [7]. Для интегрирования системы уравнений Навье-Стокса данная схема была применена в работе [8]. В методах сглаженных частиц схема используется авторами работ [4-6, 9].

Для расщепления уравнений динамики жидкости (1) записывается аппроксимация производной по времени конечной разностью и вводится фиктивная скорость \mathbf{u}^* , что приводит к выражению:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t}, \quad (7)$$

где $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1})$, $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}^n, t^n)$, Δt – шаг по времени. Далее, подставляя (7) в (1) и расщепляя получившееся уравнение по физическим процессам, получаем формулу для расчета предиктора скорости, учитывающую лишь силы вязкого трения и массовые силы:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \left(\frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f} \right) \Delta t, \quad (8)$$

и формулу проекции вектора скорости \mathbf{u}^* на соленоидальное поле, учитывающую теперь лишь вклад давления:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) \Delta t. \quad (9)$$

Для получения соленоидального поля скоростей на $(n+1)$ -м шаге по времени, необходимо подобрать соответствующую функцию давления: от обеих частей уравнения (9) берется оператор дивергенции, что, в предположении $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ и после несложных преобразований, приводит к уравнению Пуассона, решением которого и является необходимая функция давления:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (10)$$

Новые координаты \mathbf{x}^{n+1} находятся интегрированием уравнения (5) с начальными условиями (6) по явной схеме Эйлера:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+1} \Delta t. \quad (11)$$

3. ОСНОВЫ МЕТОДА СГЛАЖИВАНИЯ ЧАСТИЦ

В методах сглаженных частиц для перехода к численным экспериментам область расчета представляется набором лагранжевых частиц, на которые не налагается никаких жестких топологических связей, характерных для сеточных лагранжевых методов. При таком подходе функции формы строятся для каждой частицы на каждом шаге по времени с использованием частиц, находящихся от данной на расстоянии не превышающем, так называемого, радиуса сглаживания kh в рассматриваемый момент времени t . Такие частицы называются ближайшими соседями. Значение множителя k зависит от используемой функции ядра, понятие которой будет определено ниже.

В основе метода лежит хорошо известная формула интегрального представления функции:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{\mathbf{x}}) \delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (12)$$

где δ – дельта-функция Дирака.

Далее следует замена δ -функции некоторой гладкой функцией W , имеющей компактный носитель:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{D(\mathbf{x})} f(\tilde{\mathbf{x}}) W(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, h) d\tilde{\mathbf{x}}. \quad (13)$$

Функция W называется функцией ядра и должна представлять собой некоторое приближение к δ -функции, kh – радиус ее носителя, а значение множителя k зависит от ее вида. Следует обратить внимание на то, что в формуле (13) интеграл берется по компактной области D в силу финитности функции ядра W .

Для проведения численных расчетов интеграл (13) заменяется квадратурой [10-12]:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{D(\mathbf{x})} f(\tilde{\mathbf{x}}) W(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, h) d\tilde{\mathbf{x}} \approx \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \Delta D_j, \quad (14)$$

где j – индекс частицы, а ΔD_j – связанный с j -й частицей объем, n – число частиц в области $D(\mathbf{x})$, представляющей собой носитель функции ядра W , с центром в точке \mathbf{x} .

Формула (14) аппроксимации функции $f(\mathbf{x})$ может быть переписана в виде:

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) \varphi_j, \quad (15)$$

где $\varphi_j = \Delta D_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h)$ принято называть базисными функциями.

В силу того, что в методе ISPH отсутствуют топологические связи между узлами дискретизации (частицами), задача определения объема не может быть решена геометрически. Вместо этого объем частицы рассчитывается по формуле $\Delta D_j = m_j / \rho_j$, где масса m_j j -й частицы задается в качестве начального условия и сохраняет постоянное значение во все время расчета, ρ_j – плотность j -й частицы. После вышеприведенной замены окончательные формулы аппроксимации функции принимают вид:

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^n f(\mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h), \quad (16)$$

На основе формулы (16) можно выписать различные аппроксимации производных функции $f(\mathbf{x})$ и получить, соответственно, различные дискретные представления уравнений движения (1).

4. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА НА ДАВЛЕНИЕ

Для получения дискретного аналога оператора Лапласа в методе сглаженных частиц используется комбинация конечно-разностного представления первой производной и ее SPH-аппроксимации [4-6]. Этот подход впервые был предложен в работе [13]. Получаемая при этом аппроксимация оператора Лапласа является устойчивой к неравномерному распределению частиц по расчетной области, в отличие от стандартных SPH-аппроксимаций вторых производных. В том случае, если массы и плотности частиц, участвующих в расчетах, равны и не меняются с течением времени, данный подход приводит к формуле, аналогичной формуле из работы [4]:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_i \approx \frac{2m}{\rho^2} \sum_{j=1}^n \frac{(p_i - p_j)(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}. \quad (17)$$

Для дивергенции скорости в правой части уравнения Пуассона используется следующее традиционное представление:

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \approx \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n m_j (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i)) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h). \quad (18)$$

С использованием вышеприведенных формул уравнение (10) приводится к системе линейных алгебраических уравнений.

5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

5.1. Свободная граница

Для определения частиц свободной границы используется неравенство [4]: $\nabla \cdot \mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n m_j / \rho_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i) < 2\beta$, где β – эмпирический параметр, значение которого может варьироваться в зависимости от решаемой задачи или используемой функции ядра. В работе [4] параметр β выбирался равным 0,75. Это же значение использовалось и в настоящей работе, за исключением тех случаев, где это особо оговорено.

На свободной границе ставится условие Дирихле $p(\mathbf{x}_i, t)|_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_1} = p_{\text{атм}}$, причем константу $p_{\text{атм}}$ без ограничения общности полагают равной нулю.

При расчете давления посредством решения уравнения Пуассона, в отличие от использования уравнения состояния (классический метод SPH), условие Дирихле на свободной границе удовлетворяется точно. Для этого к системе линейных уравнений для уравнения Пуассона применяется стандартная для метода конечных элементов процедура внедрения главных граничных условий в матрицу системы, которая сохраняет свойство ее симметрии.

5.2. Твердая граница

Для постановки условий на твердой границе в методе ISPH применяется способ, предложенный Моррисом [14]. Он основан на представлении границы набором неподвижных частиц, которые называют граничными, а также набором частиц, называемых виртуальными, расположенных в несколько рядов параллельно граничным частицам. Как граничные, так и виртуальные частицы включаются в формулы суммирования для нахождения характеристик частиц жидкости и, в свою очередь, также обладают всеми их характеристиками (масса, плотность, давление и т.д.).

На твердой границе ставится условие прилипания, для метода ISPH означающее равенство нулю скоростей граничных и виртуальных частиц. Помимо условий на скорость они также участвуют в постановке граничного условия для уравнения Пуассона на давление: $\partial p(\mathbf{x}_i, t) / \partial \mathbf{n}|_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_2} = 0$, где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к твердой границе. Применительно к методу ISPH данное условие означает, что для виртуальных частиц давление полагается равным давлению в граничных частицах в направлении внешней нормали к твердой границе, т.е. к СЛАУ добавляются уравнения вида $p_i - p_j = 0$, где i – индекс граничной частицы, j – индекс виртуальной частицы. Симметричность матрицы системы при этом нарушается, в связи с чем необходимо использовать специфические итерационные методы. В работе для решения системы уравнений применяется обобщенный метод минимальных невязок [15].

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Гидродинамическая нагрузка на твердую стенку Γ_2 является интегральной характеристикой волнового давления на этой стенке. В работе [16] приводится следующая формула, которая в дальнейшем и будет использоваться:

$$P_s = \int_{\Gamma_2} p_w d\Gamma_2, \quad (19)$$

где $p_w = p(T) - p(0)$ – волновое давление, $p(0)$ – давление в начальный момент времени, $p(T)$ – давление, вычисляемое в интересующий момент времени T .

Приближенное значение интеграла (19) в численных расчетах находится по формуле:

$$P_s \approx \sum_{j \in P_b} p_j(T) - p_j(0), \quad (20)$$

где P_b – множество граничных частиц.

7. ТЕСТИРОВАНИЕ МЕТОДА. СХОДИМОСТЬ

Для тестирования алгоритма движения по времени решается задача Л.В. Овсянникова [17] о деформации жидкого эллипса. Данная задача одновременно является хорошим тестом алгоритма определения свободной границы, а также корректности сбора матрицы СЛАУ. Несмотря на то, что постановка задачи в работе [17] приводится для идеальной жидкости, правомерность ее решения методом сглаженных частиц может быть обоснована следующим.

Принципиальные отличия математической модели движения вязкой жидкости от модели идеальной заключаются, во-первых, в наличии в уравнениях движения дополнительного вязкого члена, а, во-вторых, в постановке кинематических условий на твердых границах области расчета. Для модели вязкой жидкости типичным является условие прилипания ($\mathbf{u} = 0$), тогда как в идеальной жидкости используется условие непротекания ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$). Поскольку в формулировке задачи отсутствуют твердые границы, то, положив коэффициент перед вязким членом в уравнениях движения равным нулю ($\nu = 0$), мы приходим к эквивалентности двух рассматриваемых моделей. Ниже приводится математическая постановка задачи.

В начальный момент времени $t=0$ область расчета Ω представляет собой круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат, в который заключена несжимаемая жидкость. Деформация круга в эллипс с полуосями $a(t)$ (вдоль прямой $y=0$) и $b(t)$ (вдоль прямой $x=0$) происходит в отсутствие внешних сил (невесомая жидкость) и начинается под воздействием начального распределения поля скоростей по расчетной области:

$$u(\mathbf{x}, t) = a'(t) / a(t) \cdot x, v(\mathbf{x}, t) = -a'(t) / a(t) \cdot y. \quad (21)$$

Несжимаемость жидкости обеспечивается условием постоянства площади эллипса для всех моментов времени $t \geq 0$, что, в данном случае, эквивалентно равенству $a(t) \cdot b(t) = 1$. Тогда в любой момент времени t уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2(t)} + a^2(t)y^2 = 1, \quad (22)$$

а полуось $a(t)$ находится из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a' = c; \\ c' = 2c^2 / (a^5 + a), \end{cases} \quad (23)$$

с заданными начальными условиями:

$$a(t)|_{t=0} = 1, c(t)|_{t=0} = 1. \quad (24)$$

Для решения задачи методом сглаженных частиц следует задать начальное распределение поля скоростей:

$$u = x, v = -y, \quad (25)$$

а также граничное условие на давление:

$$p|_{\Gamma_1} = 0. \quad (26)$$

При проведении расчетов была выявлена непосредственная зависимость между первоначальной геометрией сетки и качеством получаемых результатов. Для определения оптимальной геометрии были проведены расчеты с использованием различных способов начального расположения частиц. Наилучшие результаты были достигнуты при расположении частиц вдоль концентрических окружностей радиуса $r \leq 1$ с центром в начале координат. Кроме того, расчеты проводились с варьированием параметра β для определения свободной границы и отношения сглаживающей длины h к первоначальному шагу сетки. Были проведены расчеты для значений h/dx равных 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7 и при значениях β равных 0.65, 0.7, 0.75, 0.8 и 0.85. Наименьшие значения относительных погрешностей полуосей эллипса были получены при $h/dx = 1.1$ и $\beta = 0.75$. Результаты расчета задачи приведены именно для этих значений параметров.

Для определения порядка сходимости метода была проведена серия расчетов на последовательности сеток, с уменьшающимся относительно предыдущего в 2 раза шагом сетки (количество расчетных частиц: 345, 1317, 5153, 20365). Для подтверждения достоверности полученных результатов проводилось их сравнение с численным решением дифференциальной задачи эволюции свободной границы (22)-(24) по методу Рунге-Кутты 4-го порядка.

В таблице 1 приведены относительные погрешности длин полуосей эллипса в момент времени $t = 1.51c$ для различного количества расчетных частиц. Видно, что по мере уменьшения шага сетки в 2 раза, относительная погрешность также уменьшается в 2 раза, что свидетельствует о первом порядке сходимости метода.

Относительные погрешности полуосей эллипса для $t = 1.51c$

N	345	1317	5153	20365
δa	0.0134594	0.0054462	0.0022765	0.0012172
δb	0.0697543	0.0643536	0.0377585	0.0164775

На рис. 1 приведены графики зависимости относительных погрешностей полуосей эллипса от времени для различного количества расчетных частиц ($N = 345$ (1), $N = 1317$ (2), $N = 5153$ (3), $N = 20365$ (4)).

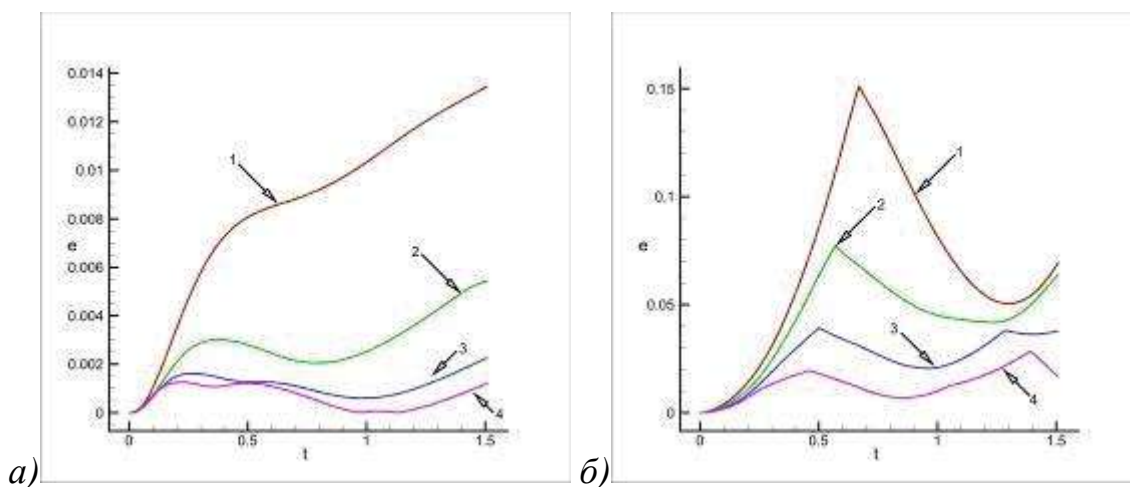


Рис. 1. Задача о деформации жидкого эллипса.

Относительные погрешности: полуоси a (а), полуоси b (б)

Длины полуосей эллипса вычисляются по точкам, имеющим максимальные значения на текущем временном шаге соответствующих координат вдоль прямых $x = 0$ и $y = 0$.

Следует отметить, что метод сглаженных частиц на основе схемы расщепления по физическим процессам позволяет проводить расчет данной задачи до достижения соотношения полуосей эллипса, по крайней мере, 1:3. Что касается возможностей классического метода сглаженных частиц – они ограничены максимальным соотношением 1:2 [18, 19].

8. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЗАДАЧ С РЕЖИМАМИ ОБРУШЕНИЯ

8.1. Задача о колебаниях жидкости в прямоугольном бассейне

В прямоугольном бассейне находится жидкость плотности $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$ и коэффициентом кинематической вязкости $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, свободная поверхность которой в начальный момент времени представляет собой синусоиду с уравнением $y = 2 + 1.1 \cos x$, $x \in [0, \pi]$ м. Колебания жидкости в бассейне происходят за счет действия силы тяжести $g = 1 \text{ м/с}^2$. Уравнение свободной поверхности подобрано таким образом, что в определенный момент времени возникает обрушение вол-

ны и происходит нарушение связности расчетной области. Решение такой задачи классическими сеточными лагранжевыми методами можно проследить лишь до момента соприкосновения гребня обрушающейся волны с ее подошвой. Метод ISPH позволяет проводить расчеты и на более поздних стадиях эволюции течения.

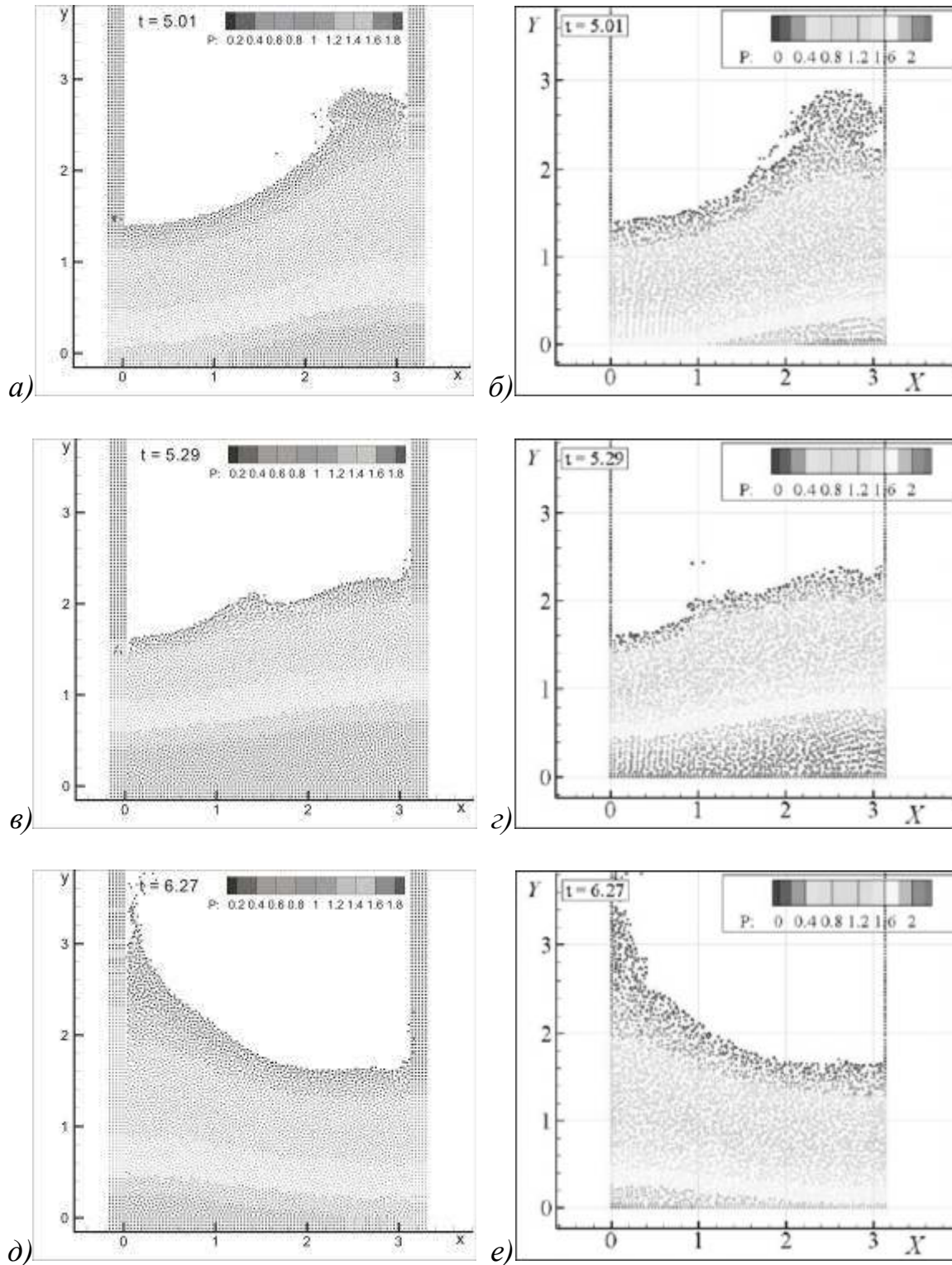


Рис. 2. Задача о колебаниях жидкости в прямоугольном бассейне: метод ISPH (а, в, д), метод GNEM (б, з, е)

На рис. 2 представлены результаты расчетов методом ISPH в сравнении с результатами, полученными в ходе численного решения данной задачи обобщенным методом естественных соседей (GNEM). В расчетах методом ISPH использовалось 4126 частиц подвижной среды, 400 граничных и 1640 виртуальных частиц. Результаты метода GNEM приведены для 3690 частиц расчетной области. Результаты расчетов этой и последующей задач методами граничных элементов и GNEM предоставлены авторами работ [2, 3].

На рис. 3 представлены хронограммы гидродинамических нагрузок на левую стенку бассейна, рассчитанные методом ISPH (а), и методами граничных элементов (сплошная линия) и GNEM (пунктирная линия) (б). Расчет нагрузки методом граничных элементов завершается в момент обрушения волны. Максимальное значение гидродинамической нагрузки на левую стенку бассейна (второй глобальный максимум на рис. 3) достигается в момент удара о нее отраженной от правой стенки волны.

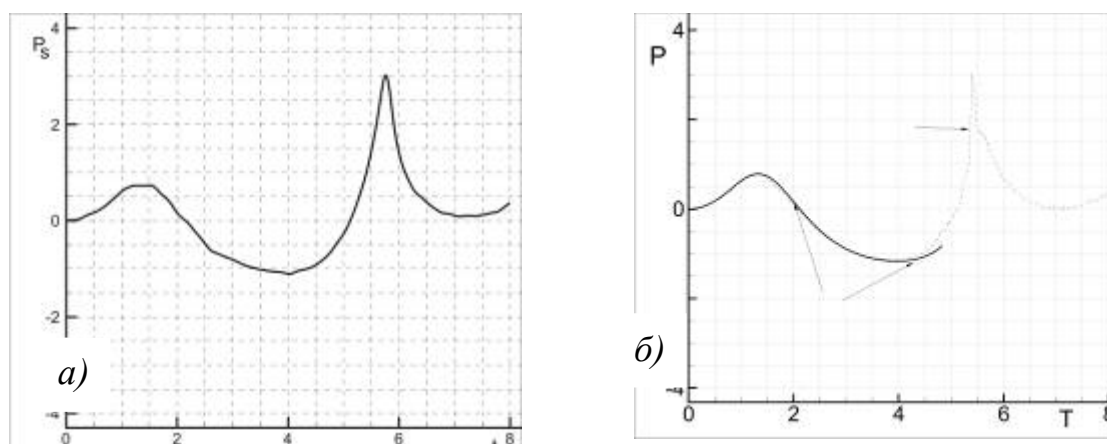


Рис. 3. Задача о колебаниях жидкости в прямоугольном бассейне. Хронограммы гидродинамических нагрузок на левую стенку бассейна: метод ISPH (а), методы ВЕМ и GNEM (б).

8.2. Задача о разрушении плотины

В начальный момент времени $t = 0$ столб жидкости плотности $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ и коэффициентом кинематической вязкости $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ начинает обрушаться под действием силы тяжести $g = 9.81 \text{ м/с}^2$. Начальная ширина столба жидкости $l = 1.46 \text{ м}$, высота $h = 2.92 \text{ м}$, длина бассейна $L = 5.84 \text{ м}$. В определенный момент времени жидкость ударяется о противоположную вертикальную стенку бассейна, а затем волна, образовавшаяся при откате от стенки обрушается, нарушая связность расчетной области. Как уже было сказано выше, при расчете подобных задач классическими сеточными методами лагранжевой природы происходит аварийное завершение расчетов. Метод ISPH и в таких задачах показывает свою высокую эффективность. На рис. 4 приведены картины течения и поле давления, полученные при расчетах задачи методом ISPH. Для представления жидкой среды использовалось 3200 частиц, граница была представлена 479 граничными и 1956 виртуальными частицами.

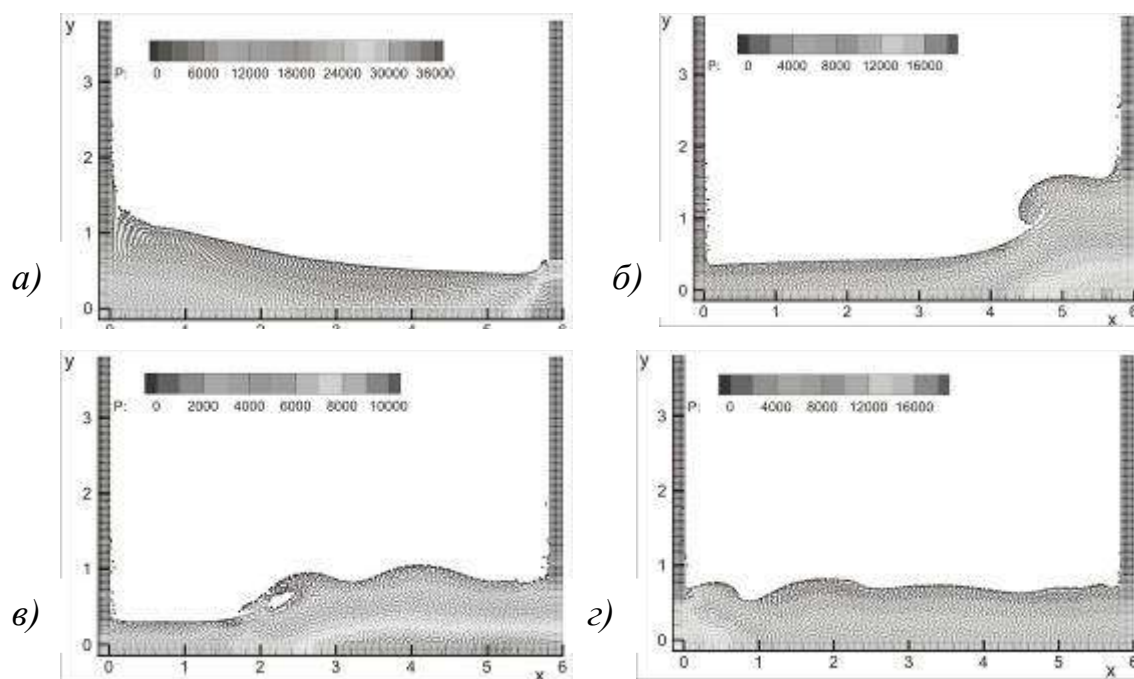


Рис. 4. Задача о разрушении плотины для моментов времени:
 $t = 0.98c$ (а), $t = 2.19c$ (б), $t = 2.8c$ (в), $t = 3.3c$ (г)

Достоверность результатов, полученных методом ISPH, подтверждается качественным сравнением хронограмм гидродинамических нагрузок на левую и правую стенки бассейна с нагрузками, полученными методом GNEM (рис. 5). Некоторое расхождение в графиках нагрузок может быть обосновано тем, что при моделировании процесса разрушения плотины методом ISPH использовалась модель турбулентности Прандтля [4]. В расчетах методом GNEM турбулентные эффекты не учитывались.

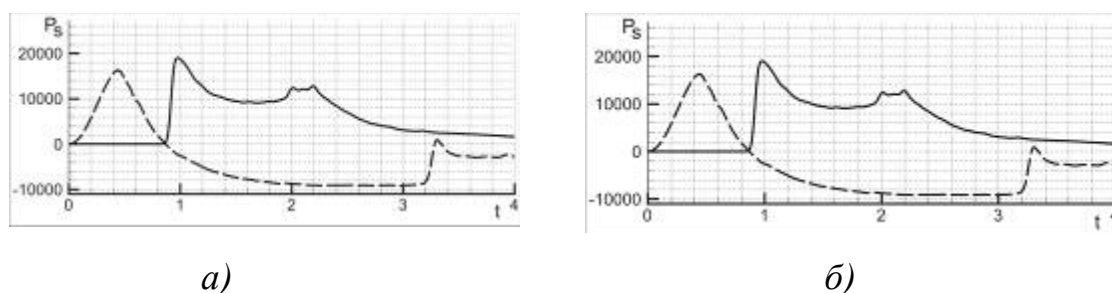


Рис. 5. Задача о разрушении плотины. Хронограммы гидродинамических нагрузок: метод ISPH (а), метод GNEM (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в настоящей работе результаты показывают высокую эффективность метода, как для получения кинематических картин течения, так и при расчетах поля давления. Основной целью является определение гидродинамических нагрузок на твердые стенки расчетных областей. Сравнение результатов с работами других авторов позволяет судить о корректности определения гидродинамических нагрузок и о применимости метода для этих целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Idelsohn S., Onate E., Del Pin F. A Lagrangian Meshless Finite Element Method applied to Fluid Structure Interaction Problems // *J. Computer and Structures*, 81, 655-671 (2003).
2. К.Е. Афанасьев, Т.С. Рейн, Моделирование задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами бессеточным методом естественных соседей // *Вычислительные технологии*, Т. 13, № 4, 7-24 (2008).
3. С.Н. Карабцев, С.В. Стуколов, Численное моделирование задачи о взаимодействии уединенной волны с подводной ступенькой методом естественных соседей // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика*, Т. 8, № 2, 120-127 (2008).
4. Lee E.-S., Moulinec C., Xu R., Violeau D., Laurence D., Stansby P. Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method // *Journal of Computational Physics*, 227, 8417–8436 (2008).
5. Cummins S.J., Rudman M. An SPH projection method // *Journal of Computational Physics*, 152, 584-607 (1999).
6. Shao S., Lo E.Y.M. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface // *Advances in Water Resources*, 26, 787–800 (2003).
7. Яненко Н.Н. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов) // *Доклад АН СССР*, 134 (1960).
8. Chorin A. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. comp*, 22, 745–762 (1968).
9. Koshizuka S., Tamako H., Oka Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation // *Computational Fluid Dynamics Journal*, 29-46 (1995).
10. Lucy L.B. A numerical approach to the testing of fusion process // *The Astronomical Journal*, 82/12, 1013-1024 (1977).
11. Gingold R.A., Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 375-389 (1977).
12. Liu G.R., Liu M.B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method // *World Scientific* (2003).
13. Brookshaw L. Smooth particle hydrodynamics in cylindrical coordinates // *ANZIAM Journal*, 44(E), 114-139 (2003).
14. Morris J.P., Fox P.J., Zhu Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH // *Journal of computational physics*, 136, 214-226 (1997).
15. Y. Saad Iterative methods for sparse linear systems // *Society for Industrial and Applied Mathematics: Second Edition* (2000).
16. Афанасьев К.Е., Березин Е.Н. Анализ динамических характеристик при взаимодействии уединенной волны с препятствием // *Вычислительные технологии*, Т. 9, № 3, 22-37 (2004).
17. Овсянников Л.В. Общие уравнения и примеры // *Задачи о неустановившемся движении жидкости со свободной границей*, Новосибирск: Наука, 5-75 (1967).
18. Monaghan J.J., Thompson M.C., Hourigan K. Simulation of free surface flows with SPH // *Journal of computational physics*, 110, 399-406 (1994).
19. Афанасьев К.Е., Ильясов А.Е., Макаrchук Р.С., Попов А.Ю. Численное моделирование течений жидкости со свободными границами методами SPH и MPS // *Вычислительные технологии*, Т. 11, № 9, 26-44 (2006).

О ПРОБЛЕМАХ ОБОСНОВАНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Житников В.П., Шерыхалина Н.М.

Уфимский государственный авиационный технический университет

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим вопросы, связанные с контролем и обоснованием достоверности результатов математического моделирования, полученных с помощью исследований, включающих математическую постановку задачи, разработку или адаптацию численных методов и программную реализацию (рис. 1).



Рис. 1.

Результатом таких исследований являются приближенные числа. С физико-математической точки зрения, приближенным числом следует называть интервал, содержащий точное решение. Полуширина интервала называется оценкой погрешности приближенного решения. Отсутствие оценки погрешности – это неопределенность, т.е. отсутствие результата. Неправильная оценка погрешности – это неверное утверждение, т.е. ошибка.

Насколько актуальна задача практического получения достоверной оценки погрешности? Опыт работы с научной литературой и участия в конференциях показывает, что до настоящего времени этот вопрос находится на весьма низком уровне. Многих это вообще не интересует. Если интересует, то применяемые методы оценки часто очень неубедительны. Мы приводим результаты решения одной и той же задачи многими авторами [1]. Из сравнения результатов видно, что многие авторы ошибаются в оценке вычислительной погрешности на порядок, а кое-кто и на два (т.е. переоценивает свои возможности). Следует также отметить отсутствие надежных способов рецензирования научных работ, содержащих численные результаты. Если математические выкладки открыты и проверяемы для рецензента, то программа, с помощью которой получены численные данные, закрыта от рецензента и пользователя этой информации. Это не зависит от рейтинга журнала, где они опубликованы, от индекса цитируемости и т.д. При этом, чем выше уровень журнала и его «читаемость», тем больший вред наносят недостоверные результаты.

Сделаем одно замечание. Проблема достоверности имеет две стороны. Первая возникает при отладке программ и непосредственно при проведении исследований. Каждый исследователь решает вопросы, связанные с оценкой погрешности, применяя различные способы, часто весьма упрощенные и не дающие достаточной гарантии достоверности полученных оценок. Тем не менее, комплекс таких способов, опыт и интуиция исследователя в ряде случаев позволяют получить верный результат. Вторая сторона проблемы достоверности

заключается в необходимости представить «внешнее» обоснование оценок для возможности убеждения читателя в своей правоте. Для этого не годится тот комплекс мер, который применяется автором исследований для убеждения самого себя, тем более по тексту статьи невозможно установить уровень интуиции исследователя.

Те приемы, которые обычно приводятся в качестве обоснования декларируемых оценок, вызывают сомнения с точки зрения их надежности.

В качестве примера можно привести метод тестирования, заключающийся в сравнении полученного численного результата с имеющимся точным или приближенным, полученным другим способом. Разность численных значений принимают за оценку погрешности. Но распространение этой оценки на другие примеры очень рискованно. Для различных значений параметров погрешность при одинаковых числах узлов сетки n может различаться на порядки.

Сравнение численных данных с результатами физических экспериментов, которое часто используется для оценки погрешности, дает возможность оценить только погрешность аппроксимации, представляющей собой сумму трех составляющих

$$\Delta_{\text{аппроксимации}} = \Delta_{\text{модели}} + \Delta_{\text{эксперимента}} + \Delta_{\text{вычислений}}.$$

При отсутствии оценки вычислительной погрешности эта сумма не дает возможности получения полезной информации о погрешности математической модели, так как погрешность вычисления может существенно меняться как при изменении n , так и других расчетных параметров.

Заметим, что погрешность может вноситься на каждом этапе моделирования: при постановке задачи, при разработке численного метода решения задачи, при разработке программ. И возможность совершения ошибки при оценке определяется наиболее «узким местом» в этой цепочке.

Начнем с конца, так как это самое слабое место. Что можно применить, чтобы повысить достоверность численных результатов? Отметим, что речь может идти именно о повышении, а не об обеспечении 100%-ной надежности.

1. ОБ ОШИБКАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сразу следует отметить, что математически строго доказать отсутствие ошибки в конкретной программе не представляется возможным. Проблема осложняется тем, что не только исходный код, который разрабатывается при решении задачи, может содержать ошибки. Исходный код переводится в машинные команды с помощью транслятора, все это взаимодействует с операционной системой. Это тоже программные единицы, но их устройство закрыто для пользователя. И опыт показывает, что это взаимодействие не идеально, т.е. предположение о возможной ошибке отбросить нельзя.

Можно предложить усовершенствованное тестирование. Для этого необходимо иметь способ независимой от наличия известных решений оценки погрешности. Тогда при тестировании проверяется и работа программы, и работа этого способа оценки погрешности. На другие случаи распространяется не кон-

кретная оценка погрешности, а возникшее в процессе испытания доверие к результатам этого способа оценки погрешности.

Для повышения надежности оценок можно использовать решение одной задачи несколькими разными методами и сравнение интервалов неопределенности. Если интервалы не пересекаются, то обнаруживается и устраняется ошибка. Этот способ не требует существования точного частного решения и может применяться при любом наборе исходных параметров.

Однако, отсутствие противоречия (пересечение интервалов неопределенности) не означает отсутствие погрешности. Есть вероятность существования значительных погрешностей во всех программных реализациях, которые совпадают с точностью вычислений. Можно оценить результат сравнения, т.е. уменьшение вероятности существования погрешности, выходящей за рамки оценки. Из полученных в [1] оценок следует, что вероятность ошибки уменьшается при увеличении числа разных методов и при получении результатов каждого метода с повышенной точностью.

Опыт показывает, что применение этих мер **позволяет выявить ошибки** разного характера, причем при повышении точности устраняется бóльшее число ошибок.

Перейдем к численным методам.

2. ОБ ОБОСНОВАНИИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Бытует такое мнение: главное – доказать сходимость численного решения к точному. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Под сходимостью понимают равенство нулю предела

$$\lim_{n \rightarrow 0} \Delta(n) = 0, \quad (1)$$

где n – число узловых точек или отрезков разбиения или числа слагаемых суммы и т.п.; $\Delta(n)$ – верхняя оценка погрешности.

Теперь вспомним про ограниченность ресурсов при компьютерных расчетах. Для каждой задачи можно хотя бы приближенно указать такое N , что решение при $n > N$ требует затрат (например, времени) превосходящих имеющиеся возможности.

Отметим, что утверждение (1) относится к области бесконечно больших n . На результаты расчетов, полученных при допустимых значениях $n \leq N$ утверждение (1) ограничений не накладывает. То есть, хотя (1) и выполняется, погрешность при $n \leq N$ может вести себя произвольным образом.

Рассмотрим один пример

$$\Delta(n) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{10^{-10} \cdot n+1}. \quad (2)$$

Легко показать, что $\Delta(n) = O(n^{-1})$; т.е. предел равен нулю. Тем не менее, при $n < 10^5$ выражение (2) будет очень близко к 1 (с точностью порядка 10^{-5}).

Необходимо также учесть ограниченность еще одного вида ресурсов – рядности. Вследствие этого при проведении арифметических операций происходит округление, что вызывает погрешность. При увеличении количества дей-

ствий общая погрешность, вызванная округлением, не убывает, а чаще всего растет.

Тем самым, погрешность численного метода состоит не из одной, а из нескольких компонент, некоторые из которых убывают, а другие могут расти. Суммарная погрешность для малых n убывает, а затем начинает расти или, в лучшем случае, останавливается на определенном уровне.

3. МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ

Обычно зависимость вычислительной погрешности от числа узлов сетки n (математическая модель погрешности) может быть представлена суммой нескольких слагаемых, например

$$z_n = z + c_1 n^{-k_1} + c_2 n^{-k_2} + \dots + c_L n^{-k_L} + \Delta(n), \quad (3)$$

где z – точное значение; z_n – приближенный результат, полученный при числе узлов сетки, равном n ; c_j – неизвестные коэффициенты, которые не зависят от h ; k_1, \dots, k_L – произвольные действительные числа (предполагается, что $k_1 < k_2 < \dots < k_L$).

В $\Delta(n)$ могут входить не вошедшие в сумму слагаемые степенного вида, остаточный член, погрешность округления и многие другие составляющие, обусловленные как численным методом, так и конкретной программной реализацией. В связи с этим на величину $\Delta(n)$ очень трудно или даже невозможно наложить какие-нибудь априорные ограничения.

Имея последовательность численных значений можно тем или иным способом провести идентификацию математической модели. Отфильтровывая слагаемые поочередно [1] можно получить несколько уточненных зависимостей, которые позволяют оценить погрешности. В некоторых случаях путем повторной фильтрации можно получить результаты, на многие порядки более точные, чем рассчитанные непосредственно с помощью численного метода, и чего невозможно было бы добиться прямым расчетом в связи с огромными затратами времени, превышающими разумные пределы.

Анализ погрешности, состоящей из нескольких компонент, представляет собой задачу идентификации математической модели по результатам численного эксперимента. Эта задача идентификации имеет определенную аналогию со спектральным анализом; тогда набор искомым $z, c_l, l=1, \dots, L$ можно назвать спектром зависимости $z_n(n)$ (см. рис. 2), а $\Delta(n)$ – помехой.

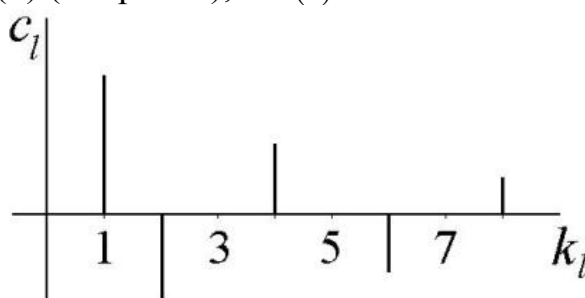


Рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, оценка погрешности и обоснование ее достоверности представляет серьезную проблему, для решения которой приходится привлекать различные идеи и подходы, например, многокомпонентный анализ и использование нескольких методов решения задач.

Как было указано, одной из причин отклонения вычислительного процесса от идеального является тот факт, что асимптотические свойства зависимостей (исследование которых преобладает при математическом анализе) не всегда дают адекватное описание характера их поведения при конечных значениях параметра дискретизации, используемых в расчетах. Многокомпонентный анализ позволяет учесть различный характер зависимостей при разных условиях.

Использование нескольких методов решения задач, различных способов фильтрации и совпадение результатов их работы позволяет с достаточной надежностью убедиться в достоверности полученных оценок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Моделирование течений несжимаемой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Уфа: Гилем. 2009. – 336 с.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Казакова А.О.

Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

Kazakova_Anastasia@bk.ru

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Г. Терентьевым в [1] было получено из интегральной формулы Грина [2] интегральное представление полигармонической функции k -го порядка ($\Delta^k u = 0$) через значения полигармонических функций и их производных на границе пространственной области в виде

$$\varepsilon u(P_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \iint_{(\Sigma)} (v_{k-j}(P) G_j(P, P_0) - u_{k-j}(P) H_j(P, P_0)) d\sigma(P), \quad (1)$$

где P_0 – фиксированная точка внутри области или на её границе Σ , P – переменная точка интегрирования, $v_j = \partial u_j / \partial n$, u_j – полигармоническая функция j -го порядка; функция G_j также является полигармонической функцией $j+1$ -го порядка, зависящей только от расстояния между точкой в области или на её границе и точкой интегрирования:

$$G_j = \frac{1}{4\pi} \frac{[r(P, P_0)]^{2j-1}}{(2j)!}, \quad j = \overline{0, k-1}. \quad (2)$$

Функция $H_j = \partial G_j / \partial n = \nabla G_j \cdot \mathbf{n}$ есть нормальная производная в точке интегрирования.

Очевидно, $\Delta G_j = G_{j-1}$, $\Delta G_1 = G_0 = G(r) = \frac{1}{4\pi r}$.

Вспомогательные функции $u_j = \Delta^{k-j} u$ ($j = \overline{1, k-1}$) удовлетворяют уравнению $\Delta^j u = 0$ и, следовательно, выражаются формулами вида (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon u_1 &= \iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} G_0 - u_1 \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) d\sigma, \\ \varepsilon u_2 &= \iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} G_0 - u_2 \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} G_1 - u_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (3)$$

.....

$$\varepsilon u_{k-1} = \sum_{m=0}^{k-2} \iint_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial u_{k-m-1}}{\partial n} G_m - u_{k-m-1} \frac{\partial G_m}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Все выражения (1) и (3) можно записать так:

$$\varepsilon u_j = \sum_{m=0}^{j-1} \iint_{(\Sigma)} (v_{j-m} G_m - u_{j-m} H_m) d\sigma, \quad (j = \overline{1, k}). \quad (4)$$

Из (4) видно, что полигармоническая функция k -го порядка $u = u_k$, а также u_j выражаются через значения k функций u_j и их нормальных производных v_j на границе области.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Если функции u_j обладают осевой симметрией, и поверхность (Σ) является осесимметричной, то двукратные интегралы можно свести к однократным интегралам по образующей Γ . Для этого следует рассмотреть цилиндрические координаты (z, ρ, φ) . Функции u_j и v_j не зависят от угловой координаты φ , поэтому двукратные интегралы (4) можно преобразовать в однократные:

$$\varepsilon u_j = \sum_{m=0}^{j-1} \int_{\Gamma} (v_{j-m} F_m - u_{j-m} R_m) r' ds, \quad (j = \overline{1, k}), \quad (5)$$

где

$$F_m = \int_0^{2\pi} G_m d\varphi, \quad R_m = \frac{\partial F_m}{\partial n}, \quad (m = \overline{0, k-1}), \quad (6)$$

\mathbf{n} – внешняя нормаль к образующей Γ , r' – расстояние от оси вращения до переменной точки интегрирования.

Для того чтобы можно было использовать интегральные соотношения (5), необходимо, очевидно, определить функции F_m и R_m . Рассмотрим вначале подробно функцию F_0 . Из формул (2) и (6) следует, что:

$$F_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi r} d\varphi. \quad (7)$$

Здесь r – расстояние между фиксированной точкой с координатами (z_0, ρ_0, φ_0) и переменной с координатами (z, ρ, φ) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\rho \cos \varphi - \rho_0 \cos \varphi_0)^2 + (\rho \sin \varphi - \rho_0 \sin \varphi_0)^2 + (z - z_0)^2} = \\ &= \sqrt{(z - z_0)^2 + \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Систему цилиндрических координат всегда можно выбрать так, чтобы $\varphi_0 = 0$, поэтому окончательно получим

$$F_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b \cos \varphi}}, \quad (9)$$

где $a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2$, $b = 2\rho\rho_0$, ρ, z и ρ_0, z_0 – координаты переменной и фиксированной точек в меридиональной плоскости. С помощью замены переменной $\varphi = \pi + 2\psi$ интеграл (9) сводится к полному эллиптическому интегралу первого рода:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\psi}{\sqrt{a+b\cos 2\psi}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{a+b-2b\sin^2\psi}} = \frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}} = \frac{K(\lambda)}{\pi\sqrt{a+b}}, \quad (10)$$

где $\lambda^2 = \frac{2b}{a+b} = \frac{4\rho\rho_0}{(\rho+\rho_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Поскольку производная $K'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{E(\lambda)}{1-\lambda^2} - K(\lambda) \right)$, то нормальная производная

$$R_0 = n_z \frac{\partial F_0}{\partial z} + n_\rho \frac{\partial F_0}{\partial \rho} = \frac{n_\rho [E(\lambda) - K(\lambda)]}{2\pi\rho\sqrt{a+b}} - \frac{n_\rho(\rho - \rho_0) + n_z(z - z_0)}{\pi(a-b)\sqrt{a+b}} E(\lambda). \quad (11)$$

Здесь $K(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$E(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi} d\psi$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

С помощью той же замены находится функция $F_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{a-b\cos\varphi} d\varphi$. После соответствующих преобразований и вычислений, учитывая, что $E'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (E(\lambda) - K(\lambda))$, получим:

$$F_1 = \frac{\sqrt{a+b}}{2\pi} E(\lambda), \quad R_1 = \frac{n_\rho\sqrt{a+b}}{4\pi\rho} [E(\lambda) - K(\lambda)] + \frac{n_\rho(\rho + \rho_0) + n_z(z - z_0)}{2\pi\sqrt{a+b}} K(\lambda) \quad (12)$$

Остальные функции F_m ($m \geq 2$) могут быть найдены из рекуррентной формулы. Она может быть получена непосредственно из первой формулы (6):

$$F_{m+1} = \frac{1}{4\pi(2m+2)!} \int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2m+1} d\varphi = \frac{1}{4\pi(2m+2)!} \int_0^{2\pi} (a-b\cos\varphi) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2m-1} d\varphi.$$

Последний интеграл с помощью тождества $1 = \frac{4m}{2m+1} - \frac{2m-1}{2m+1}$ может быть представлен в виде суммы двух интегралов:

$$F_{m+1} = \frac{1}{4\pi(2m+2)!} \left(\frac{4m}{2m+1} a \int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2m-1} d\varphi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{2m-1}{2m+1} a + b\cos\varphi \right) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2m-1} d\varphi \right).$$

Первый из них представляет выражение, содержащее функцию F_m . Второй интеграл можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{2m-1}{2m+1} a + b\cos\varphi \right) (a-b\cos\varphi) (\sqrt{a-b\cos\varphi})^{2m-3} d\varphi.$$

После раскрытия первых двух скобок и последующей группировки слагаемых получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m+1} \int_0^{2\pi} ((2m-1)a^2 - 2ab \cos \varphi - (2m-1)b^2(1 - \sin^2 \varphi) - 2b^2 \cos^2 \varphi) (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-3} d\varphi = \\ = \frac{2m-1}{2m+1} \int_0^{2\pi} (a^2 - b^2) (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-3} d\varphi + \\ + \frac{1}{2m+1} \int_0^{2\pi} (2b \cos \varphi (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-1} + (2m-1)b^2 \sin^2 \varphi (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-3}) d\varphi. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что первообразной в последнем интеграле является выражение $2b \sin \varphi (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-1}$, и, следовательно, интеграл обращается в нуль.

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-1} d\varphi = 4\pi(2m)!F_m, \quad \int_0^{2\pi} (\sqrt{a-b \cos \varphi})^{2m-3} d\varphi = 4\pi(2m-2)!F_{m-1},$$

то функции

$$F_{m+1} = \frac{4m(2m)!}{(2m+1)(2m+2)!} aF_m - \frac{(2m-1)(2m-2)!}{(2m+2)!(2m+1)} (a^2 - b^2)F_{m-1},$$

или, после сокращения и приведения слагаемых к общему знаменателю,

$$F_{m+1} = \frac{8m^2 aF_m - (a^2 - b^2)F_{m-1}}{4m(m+1)(2m+1)^2}, \quad m = \overline{1, k-2}. \quad (13)$$

Рекуррентное соотношение для нормальных производных будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{m+1} = \frac{1}{4m(m+1)(2m+1)^2} \left[8m^2 aR_m - (a^2 - b^2)R_{m-1} + \right. \\ \left. + 4(4m^2 F_m - aF_{m-1})(z - z_0)n_z + \rho n_\rho \right] + 8\rho_0^2 F_{m-1} \rho n_\rho, \quad m = \overline{1, k-2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13) следует, что с увеличением номера m функции F_m убывают как $1/m^2$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ F_m И R_m ПРИ $r \rightarrow 0$

Пусть функции $z(s)$, $\rho(s)$ определяют границу области Γ , а s и s_0 – дуговые координаты точки интегрирования и фиксированной точки на Γ . Исследуем поведение функций F_m при $s \rightarrow s_0$. Очевидно тогда $z \rightarrow z_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$, и несложно показать, что $\lambda \rightarrow 1$ при $s \rightarrow s_0$. А так как

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{arctg} t - 0 = \infty, \quad \text{то } \lim_{s \rightarrow s_0} F_0 = \infty.$$

Чтобы определить, какую особенность имеет функция F_0 в точке $s = s_0$, следует разложить её в ряд в окрестности этой точки. Пусть далее $s = s_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), тогда

$$\lambda \approx 1 - \frac{1}{8} \frac{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}{\rho^2(s_0)} \varepsilon^2 - \frac{1}{8} \left[\frac{\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0)}{\rho^2(s_0)} - \frac{\rho'^3(s_0) + \rho'(s_0)z'^2(s_0)}{\rho^3(s_0)} \right] \varepsilon^3. \quad (15)$$

В окрестности точки $\lambda = 1$ $K(\lambda) = \ln(-2i\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\lambda - 1) + O(\lambda - 1)$, поэтому при достаточно близких к единице значениях λ , можно считать, что

$$K(\lambda) \approx \ln(-2i\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(\lambda - 1).$$

Подставляя в последнее выражение правую часть (15) вместо λ , после несложных алгебраических преобразований можно получить:

$$K(\lambda) \approx \left(\ln \frac{8\rho(s_0)}{\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}} - \ln \varepsilon \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left[\frac{\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0)}{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)} - \frac{\rho'^3(s_0) + \rho'(s_0)z'^2(s_0)}{\rho(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))} \right] \varepsilon \right),$$

или, с учётом разложения в ряд Маклорена последнего слагаемого,

$$K(\lambda) \approx \left(\ln \frac{8\rho(s_0)}{\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}} - \ln \varepsilon \right) - \frac{\varepsilon}{2} \left[\frac{\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0)}{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)} - \frac{\rho'^3(s_0) + \rho'(s_0)z'^2(s_0)}{\rho(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))} \right]. \quad (16)$$

Выражение $\frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} = \frac{1}{\pi\sqrt{(\rho(s) + \rho(s_0))^2 + (z(s) - z(s_0))^2}} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho(s_0)} - \frac{1}{4\pi} \frac{\rho'(s_0)}{\rho^2(s_0)} \varepsilon$.

Теперь следует почленно перемножить последнее выражение и правую часть (16), что даёт

$$F_0 \approx \frac{1}{4\pi\rho(s_0)} \left\{ 2 \left(\ln \frac{8\rho(s_0)}{\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}} - \ln \varepsilon \right) - \left[\frac{\rho'(s_0)}{\rho(s_0)} \left(\ln \frac{8\rho(s_0)}{\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}} - \ln \varepsilon \right) + \frac{\rho'(s_0)\rho''(s_0) + z'(s_0)z''(s_0)}{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)} - \frac{\rho'^3(s_0) + \rho'(s_0)z'^2(s_0)}{\rho(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))} \right] \varepsilon \right\}, \quad (17)$$

откуда видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($s \rightarrow s_0$) функция F_0 имеет логарифмическую особенность.

Далее так как $E(1) = 1$, несложно показать, что $\lim_{s \rightarrow s_0} F_1 = \frac{\rho(s_0)}{\pi} = \frac{\rho_0}{\pi}$. Согласно рекуррентной формуле (13),

$$\lim_{s \rightarrow s_0} F_{m+1} = \frac{2m}{(m+1)(2m+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\rho^2(s) + \rho_0^2 + (z(s) - z_0)^2 \right) F_m - \frac{1}{4m(m+1)(2m+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} \left((\rho(s) - \rho_0)^2 + (z(s) - z_0)^2 \right) \left((\rho(s) + \rho_0)^2 + (z(s) - z_0)^2 \right) F_{m-1}.$$

А так как второй предел, очевидно, равен нулю, то оказывается, что

$$\lim_{s \rightarrow s_0} F_{m+1} = \frac{4m\rho_0^2}{(m+1)(2m+1)^2} \lim_{s \rightarrow s_0} F_m, \quad (m \geq 1), \quad (18)$$

т.е. все функции F_m , кроме F_0 , имеют конечный предел при $s \rightarrow s_0$.

Исследуя аналогично функции R_m и используя формулу (14), можно получить, что

$$\lim_{s \rightarrow s_0} R_0 = \infty, \quad \lim_{s \rightarrow s_0} R_1 = \frac{n_\rho}{2\pi},$$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} R_{m+1} = \frac{4m\rho_0}{(m+1)(2m+1)^2} \left(\rho_0 \lim_{s \rightarrow s_0} R_m + n_\rho \lim_{s \rightarrow s_0} F_m \right) \quad (m \geq 1),$$

причём в окрестности точки $s = s_0$

$$R_0 = -\frac{1}{2\pi} \frac{n_\rho \rho'(s_0) + n_z z'(s_0)}{\rho(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))} (s - s_0)^{-1} + \left[\frac{n_\rho}{4\pi \rho^2(s_0)} \left(1 - \ln \frac{8\rho(s_0)}{\sqrt{\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0)}} + \ln(s - s_0) \right) + \frac{(n_\rho \rho'(s_0) + n_z z'(s_0)) \rho'(s_0) - (n_\rho \rho''(s_0) + n_z z''(s_0)) \rho(s_0)}{4\pi \rho^2(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))} + \frac{(n_\rho \rho'(s_0) + n_z z'(s_0))(\rho'(s_0) \rho''(s_0) + z'(s_0) z''(s_0))}{2\pi \rho(s_0)(\rho'^2(s_0) + z'^2(s_0))^2} \right] + O(s - s_0)$$

т.е. функция R_0 имеет в точке $s = s_0$ простой полюс и логарифмическую особенность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выражения (10) – (14) определяют все входящие в (5) функции. А это означает, что получены интегральные представления полигармонических функций, обладающих осевой симметрией, через значения вспомогательных функций u_j, v_j на границе меридионального сечения осесимметричной пространственной области. Эти представления, а также проведённое в данной работе исследование функций, входящих в (5), могут оказаться полезными при решении краевых задач для полигармонического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев А.Г. Компьютерное моделирование решений полигармонических уравнений // Механика: современное состояние, проблемы, перспективы. Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 2009. С. 174-185.
2. Смирнов В.В. Курс высшей математики. Т. II // М.:ГИТТЛ, 1957.

О ВОЗНИКНОВЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОЙ СТРУИ В ПЛОСКИЙ ВЕНТИЛИРУЕМЫЙ КАНАЛ

Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.

НИИ механики

Московского государственного университета им М.В. Ломоносова

prokof@imec.msu.ru

Проведено исследование условий возникновения автоколебательных режимов при истечении струи жидкости в плоский канал, с поддувом воздуха в заглушенную его часть с образованием воздушной подушки с повышенным давлением. Показано, что характеристики автоколебаний сильно зависят от объема каверны. При неизменном поддуве амплитуда автоколебаний падает с ростом объема каверны и при некотором пороговом значении автоколебания прекращаются. При больших поддувах воздуха возникает прерывистый (помпажный) режим течения, проведено подробное его изучение с помощью скоростной видеокамеры.

Проведенные ранее исследования плоского струйного течения с образованием искусственной вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации [1-2] ограничивались докритическими и околокритическими режимами струйного течения (критический режим соответствует теоретическому предельному течению с присоединением каверны к стенке). Ранее нами отмечалось [1], что при сверхкритическом поддуве может возникнуть существенно нестационарный автоколебательный режим течения.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.

Установка аналогична описанной в работе [2]. Все течение реализуется в зазоре между двумя прозрачными пластинами из оргстекла (расстояние между пластинами $h=5$ мм). На рис. 1 представлена схема установки (боковой вид).

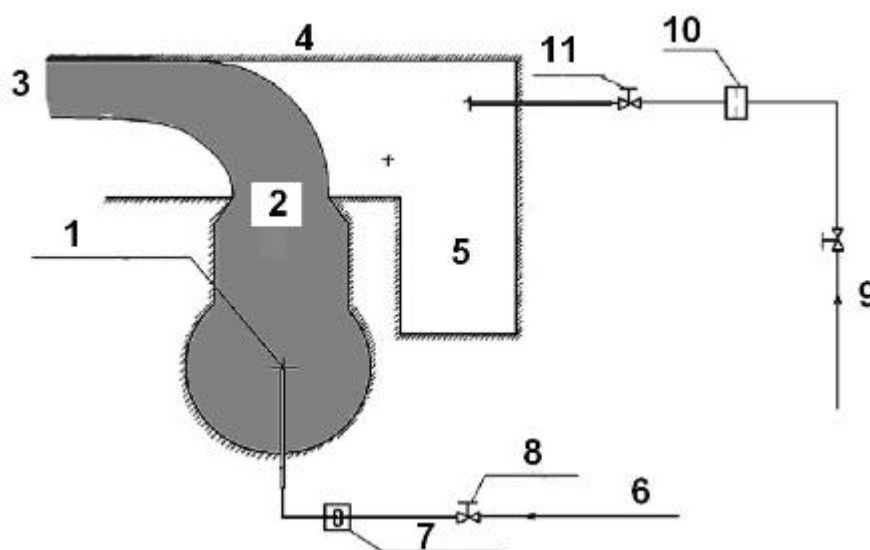


Рис. 1. Схема установки

Жидкость (водопроводная вода) из магистрали 6 подается в форкамеру 1, откуда через сходящееся сопло 2 шириной $D=25$ мм истекает в канал 3 шириной $H=50$ мм перпендикулярно его оси. Струя жидкости взаимодействует с твердой стенкой канала – экраном 4 и свободно истекает в атмосферу. Справа от сопла имеется тамбур 5, где при стационарном истечении струи формируется область повышенного давления. В отличие от экспериментов [2] в нашем случае тамбур имеет Г образную форму. Вертикальная часть Г образного тамбура заполнялась водой. Путем слива части объема воды оперативно (без изменения других параметров эксперимента) проводилось изменение объема заполненной газом полости. Подача воды в установку регулировалась вентилем 8, расход измерялся вертушечным датчиком расхода воды 7. Расход подаваемого в полость газа измерялся с помощью расходомерной шайбы 10. Подача газа регулировалась вентилем 11. Кроме того, проводилось измерение давления газа в полости 5 и полного давления воды (за эту величину принималось среднее за время эксперимента значение, измеряемое с помощью трубки полного давления на входе жидкости в форкамеру 1 из водопроводной магистрали 6).

Обозначим: $P_k = p_k - p_a, P_0 = p_0 - p_a$ (p_k, p_0, p_a - среднее давление в камере, давление напора воды и атмосферное давление, соответственно), Q_g объемный расход поддуваемого в полость газа (приведенный к давлению p_k по изотермической формуле), Q_l средний расход жидкости. Введем следующие параметры: коэффициент давления в камере $C_d = P_k / P$, коэффициент поддува газа в полость $C_q = Q_g / Q_l$. Газ в камеру подавался таким образом, что регулятор 11 находился в «запертом» состоянии, Тем самым обеспечивалось постоянство массового расхода газа в полость 5 и ее изоляция по давлению от подводящего трубопровода. Введем еще коэффициент $C_k = \Omega_k / D H h$, характеризующий объем газовой полости. Объем полости Ω_k ограничен стенками тамбура и поверхностью жидкости в вертикальной части тамбура. Этот объем включает также небольшой отрезок трубопровода до регулятора подачи воздуха 11. Неизвестная граница струи, при вычислении объема Ω_k заменяется окружностью радиуса H .

2. ЗАВИСИМОСТЬ СРЕДНИХ ПО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРОВ ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ПОДДУВА ГАЗА В ПОЛОСТЬ.

Величина относительного объема камеры C_k сохранялась постоянной (по условиям эксперимента колебалась в диапазоне 11 – 14). На рис. 2. представлена зависимость коэффициента среднего давления в камере C_d от коэффициента поддува воздуха в полость C_q при различных давлениях напора воды (на графиках указано избыточное давление P_0). Данные хорошо согласуются с теоретической величиной коэффициента давления ($C_d \approx 0,59$) при критическом ре-

жиме течения (для данной геометрии околокритическому режиму соответствует коэффициент поддува $C_q \approx 1$ [1]). видно, что коэффициент давления в основном определяется величиной коэффициента поддува газа в каверну и интенсивность роста C_d с увеличением C_q падает. На рис. 4 представлена зависимость коэффициента

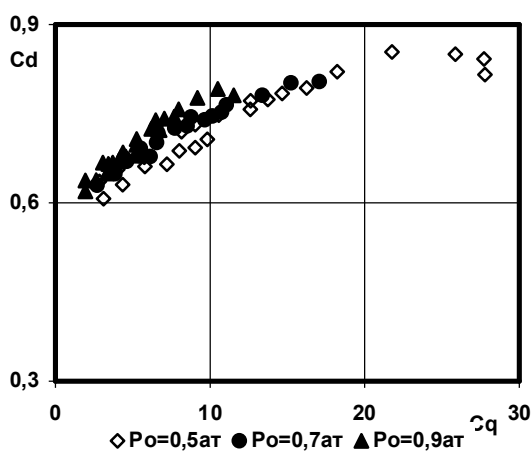


Рис. 2. Зависимость C_d от C_q

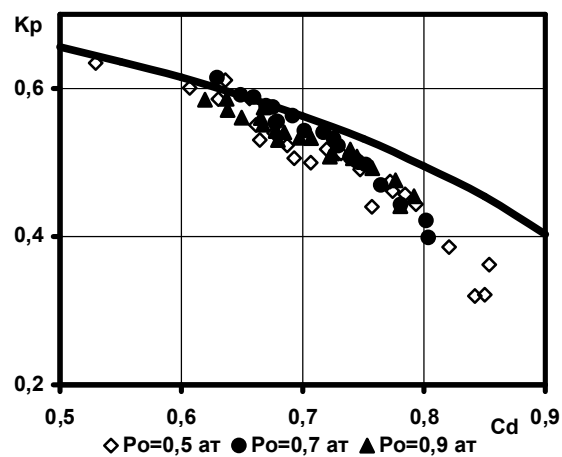


Рис. 3. Зависимость K_p от C_d

Расхода $K_p = Q_l / (DhV_\infty)$ ($V_\infty = \sqrt{2P_o/\rho}$) от коэффициента донного давления C_d . Самая левая экспериментальная точка измерена при отсутствии поддува газа в каверну (полость заполнена водой). Сплошная кривая соответствует теоретическому расчету стационарной плоской задачи. Видно, что до $C_d \approx 0,7$ экспериментальные точки лежат близко к теоретической кривой, при дальнейшем увеличении C_d расход жидкости падает быстрее, чем это следует из стационарной теории.

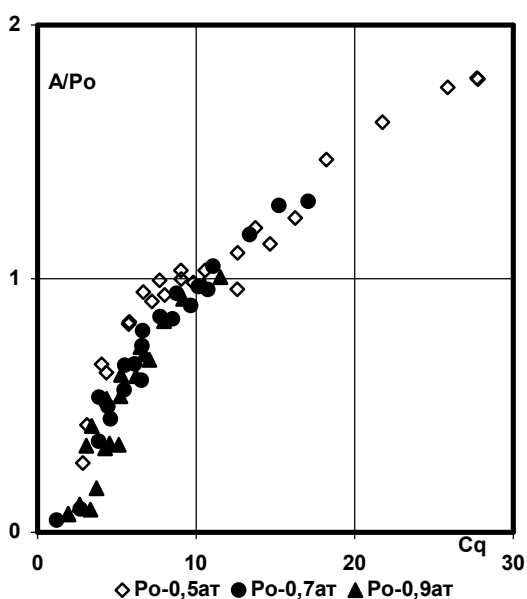


Рис. 4. Размах колебаний от C_q

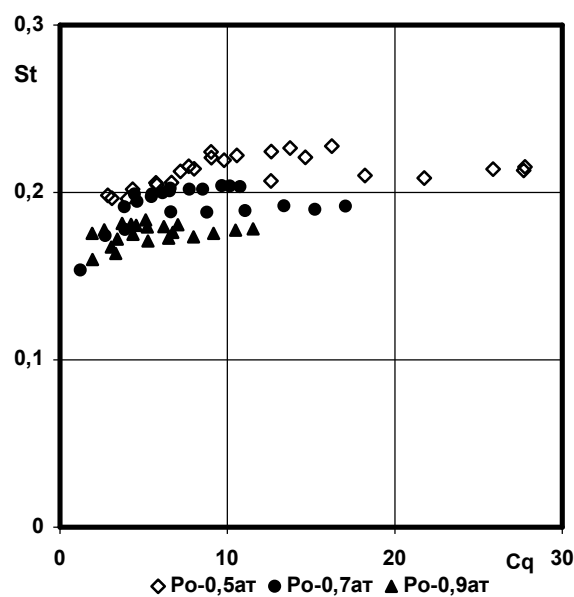


Рис. 5. Число Струхалия от C_q

На рис. 4 представлена зависимость размаха колебаний давления A отнесенного к P_0 от коэффициента поддува. Видно, что автоколебания начинаются при коэффициентах поддува больших некоторой величины C_q (в нашем случае ≈ 3) и далее монотонно растут. При $C_q \approx 10$ A/P_0 становится больше 1, здесь возникает ситуация, когда давление в каверне в некоторый момент становится больше среднего давления напора воды и возникают предпосылки к возникновению возвратного течения жидкости. Число Струхала $St = fH/V_\infty$ в том же диапазоне измерений (рис. 5) слабо зависит от коэффициента поддува газа (f частота автоколебаний). На рис. 5. заметна некоторая зависимость от давления напора. Этот масштабный эффект может быть связан с эффектом сжимаемости газа.

3. ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМА КАВЕРНЫ НА АВТОКОЛЕБАНИЯ.

Из данных рис. 4 видно, что автоколебания возникают при достижении коэффициентом поддува некоторой пороговой величины C_q . Оказалось, что эта пороговая величина зависит от объема каверны (от C_k). Для исследования влияния этой величины были изготовлены две модели с изменяемым объемом полости. Коэффициент C_k изменялся на первой модели в диапазоне 8 – 22, а на второй 22 – 110. На рис. 6 показана зависимость интенсивности пульсаций давления в полости (в терминах относительного размаха пульсаций A/P_0) от величины коэффициента объема полости C_k при постоянных значениях коэффициента поддува C_q . Видно довольно сильное падение интенсивности пульсаций с увеличением объема полости, причем наклон уменьшается с ростом C_q . Пороговое значение C_k сильно зависит от величины поддува газа. Пульсации давления в полости интенсивно растут с уменьшением C_k .

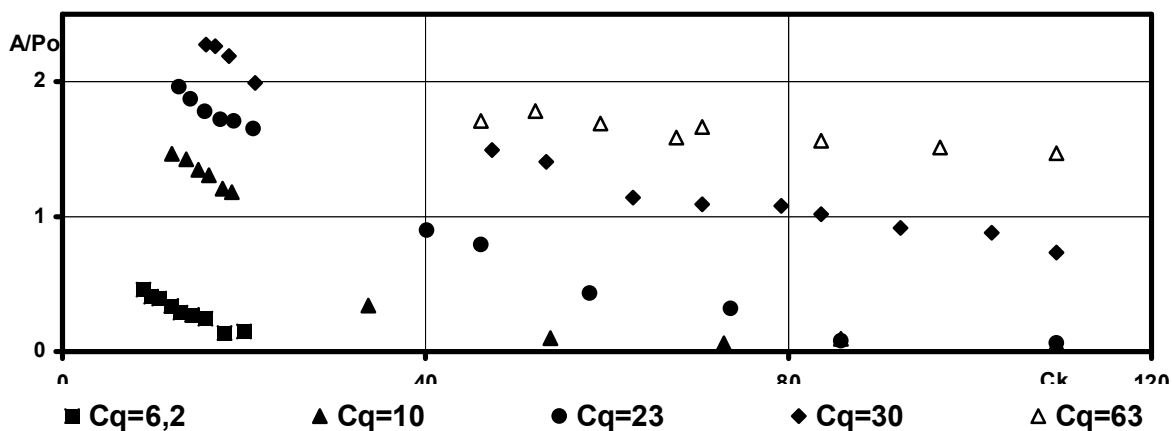


Рис. 6. Зависимость относительного размаха колебаний давления от C_k .

Приведенные на рис. 7 амплитудные спектры (a - размерные (at) коэффициенты разложения Фурье) показывают существование в автоколебательном режиме одной частоты, слабо возрастающей (в исследованном диапазоне изменения C_k) с уменьшением объема каверны. Однако при $C_k > 60$ автоколебания исчезают - амплитуда колебаний падает на порядок - в области низких частот появляется некоторая шумовая часть и появляется высокочастотная составляющая.

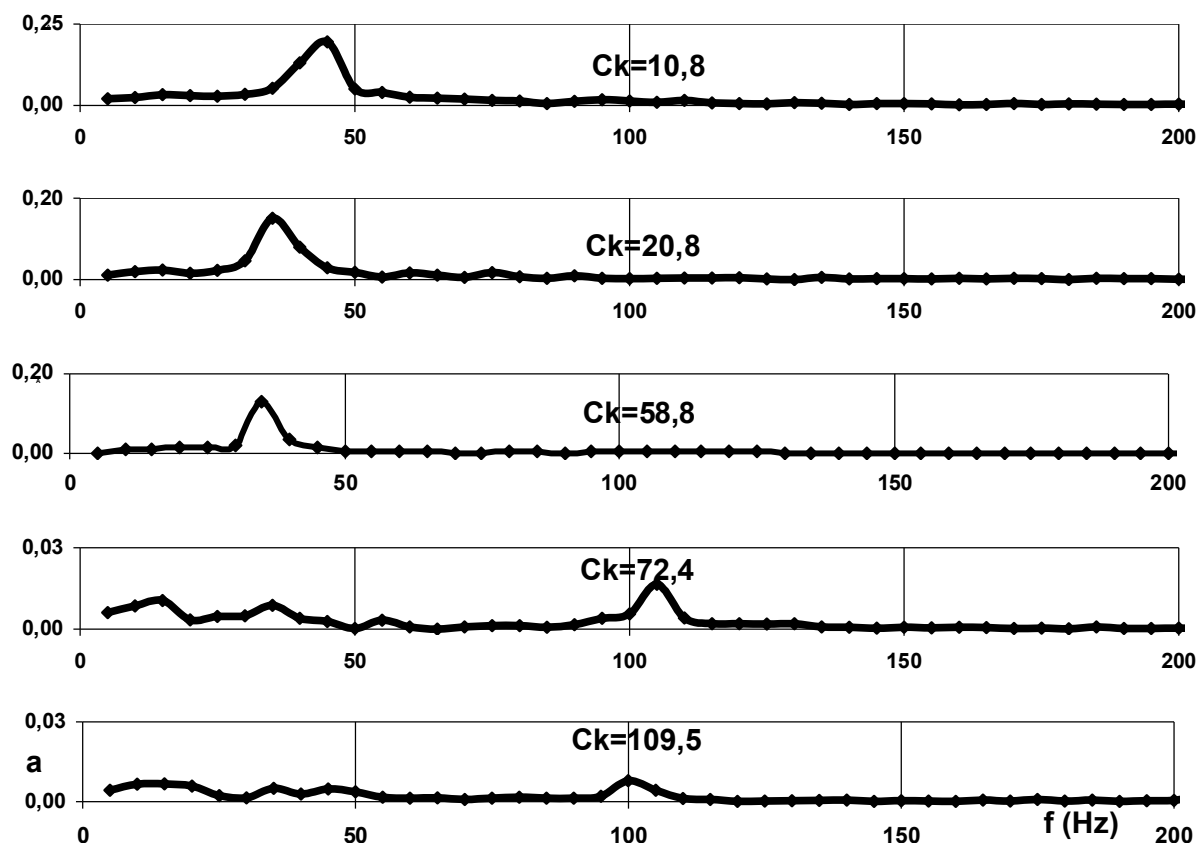


Рис. 7. Амплитудные спектры осциллограмм давления в каверне при $P_0 = 0,5 at$, $C_q \approx 23$ и при различных C_k .

На рис. 8-9 показано, что с ростом C_q при постоянном C_k не только растет интенсивность пульсаций давления в каверне (см. рис. 4), но и происходит качественное изменение осциллограмм давления. Данные приведены для последовательности возрастающих поддувов при $P_0 = 0,2 at$ (на графиках указаны также значения относительного объема каверны). Видно, что с увеличением коэффициента поддува основная частота колебаний давления остается неизменной, однако в спектре появляются кратные гармоники и при больших поддувах ряд Фурье представляет убывающую по амплитуде сумму кратных основной частоте гармоник.

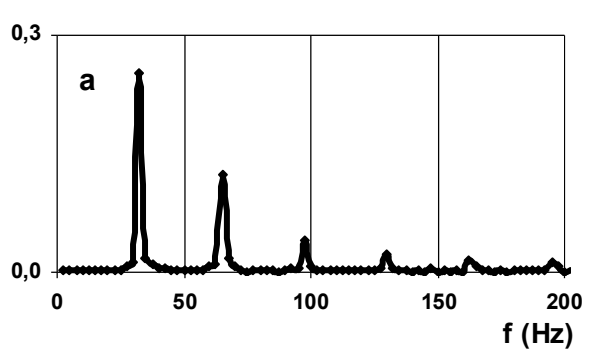
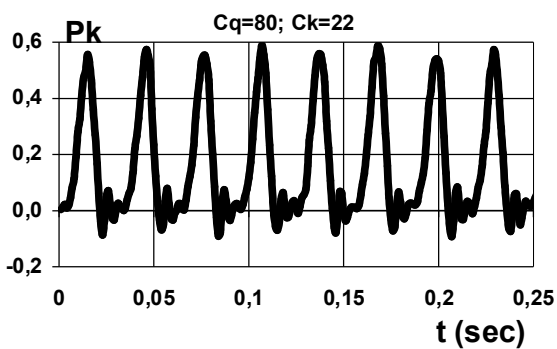
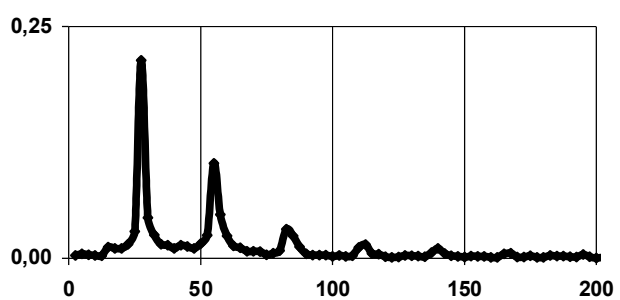
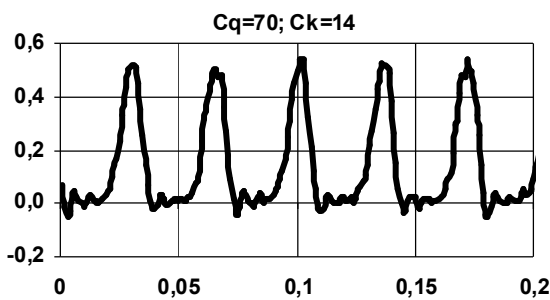
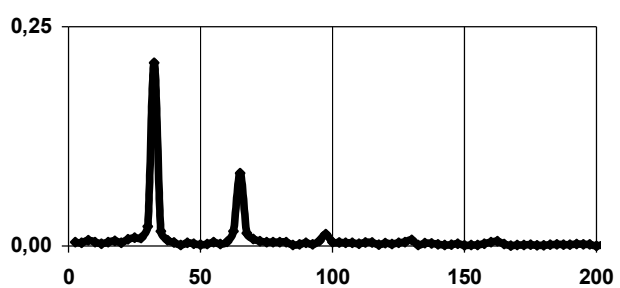
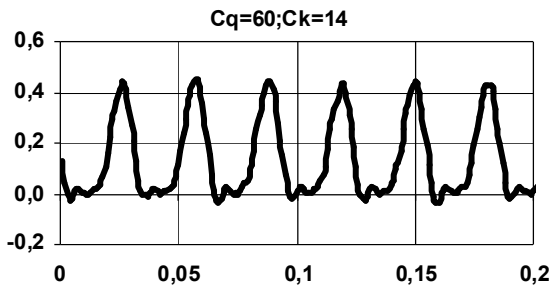
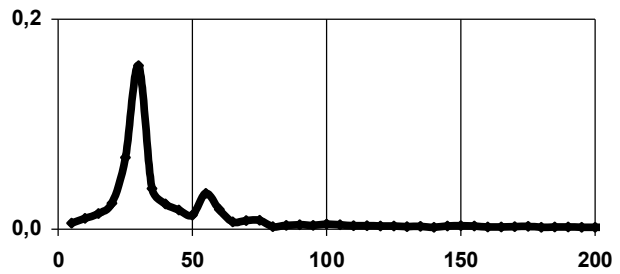
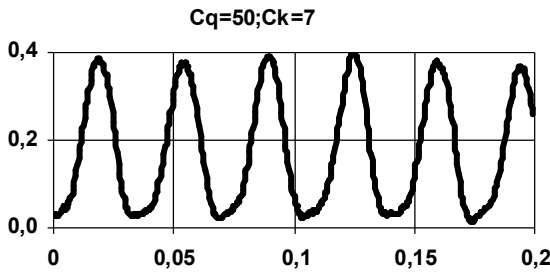
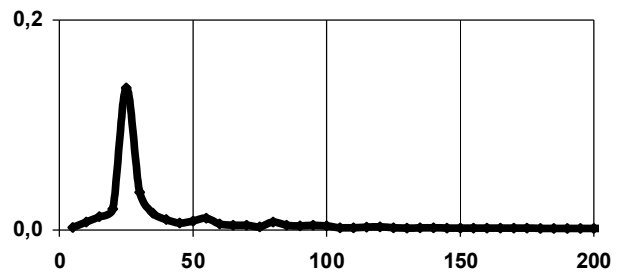
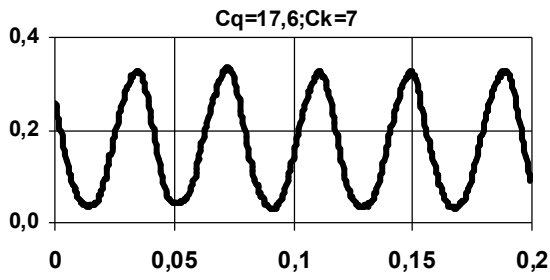


Рис. 8. Осциллограммы давления в камере

Рис. 9. Соответствующие спектры

4. ВИЗУАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ.

Наряду с измерением пульсаций давления проводилась скоростная видеосъемка картины течения камерой Visario-1500 со скоростью 4000 кадр/с с экспозицией 200 мкс. С помощью этой съемки проведено изучение процесса возникновения автоколебательных режимов, а при дальнейшем увеличении поддува - перехода от колебательного режима (струя совершает колебания около своих стационарных границ) к прерывистому (помпажному) режиму. Проиллюстрируем помпажный режим на примере анализа течения, соответствующего параметрам нижнего графика на рис. 8-9. На рис. 10 представлена последовательность кадров с интервалом $1/400$ с (каждый 10-й кадр) для одного периода автоколебаний. Параметры течения: $C_q \approx 80, C_k = 22,4, P_0 = 0,2 \text{ at}$. Первый кадр соответствует моменту, когда жидкость предыдущего периода выброшена из канала и уже началась фаза истечения новой порции жидкости из сопла. Начиная со второго кадра жидкость покидает канал, в результате взаимодействия с движущимся в канале воздухом на поверхности жидкости образуется характерный султан.

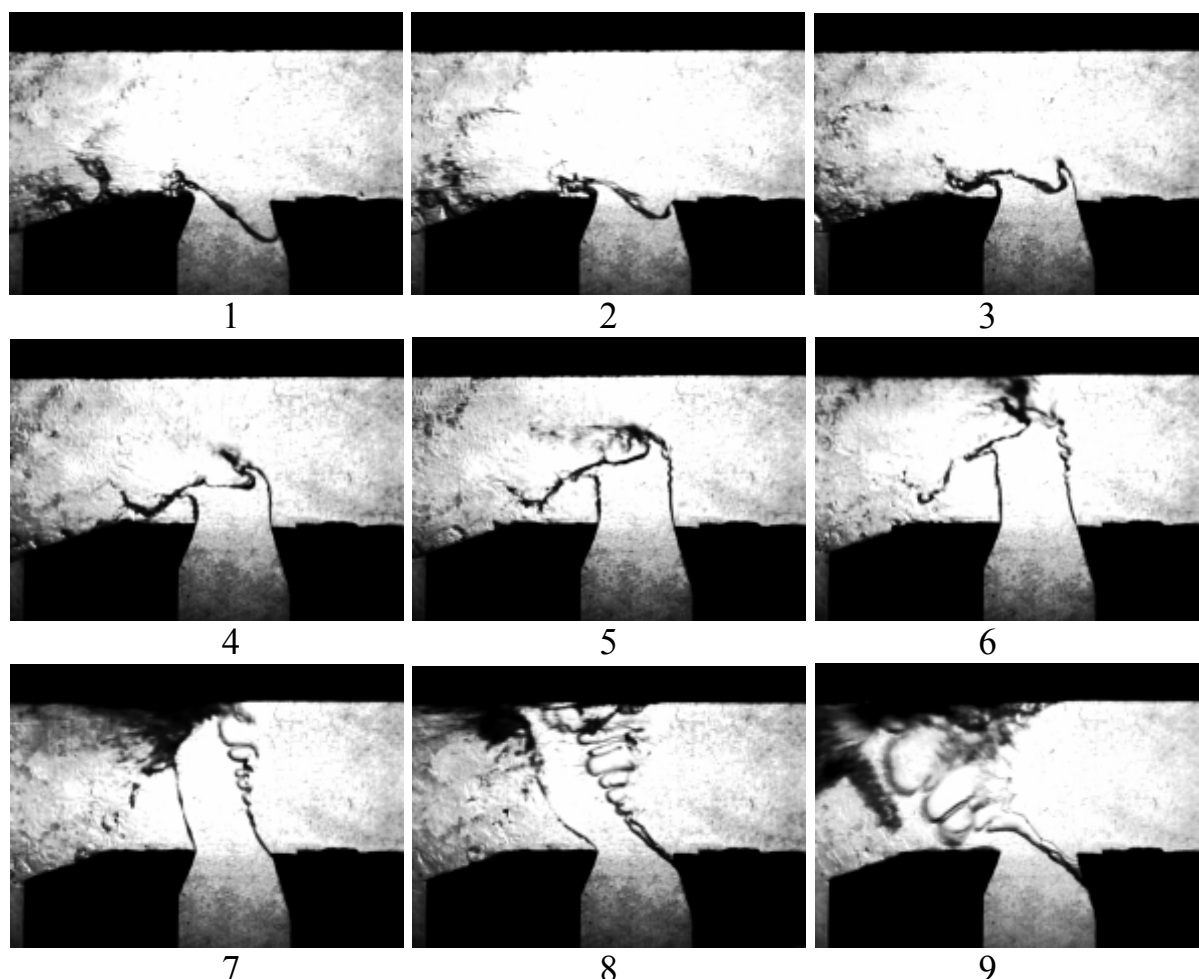


Рис. 10. Кинограмма одного периода развитого помпажного режима течения

Начиная с 5-го кадра на границе струи появляются волновые структуры, связанные с ускоренным движением границы раздела жидкость – газ. На 7 кадре виден удар струи о стенку канала, одновременно на правой границе струи

формируется мощная волновая структура – самый крупный пузырь на правой границе образовавшейся в канале жидкой пробки (перемычки) формируется вблизи стенки - экрана. Примерно в то же время начинается отрыв жидкости от правой кромки сопла. Поступление жидкости из сопла в канал заметно уменьшается. На следующем кадре виден значительный сдвиг образовавшейся жидкой пробки влево, Релей-Тейлоровские структуры интенсивно развиваются, крупные пузыри – пальцы проникают внутрь жидкости.

На последнем 9 кадре эти пузыри достигают противоположной границы жидкой пробки. В результате пересечения Р-Т структурами жидкой пробки она превращается в двухфазную смесь, которая выбрасывается из канала потоком газа. Затем процесс повторяется, причем с точностью до деталей (образование струй, крупных пузырей и т.п.). На рис. 11 показано сопоставление результатов обработки видеоряда с осциллограммой. Верхний график – осциллограмма безразмерного избыточного давления в каверне P/P_0 , ниже - график изменения поперечной (X/D) координаты головы истекающей из сопла жидкой струи от времени, внизу график изменения продольной (Y/D) координаты головы лидирующего пузыря - пальца. Начало координат совпадает с правой кромкой сопла, характерный размер – ширина канала, время отнесено к характерной величине - H/V_∞ .

На осциллограмме квадратами отмечены точки, соответствующие началу истечения струи из сопла; треугольниками моменты удара струи о противоположную соплу стенку - экран; кружками моменты достижения головными частями лидирующих пузырей - пальцев внешней границы жидкой пробки. Из сравнения графиков можно констатировать следующий сценарий: струя начинает истекать из сопла при падении давления в канале примерно до атмосферного, давление в каверне начинает расти при приближении головы струи к экрану (происходит перекрытие канала истечения воздуха из каверны). Жидкость начинает ускоренно двигаться, на границе раздела начинается развитие Р-Т волновых структур, при давлении в полости большем давления напора струи истечение жидкости из сопла прекращается - максимальное давление в полости значительно больше среднего давления напора (см. рис. 8).

В момент, когда лидирующий пузырь достигает противоположной границы водяной пробки, начинается «продувка» канала – давление падает до величины порядка атмосферного. В процессе «продувки» из канала выбрасывается двухфазная смесь, давление в полости падает и начинается истечение струи из сопла. Период колебаний в рассмотренном случае равен примерно 4.

Графики рис. 11. показывают, что струя жидкости заполняет канал с примерно постоянной скоростью. Причем эта скорость примерно в 2 раза меньше стационарной скорости истечения V_∞ . Это может быть объяснением снижения коэффициента расхода жидкости по сравнению со стационарным решением (см. рис. 3).

Из представленных на рис. 11 графиков движения лидирующих пузырей видна их весьма строгая периодичность (как и всего процесса). Видно также, что скорость лидирующего пузыря увеличивается в процессе выбрасывания

жидкой пробки из канала и в конце процесса, при приближении пузыря к внешней границе пробки достигает величины, примерно равной $3,5V_{\infty}$.

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 09-08-00211, 10-01-00392.

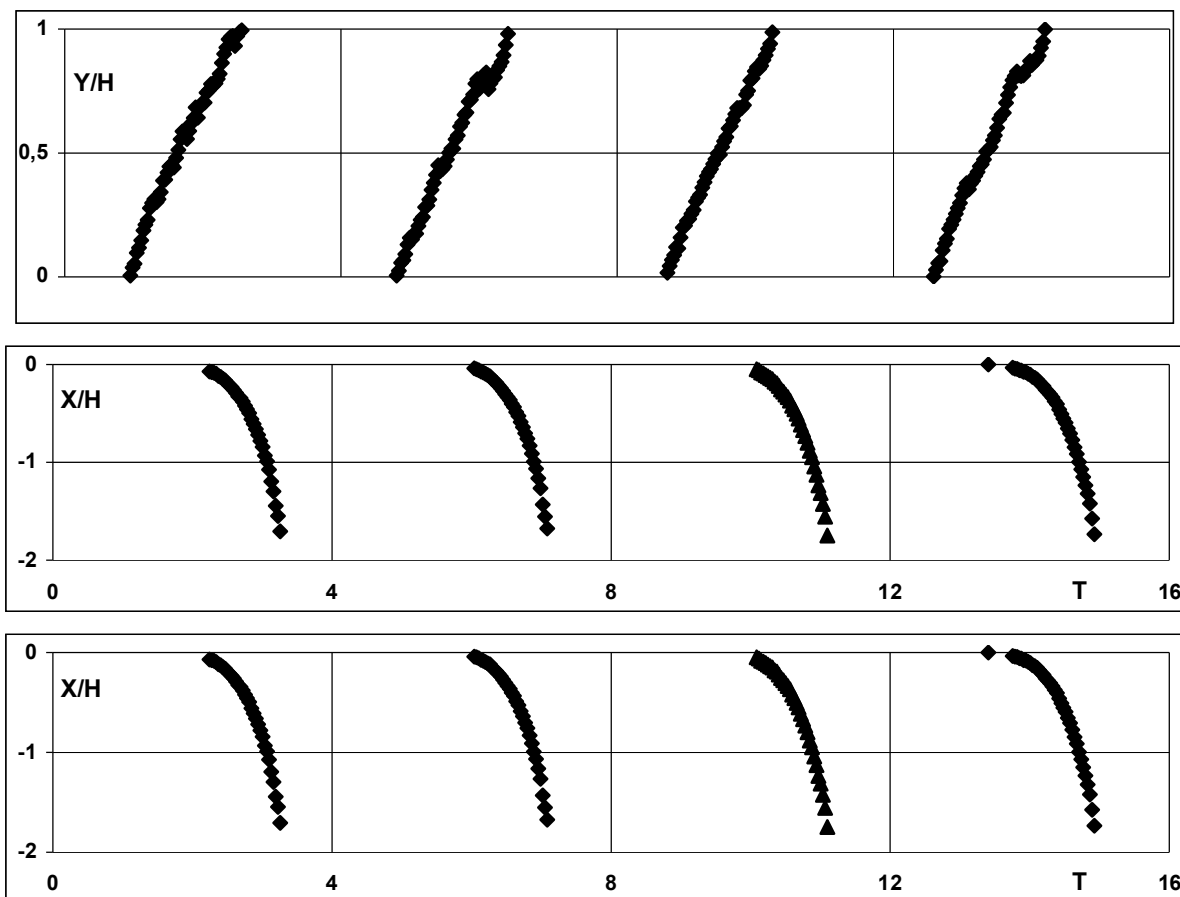


Рис. 11. Сопоставление осциллограммы с результатом обработки видео

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов И.И., Прокофьев В.В. Унос газа из вентилируемой каверны с отрицательным числом кавитации. Изв. РАН, МЖГ, №4, 2001, сс. 92-106.
2. Козлов И.И., Прокофьев В.В., Пучков А.А. «Исследование развития волновых структур на неустойчивой границе каверны с помощью скоростной видеокамеры» Изв. РАН, МЖГ, №2, 2008, с. 137-148.

ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ГАЗЕ ЧАПЛЫГИНА

Котляр Е.М., Маклаков Д.В.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Kem-vgik@mail.ru; Dmitri.Maklakov@ksu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из методов учета сжимаемости базируется на уравнениях газовой динамики, записанных в плоскости годографа скорости - уравнениях Чаплыгина [1]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\bar{\rho}\lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где φ - потенциал течения, ψ - функция тока, λ , ϑ - модуль и угол наклона вектора приведенной скорости (скорости, отнесенной к критической скорости звука a_*), $\bar{\rho}$ - безразмерная плотность, отнесенная к плотности ρ_0 в точке торможения потока. При этом, если λ_x и λ_y - компоненты вектора $\vec{\lambda}$, то

$$\lambda_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \lambda_x = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \lambda_y = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

С. А. Чаплыгин [1] предложил два метода решения системы (1.1): точный и приближенный. Точный метод может быть применен к достаточно широкому классу задач о течениях сжимаемой жидкости, ограниченных свободными поверхностями и полигональными твердыми стенками. Обзор работ, выполненных в этом направлении, можно найти в монографиях [2, 3].

Приближенный метод Чаплыгина применим, как при решении прямых, так и при решении обратных задач теории аэропрофилей. Решение и условия разрешимости обратной задачи в приближении газа Чаплыгина дано Г.Г. Тумашевым [4, 5] (см. также [6]), Вудсом [7, п. 6].

Прямые задачи, когда форма профиля задается, являются более сложными, чем обратные. Здесь явного аналитического представления решения получить не удастся и строится либо приближенное решение [8], либо предлагается итерационная процедура, сходимость которой исследовать весьма затруднительно. В частности, такая процедура предложена в [9], но авторы ограничились расчетом только симметричного профиля NASA0012.

В данной работе, используя приближенный метод Чаплыгина, мы сводим решение задачи об обтекании произвольного профиля дозвуковым потоком газа к нелинейному уравнению типа уравнения Вилла [2]. После дискретизации это уравнение решается методом Ньютона. Численные эксперименты показали, что метод сходится для профилей любой формы всего за несколько итераций. Полученные распределения скоростей сравнивались с распределениями, найденными в CFD пакете Fluent, а также с хорошо известной формулой Кармана-Цзяня [8]. Установлено, что в дозвуковом диапазоне все три подхода дают весьма близкие результаты.

2. МОДЕЛЬ ГАЗА ЧАПЛЫГИНА

Приближенный метод С. А. Чаплыгина состоит в аппроксимации адиабатической зависимости

$$\bar{p} = \bar{\rho}^\kappa, \quad (2.1)$$

в плоскости $(1/\bar{\rho}, \bar{p})$ прямой линией: вместо (2.1) используется уравнение

$$\bar{p} = -\frac{A}{\bar{\rho}} + B, \quad (2.2)$$

где κ - показатель адиабаты (для воздуха $\kappa = 1,4$), $\bar{p} = p/p_0$ и $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ - безразмерные давление и плотность, отнесенные к давлению p_0 и плотности ρ_0 , соответственно, в точке торможения потока, $A > 0$ и B - постоянные. Газ, в котором связь между давлением и плотностью задается уравнением (2.1), называют газом Чаплыгина.

Уравнение Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (2.3)$$

с учетом равенств

$$a_0^2 = \frac{\kappa p_0}{\rho_0}, \quad \frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (2.4)$$

(a_0 - скорость звука в точке торможения) приводится к виду

$$\lambda^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \int_1^{\bar{\rho}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{\rho}} d\bar{\rho} = 0. \quad (2.5)$$

Подставив (2.2) в (2.5), после интегрирования получим

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}, \quad \text{где } c^2 = \frac{\kappa}{2A(\kappa + 1)} > 0, \quad (2.6)$$

причем результат интегрирования не зависит от величины параметра B . Если теперь подставить (2.6) в систему (1.1) и сделать замену

$$\lambda(S) = \frac{\exp(S)}{1 - c^2 \exp(2S)}, \quad (2.7)$$

то вместо (1.1) получим условия Коши-Римана

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{S}} = \frac{\partial \psi}{\partial S}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial S} = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{S}}. \quad (2.8)$$

При этом комплексный потенциал $w = \phi + i\psi$ будет аналитической функцией переменной $\chi = S - i\mathcal{S}$. Переход в физическую плоскость осуществляется по формуле

$$dz = \exp(-\chi)dw - c^2 \overline{\exp(\chi)dw} \quad (2.9)$$

(черта означает комплексное сопряжение), которая вытекает из соотношения

$$dz = \left(\frac{d\phi}{\lambda} + i \frac{d\psi}{\bar{\rho}\lambda} \right) e^{i\mathcal{S}}. \quad (2.10)$$

Введем новую комплексную переменную $z_1 = x_1 + iy_1$, связанную с w и χ соотношением $dz_1 = \exp(-\chi)dw$. Область изменения этой переменной называют областью фиктивного течения несжимаемой жидкости. Тогда $dw/dz_1 = \exp \chi$ -

комплексно-сопряженная скорость фиктивного течения, $\Lambda = \exp S$ - модуль этой скорости. Из формул (2.6) и (2.7) найдем

$$\lambda = \frac{\Lambda}{1 - c^2 \Lambda}, \quad \Lambda = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda^2}}, \quad \bar{\rho} = \frac{1 - c^2 \Lambda^2}{1 + c^2 \Lambda^2}. \quad (2.11)$$

Предположим теперь, что каким-то способом построена область течения несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности

$$\Lambda_\infty = \frac{2\lambda_\infty}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}} \quad (2.12)$$

и найден комплексный потенциал w течения в этой области. Тогда с помощью формулы (2.9) можно найти соответствующую область течения газа Чаплыгина и по первой и третьей из формул (2.11) построить поля скоростей и плотностей для этого газа. Наклон вектора скорости к вещественной оси, задаваемый углом ϑ , в обоих потоках одинаков.

Выбор угла наклона прямой (2.2) или, что равнозначно, параметра c^2 можно осуществлять различными способами (см., например, [10, с. 61]). С. А. Чаплыгин заменял адиабатическую зависимость $\bar{p} = \bar{p}(1/\bar{p})$ касательной прямой, проведенной в точке $\bar{p} = 1, \bar{p} = 1$ торможения потока. В этом случае $A = \kappa$ и $c^2 = 1/[2(\kappa + 1)]$. Параметр c^2 можно выбирать из условия наилучшей аппроксимации адиабатической зависимости

$$\bar{p} = \left[1 - \frac{\lambda^2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{1/(\kappa - 1)} \quad (2.13)$$

между приведенной скоростью λ и безразмерной плотностью \bar{p} приближенной зависимостью (2.6). При таком выборе существенен диапазон изменения скоростей λ . В частности, Г. Ю. Степанов (см. [11, п.24]) предложил универсальное значение $c^2 = 0,296$. Расчеты показали, что при этом относительная погрешность формулы (2.6) по отношению к (2.13) в диапазоне $0 < \lambda < 0,89$ составляет всего 2,3%. Если положить $c = 0$, то получится модель идеальной несжимаемой жидкости.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СВЕДЕНИЕ ЕЕ

К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ТИПА УРАВНЕНИЯ ВИЛЛА

Профиль обтекается дозвуковым потоком газа в плоскости $z = x + iy$. На бесконечности заданы скорость V_∞ , давление p_∞ , плотность ρ_∞ и угол наклона вектора скорости (угол атаки) α_a (рис. 1).

Определим число Маха M_∞ на бесконечности. Для адиабатического течения квадрат скорости звука $a_\infty^2 = \kappa p_\infty / \rho_\infty$. Отсюда найдем

$$M_\infty^2 = \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{p_\infty} \quad (3.1)$$

При заданных V_∞ , p_∞ и ρ_∞ критическая скорость звука a_* является физической константой, которую легко найти по известному числу Маха M_∞ . Из адиабатического соотношения находим

$$\lambda_\infty = M_\infty \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1)M_\infty^2}} \quad (3.2)$$

и отсюда определяем $a_* = V_\infty / \lambda_\infty$.

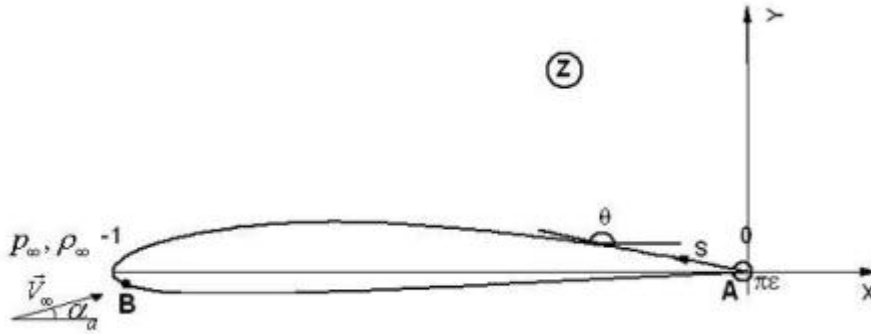


Рис.1. Течение в физической плоскости (профиль NACA 2411).

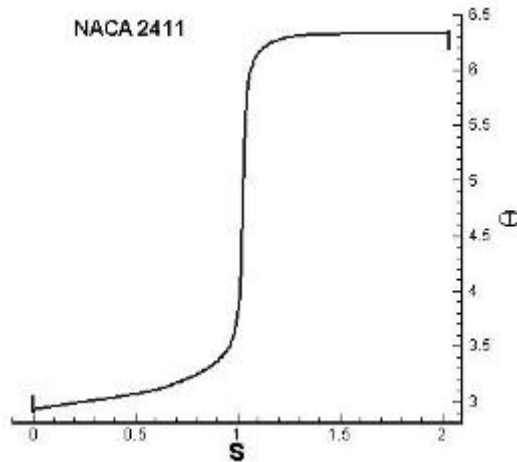


Рис.2. Функция $\theta = F(s)$ для профиля NACA 2411.

Форма профиля задана уравнением

$$\theta = F(s), \quad 0 \leq s \leq L, \quad (3.3)$$

где θ - угол наклона касательной к профилю, s - дуговая координата, отсчитываемая от острой кромки A против часовой стрелки, L - периметр профиля (рис. 2). Точка B является точкой торможения потока, $\varepsilon\pi$ - внешний по отношению к профилю угол в острой кромке A ($1 < \varepsilon \leq 2$). На рис. 2 показана функция $\theta = F(s)$ для профиля NACA 2411. Отметим, что резкие изменения угла наклона касательной θ вблизи острой кромки, видимые на рис.2, для этого профиля действительно имеют место.

Перейдем в область фиктивного течения несжимаемой жидкости $z_1 = x_1 + iy_1$. Пусть $\vec{\Lambda}$ - вектор фиктивной скорости, а w - комплексный потенциал в этой области. Тогда $\frac{dw}{dz_1} = \Lambda e^{-i\theta}$ - комплексно-сопряженная скорость фиктивного течения. Для нахождения поля приведенных скоростей в газе Чаплыгина будем использовать формулы (2.11), где параметр c^2 выберем равным универсальному значению Γ . Ю. Степанова: $c^2 = 0,296$.

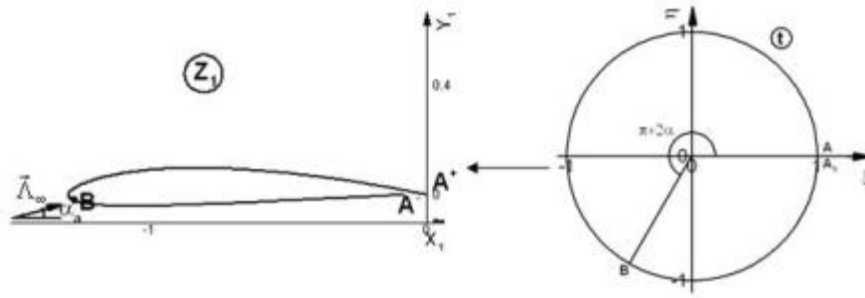


Рис. 3. Область фиктивного течения и каноническая область.

В плоскости фиктивного течения профиль будет разомкнутым: точке A в плоскости z_1 соответствуют две точки A^+ и A^- , с которых сходят две конгруэнтные линии тока, простирающиеся до бесконечности (как в схеме Ву [2]). Связь между дифференциалами dz и dz_1 вдоль линий тока в плоскостях z и z_1 дается формулой [13, стр.25]

$$dz = (1 - c^2 \Lambda^2) dz_1. \quad (3.4)$$

Будем искать конформное отображение внешности единичной окружности в параметрической плоскости $t = \xi + i\eta$ на внешность профиля $z_1 = z_1(t)$ с условиями $z_1(\infty) = \infty, z_1(1) = 0$ (рис. 3).

Пусть

$$\frac{dz_1}{dt} = U_0 \left(\frac{t-1}{t} \right)^{\varepsilon-1} e^{-\Phi(t)}, \quad (3.5)$$

где $\Phi(t)$ - аналитическая функция, не имеющая особенностей в канонической области, $U_0 = \left| \frac{dz_1}{dt}(\infty) \right|$ - постоянная, имеющая размерность длины.

На границе канонической области введем обозначения

$$\Phi(e^{i\gamma}) = \mu(\gamma) + i\tau(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \quad (3.6)$$

где γ - полярный угол. В предлагаемом методе искомой функцией является функция $\tau(\gamma)$, для определения которой мы выведем нелинейное интегральное уравнение. Если предположить, что $\tau(\gamma)$ - известна, то тогда известна реальная часть аналитической функции $-i\Phi(e^{i\gamma}) = \tau(\gamma) - i\mu(\gamma)$. Последнюю можно восстановить с помощью формулы Шварца, а затем найти и

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + t}{e^{i\gamma} - t} d\gamma, \quad (3.7)$$

причем здесь учтено, что $U_0 = \left| \frac{dz}{dt}(\infty) \right|$, и, следовательно, $\text{Re} \Phi(\infty)$. Из (3.7) найдем, что связь между функциями $\tau(\gamma)$ и $\mu(\gamma)$ дается интегралом Гильберта :

$$\mu(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) \text{Ctg} \frac{\gamma - \sigma}{2} d\gamma. \quad (3.8)$$

Теперь определим, как через функцию $\tau(\gamma)$ выражаются функции $\theta(\gamma)$ и $s(\gamma)$. Если в выражении (3.5) перейти на границу канонической области, то, с учетом того, что

$$\frac{dz_1}{d\gamma} = \frac{dz_1}{dt} \frac{dt}{d\gamma} = \frac{dz_1}{dt} i e^{i\gamma},$$

получим

$$\frac{dz_1}{d\gamma} = U_0 \left(2 \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \right)^{\varepsilon-1} e^{i(\pi/2-\gamma/2)(\varepsilon-1)} e^{i(\pi/2+\gamma)} e^{-\mu(\gamma)-i\tau(\gamma)}. \quad (3.9)$$

Отсюда выводим

$$\theta = \arg \frac{dz_1}{d\gamma} = \varepsilon \frac{\pi}{2} + \gamma \left(\frac{3-\varepsilon}{2} \right) - \tau(\gamma) \quad (3.10)$$

Комплексный потенциал в канонической области имеет вид

$$w(t) = \varphi_0 \left(e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha}}{t} + 2i \operatorname{Sin} \alpha \ln t \right),$$

где α - теоретический угол атаки (угол атаки относительно линии нулевой подъемной силы), φ_0 - постоянная, имеющая размерность потенциала скорости.

Тогда

$$\frac{dw}{dt} = \varphi_0 e^{-i\alpha} \frac{t-1}{t^2} \left(t - e^{i(\pi+2\alpha)} \right), \quad (3.11)$$

Найдем φ_0 и α_a . Для этого запишем равенство $\frac{dw}{dz_1} = \frac{dw/dt}{dz_1/dt} = \Lambda e^{-i\theta}$ на бес-

конечности, в выражениях (3.5), (3.7), (3.11) также перейдем на бесконечность, в результате получим

$$\varphi_0 = \Lambda_\infty U_0, \quad (3.12)$$

$$\alpha_a = \alpha - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) d\gamma. \quad (3.13)$$

При переходе на границу канонической области выражение (3.11) принимает вид

$$\frac{dw}{dt}(e^{i\gamma}) = -4\varphi_0 i e^{-i\gamma} \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (3.14)$$

Воспользуемся тем, что $\Lambda(\gamma) = \left| \frac{dw}{dz_1} \right| = \left| \frac{dw/dt}{dz_1/dt} \right|$, тогда, учитывая соотношения

(3.5), (3.12) и (3.14), получаем

$$\Lambda(\gamma) = 2\Lambda_\infty \left(2 \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \right)^{2-\varepsilon} e^{\mu(\gamma)} \left| \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) \right|. \quad (3.15)$$

Из выражения (3.4) следует, что

$$s = U_0 \left[\int_0^\sigma \left(2 \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \int_0^\sigma \left(2 \operatorname{Sin} \frac{\gamma}{2} \right)^{3-\varepsilon} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right] \quad (3.16)$$

Подставив (3.10) и (3.16) в основное уравнение (3.3), задающее форму профиля, найдем нелинейное краевое условие, которое должно выполняться для аналитической функции $\Phi(t)$ на параметрической окружности:

$$\varepsilon \frac{\pi}{2} + \gamma \left(\frac{3-\varepsilon}{2} \right) - \tau(\gamma) = F \left[U_0 \left[\int_0^{\sigma} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - 4c^2 \Lambda_{\infty}^2 \int_0^{\sigma} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{3-\varepsilon} \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \alpha \right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right] \right] \quad (3.17)$$

Учитывая, что периметр данного профиля известен и равен L , для определения U_0 выводим условие

$$L = U_0 \left[\int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - 4c^2 \Lambda_{\infty}^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{3-\varepsilon} \cos^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \alpha \right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right] \quad (3.18).$$

Краевое условие (3.17) превращается в нелинейное интегральное уравнение типа уравнения Вилла [2], если учесть, что связь между функциями $\tau(\gamma)$ и $\mu(\gamma)$ дается линейным сингулярным оператором (3.8) с ядром Гильберта. Тогда (3.18) – нелинейное функциональное соотношение для определения параметра U_0 . Кроме того, мы имеем интегральное соотношение (3.13) для отыскания теоретического угла атаки α . Таким образом, задача сводится к решению системы (3.8), (3.13), (3.17), (3.18) относительно функции $\tau(\gamma)$ и параметров U_0 , α . После дискретизации данная система решалась численно методом Ньютона, при этом применялся метод дискретизации, предложенный в [13] для расчетов кавитационного обтекания профилей.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛОВЫХ РАСЧЁТОВ

На рис.4 показаны распределения приведенных скоростей λ по профилю NASA 2411, рассчитанные при различных числах Маха на бесконечности и различных углах атаки α_a .

Расчеты были проведены по модели газа Чаплыгина (сплошные линии), с помощью CFD пакета FLUENT (пунктирная линия) и по формуле Кармана-Дзяня (штриховая линия). Из приведенных графиков видно, что в дозвуковом диапазоне все три подхода дают очень близкие распределения. Отличия наблюдаются лишь для критических значений чисел Маха на бесконечности. Совершенно аналогичные результаты были получены для профилей NASA 0012 и CLARK_K

Отметим, что формула Кармана-Дзяня также выводится в предположениях газа Чаплыгина, однако при ее выводе не учитываются различия между формой профилей в фиктивном потоке и в физической плоскости. Наши численные эксперименты показывают, что для реальных профилей эти различия крайне незначительны, поэтому неудивительно, что формула Кармана-Дзяня дает результат близкий к полной модели газа Чаплыгина.

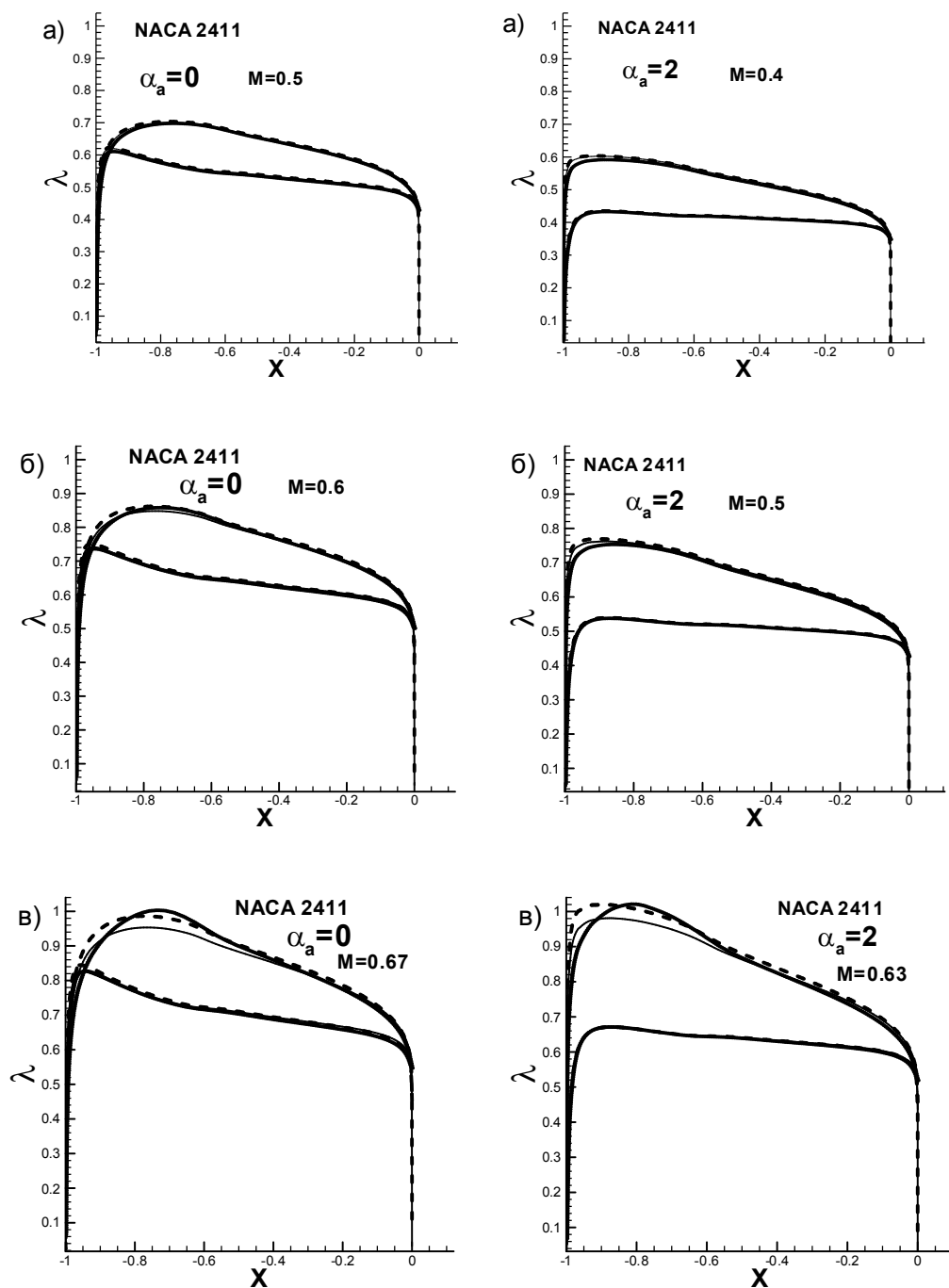


Рис.4. Распределения приведенной скорости по профилю NACA 2411

Укажем также, что расчет во FFLUENT на уже построенной сетке одного распределения приведенной скорости занимает около трех минут, в то время как расчет по полной модели газа Чаплыгина и по формуле Кармана-Цзяня занимает не более трех секунд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях // Полн. собр. соч. – Л.: АН СССР, 1933. – Т. 2. – С. 3-90.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536с.
3. Сунгурцев Ю. В. Плоские струйные течения газа. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989. – 256 с.
4. Тумашев Г. Г. Нахождение формы профиля по заданному распределению скорости с учетом сжимаемости жидкости // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. – 1945. – Т. 13. – Сер. 2. – С. 127-132.
5. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112. - № 3. – С. 3-41.
6. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
7. Woods L. C. The theory of subsonic plane flow. – Cambridge. Univ. Press, 1961. – 594 pp.
8. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
9. Prabir K. Daripa, Lawrence Sirovich. Exact and approximate gas dynamics using the tangent gas // Journal of computational physics, 1986. – v. 62, 400-413 pp.
10. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. – М.: Физматлит, 1994. – 436 с.
11. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
12. Елизаров А. М., Касимов А. Р., Маклаков Д.В. Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике – М.: Физматлит, 2008. – С. 18-29.
13. Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. М.: Янус-К, 1997, 281 с

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО ПРИ ОБТЕКАНИИ С ОТРЫВОМ СТРУЙ

Маклаков Д.В.

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Dmitri.Maklakov@ksu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим профиль, обтекаемый по классической схеме Гельмгольца-Кирхгофа с бесконечной каверной. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, течение установившимся и безвихревым (см. рис. 1а). Через A и B обозначим точки отрыва струй, через O - критическую точку разделения потока. Элегантные формулы для подъемной силы L и силы сопротивления D такого профиля были получены Леви-Чивитой [1]. Леви-Чивита конформно отобразил область течения в физической плоскости z на верхний полукруг в параметрической плоскости $t = \xi + i\eta$ (рис. 1б), ввел комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ и функцию Леви-Чивиты

$$\omega = i \ln \frac{dw}{v_0 dz} = \theta + i \ln \frac{v}{v_0}, \quad (1)$$

где θ и v - угол наклона вектора скорости и его модуль, соответственно, v_0 - скорость набегающего потока, равная для данной схемы скорости на струях AI и BI . Так как область изменения комплексного потенциала представляет собой разрез вдоль действительной оси плоскости w , конформное отображение параметрической плоскости t на область в плоскости w имеет вид

$$w(t) = \varphi_0 \left[\cos \delta - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right]^2, \quad (2)$$

где φ_0 положительная постоянная, имеющая размерность потенциала скорости, $e^{i\delta}$ - образ критической точки O в плоскости t . Формулы Леви-Чивиты имеют вид [2] (см. также Джилбарг [3]).

$$L = \frac{1}{4} \rho v_0 \varphi_0 \pi [4\omega'(0) \cos \delta - \omega''(0)], \quad D = \frac{1}{4} \rho v_0 \varphi_0 \pi [\omega'(0)]^2. \quad (3)$$

Как видно из (3), правые части формул Леви-Чивиты зависят от математических параметров, физический смысл которых, вообще говоря, не ясен.

В данной работе формулы Леви-Чивиты (3) приводятся к весьма простому виду

$$L = \rho v_0 \int_0^l \ln \frac{v_0}{v} (\vec{v} \cdot \vec{e}) ds, \quad D = \frac{\rho v_0}{4\pi} \left(\int_0^l \ln \frac{v_0}{v} \frac{v}{\sqrt{\varphi}} ds \right)^2. \quad (4)$$

Здесь l - длина омываемой части профиля (длина дуги AOB), $(\vec{v} \cdot \vec{e})$ - скалярное произведение вектора скорости $\vec{v} = \vec{v}(s)$ и единичного вектора касательной $\vec{e} = \vec{e}(s)$ в точке профиля с дуговой абсциссой s , отсчитываемой

от точки отрыва A , $v = v(s) = |\vec{v}(s)|$ и $\varphi = \varphi(s)$ - распределения скорости и потенциала вдоль AOB , соответственно. Следовательно,

$$(\vec{v} \cdot \vec{e}) = -v(s), \quad \varphi = \int_s^{l_1} v(s) ds \quad \text{на } AO, \quad (\vec{v} \cdot \vec{e}) = v(s), \quad \varphi = \int_{l_1}^s v(s) ds \quad \text{на } OB,$$

где l_1 - дуговая абсцисса точки O .

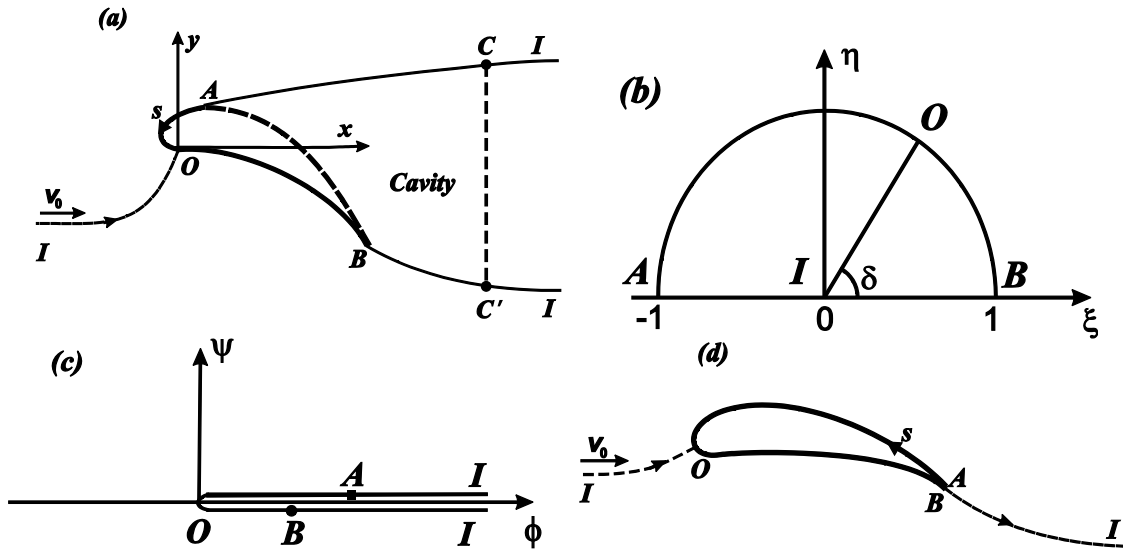


Рис.1. Профиль, обтекаемый по схеме Гельмгольца-Кирхгофа с бесконечной каверной: (a) схема течения в физической плоскости; (b) параметрическая плоскость t ; (c) плоскость комплексного потенциала w ; (d) безотрывное обтекание профиля.

Из формул (4) вытекает, что для вычисления подъемной силы и сопротивления необходимо знать только распределение скорости $v(s)$ вдоль омываемой части профиля и дуговую абсциссу l_1 критической точки O . Сравним первую формулу в (4) с теоремой Кутта-Жуковского для подъемной силы L профиля, обтекаемого безотрывно (рис. 1d). Теорема утверждает, что

$$L = -\rho v_0 \int_0^l (\vec{v} \cdot \vec{e}) ds, \quad (5)$$

где l - периметр контура профиля и интегрирование ведется в том же направлении, что и в (4). Сравнение показывает, что разница между (4) и (5) -

это дополнительный безразмерный множитель $\ln \frac{v_0}{v}$ в (4) и противоположные знаки в формулах для L при отрывном и безотрывном обтекании. Предположим, что при обтекании с отрывом струй течение удовлетворяет первому условию Бриллюэна [2], [3]: скорость на свободных поверхностях AI

и BI - максимальна. Тогда множитель $\ln \frac{v_0}{v} \geq 0$, и разница в знаках приводит к любопытным последствиям. Если при безотрывном обтекании верхний участок

профиля OA вносит положительный вклад в подъемную силу, а нижний - отрицательный, то при обтекании с отрывом получаем противоположную ситуацию: положительный вклад в подъемную силу создается нижним участком профиля, а отрицательный - верхним. Конечно, эта разница должна быть учтена при проектировании несущих суперкавитирующих гидропрофилей.

В качестве приложения формул (4) в работе находятся распределения скорости, обеспечивающие при выполнении первого условия Бриллюэна либо максимальную подъемную силу L , либо максимальное сопротивление D . Таким образом, установлены точные верхние оценки

$$C_L \leq \frac{2}{e} \approx 0.735759, \quad C_D \leq \frac{8}{\pi e} \approx 0.936797, \quad (6)$$

где C_L и C_D - коэффициенты подъемной силы и сопротивления, отнесенные к длине дуги l омываемой части профиля:

$$C_L = \frac{2L}{\rho v_0^2 l}, \quad C_D = \frac{2D}{\rho v_0^2 l}.$$

Второе неравенство для C_D в (6) было впервые получено в работе [5], но лишь для симметричных профилей (см. также [6]-[8]). Если рассматривать схему Гельмгольца-Кирхгофа как модель следа за плохообтекаемым телом, то оптимальную форму, при которой реализуется правая часть неравенства, можно трактовать, как форму идеального непроницаемого парашюта. Как частный случай более общих оценок для более сложных задач это неравенство появлялось также в работах [9]-[11], но опять лишь для симметричных течений. Простота второй формулы в (4) позволяет доказать эту оценку для произвольных профилей.

2. ВЫВОД ФОРМУЛ

ДЛЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

Введем функцию

$$v(\gamma) = \ln \frac{v_0}{v(\gamma)} = -\operatorname{Im} \omega(e^{i\gamma}), \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad (7)$$

где γ - полярный угол в параметрической плоскости t , и выразим функцию Леви-Чивиты через $v(\gamma)$. Так как $v = v_0$ на свободных поверхностях AI и BI , то на действительном диаметре параметрического полукруга функция $\omega(t)$ удовлетворяет граничному условию

$$\operatorname{Im} \omega(\xi) = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Это условие позволяет аналитически продолжить функцию $\omega(t)$ с верхнего полукруга на весь круг и с помощью формулы Шварца получить, что

$$\omega(t) = -\frac{2t}{\pi} \int_0^\pi \frac{v(\gamma) \sin(\gamma) d\gamma}{t^2 - 2t \cos \gamma + 1}. \quad (8)$$

Отсюда находим

$$\omega'(0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(\gamma) \sin \gamma d\gamma, \quad \omega''(0) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} v(\gamma) \sin 2\gamma d\gamma. \quad (9)$$

Подставляем эти производные в первую из формул (3) и учитываем соотношение $d\varphi = -2\varphi_0 \sin \gamma (\cos \gamma - \cos \delta) d\gamma$, которое следует из (2). После перехода к интегрированию в физической плоскости получаем формулу для подъемной силы в (4).

Чтобы вывести формулу для сопротивления необходимо выразить $\omega'(0)$ через $v(s)$. Для этого запишем первую формулу в (9) так:

$$\omega'(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(\gamma) d \cos \gamma. \quad (10)$$

Из (2) нетрудно получить, что $d \cos \gamma = d\sqrt{\varphi/\varphi_0}$ при $0 < \gamma < \delta$ и $d \cos \gamma = -d\sqrt{\varphi/\varphi_0}$ при $\delta < \gamma < \pi$. Подставив этот дифференциал от $\cos \gamma$ в (10) и перейдя к интегрированию в физической плоскости, найдем

$$\omega'(0) = -\frac{1}{\pi \sqrt{\varphi_0}} \int_0^l \ln \frac{v_0}{v} \frac{v ds}{\sqrt{\varphi}}.$$

Отсюда и из (3) следует вторая формула в (4).

3. ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ПОДЪЁМНОЙ СИЛЫ И СОПРОТИВЛЕНИЯ

При выполнении первого условия Бриллюэна верхняя оценка для подъемной силы сразу следует из первой формулы в (4). В самом деле, так как верхний участок OA вносит отрицательный вклад в подъемную силу, то его следует полностью удалить, то есть считать, что точки O и A совпадают и $\delta = \pi$. Тогда всюду на профиле $(\vec{v} \cdot \vec{e}) = v(s)$, а подынтегральная функция в первой формуле (4) при $v(s) \geq v_0$ достигает своего максимума по v , если $v(s) = v_0 e^{-1} = const$. Подставив это распределение $v(s)$ в (4), найдем $L \geq \rho v_0^2 / e$ и мы доказали первую оценку в (6). Из формул (7), (8) находим

$$v(\gamma) = 1, \quad \omega(t) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

Область течения может быть легко построена интегрированием функции $dz/dt = dz/dw \cdot dw/dt$, Параметр ϕ_0 определяется по известной длине l омываемой части контура профиля: $\phi_0 = v_0 l / (4e)$. Подсчитанный по второй формуле в (4) для профиля максимальной подъемной силы коэффициент сопротивления $C_D = 2/(\pi e)$.

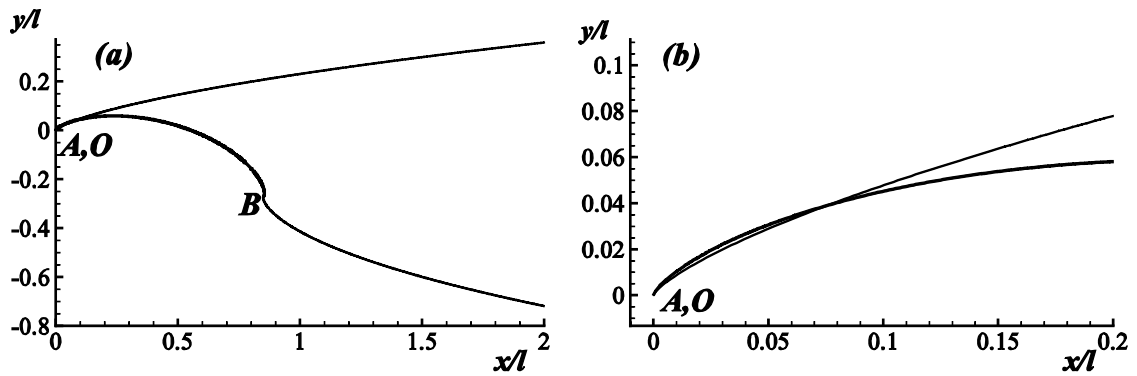


Рис.2. Форма оптимального профиля и свободных линий тока.

На рис. 2 а,b показаны форма оптимального профиля максимальной подъемной силы и формы свободных поверхностей. Полученный результат выглядит достаточно обескураживающим, так течение в окрестности точки разделения потока A , в данной ситуации совпадающей с O , является двулиственным. Можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема. Если кривая AB является всюду выпуклой или всюду вогнутой, имеет конечную кривизну, не равную тождественно нулю, и располагается в потоке под таким углом атаки, что точки O и A совпадают, то область течения будет неоднолистной.

Из теоремы вытекает, что бесполезный с точки зрения максимизации подъемной силы участок OA существенно необходим для того, чтобы течение было физически реализуемым.

Таким образом, первая оценка в (6) не может быть реализована в классе однолистных течений. Однако можно построить профили, течения около которых физически реализуемы, а подъемная сила отличается от максимальной на весьма малую величину. Для построения таких профилей поступим так. Положим, что на этих профилях распределение скорости $v(s) = e^{-1}v_0 = const$, то есть такое же, как и на «оптимальном» профиле, но введем участок OA с длиной дуги $l_1 \neq 0$. Обозначим $\varepsilon = l_1/l$. С помощью формул (4) легко получить, что для таких профилей

$$C_L = \frac{2}{e}(1 - 2\varepsilon), \quad C_D = \frac{2p^2}{\pi e}, \quad p = \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon}. \quad (11)$$

На рис. 3 показаны формы построенных таким способом профилей. Как видно из рисунка, криволинейный сегмент OA весьма малой длины, отбрасывает верхнюю свободную поверхность и препятствует ее пересечению с профилем. Расчеты, показывают что даже при $\varepsilon = 0.0005$, течение все еще является однолистным. Носик профиля и свободная поверхность около него образуют любопытную форму, напоминающую нос дельфина.

Второе неравенство в (6) (верхняя оценка для сопротивления) вытекает из второй формулы в (4) и полученной ранее в работе [5] оценки сопротивления для симметричных профилей.

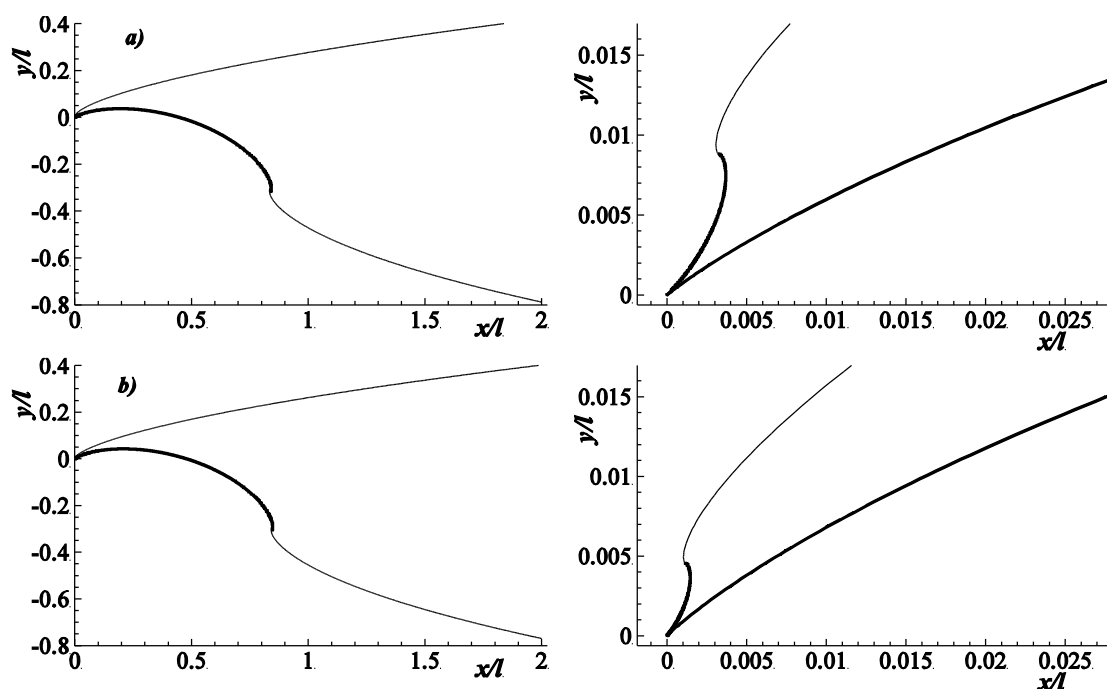


Рис.3. Формы профилей "дельфиний нос": а) $\varepsilon = 0.01$, б) $\varepsilon = 0.005$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levi-Civita T. Scie e leggi di resistenza// Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. - 1907. - V. 23. - P. 1-37.
2. Gilbarg D. Jets and cavities. Encyclopedia of physics. - Berlin: Springer, 1960. - V. 9. - P. 311-445.
3. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. - М.: Мир, 1964. - 466 с.
4. Gurevich, M.I. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости, 2-е изд. - М.: Наука, 1979. - 536 с.
5. Маклаков Д. В. О максимуме сопротивления криволинейного препятствия, обтекаемого с отрывом струй// Докл. АН СССР. - 1988. - Т. 298. - 3. - С. 574-577.
6. Маклаков Д. В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. - М.: Янус-К, 1997. - 281 с.
7. Some remarks on the exact solution for an optimal impermeable parachute problem// J. Comp. and Appl. Math. - 2004. - V. 166 (2). - P. 591-596.
8. Елизаров А. М., Касимов А. Р., Маклаков Д. В. Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике. М.: Физматлит, 2008. 572 с.
9. Maklakov D. V., Uglov A. N. On the maximum drag of a curved plate in flow with a wake// European J. Appl. Math. - 1995. - V. 6 (5) - P. 517-527.
10. Maklakov D. V. On deflectors of optimum shape// J. Fluid Mech. - 2005. - V. 540. - P. 175-187.
11. Maklakov D. V., Elizarov A. M., Sharipov R. R. On parachutes of optimum shape in a subsonic gas flow// European J. Appl. Math. - 2007. - V. 18. - P. 81-102.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОД ИНСТРУМЕНТОМ С ОГРАНИЧЕННОЙ НЕРОВНОСТЬЮ

Муксимова Р.Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Для решения задач нестационарной электрохимической обработки (ЭХО) применяются методы конечных [1] и граничных [2-4] элементов. При этом, как отмечается в [4], применение численных методов, как правило, затрудняется неустойчивостью, в особенности, при исследовании длительных процессов и при обработке ЭИ, имеющими острые кромки. Это приводит к необходимости разработки новых методов, обладающих улучшенными свойствами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим нестационарную задачу электрохимического формообразования с помощью электрод-инструмента (ЭИ), представляющего собой плоскость с выступом или впадиной с горизонтальным размером R (рис. 1,а). ЭИ заглубляется в заготовку со скоростью V_{et} под прямым углом к поверхности. Начальный межэлектродный зазор равен S_0 .

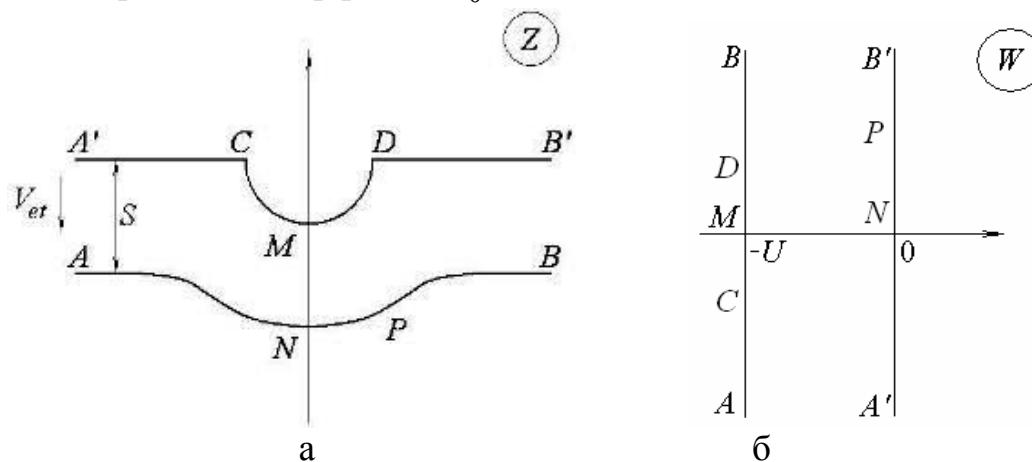


Рис. 1. Форма образа межэлектродного пространства:
а – на физической плоскости; б – на плоскости комплексного потенциала.

В результате растворения происходит сдвиг точек анодной границы, причем каждая из ее точек движется со своей скоростью $V_{ecm} \sim \frac{dW}{dZ}$. Асимптотическая величина зазора $S(t)$ изменяется и на бесконечности слева и справа приближается к стационарной величине

$$S_{st} = \frac{kk_I \eta U}{V_{et}} \quad (1)$$

где k – электрохимическая постоянная; k_I – коэффициент, учитывающий средний ток за период (с учетом скважности импульсов и изменения свойств среды); η – выход по току. При этом $V_{et} = V_{ecm}^{st}$.

Задачи удобнее решать в безразмерном виде. Сведение к безразмерным величинам для данной задачи проведем следующим образом. В качестве характерного размера выберем величину стационарного зазора (1), который устанавливается при обработке (при обработке поверхности с горизонтальной асимптотой эта величина зазора устанавливается на бесконечности слева и справа). Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w , где

$$z = \frac{Z}{S_{st}}, \quad x = \frac{X}{S_{st}}, \quad y = \frac{Y}{S_{st}}, \quad \tau = \frac{V_{et}}{S_{st}} t = \frac{kk_I \eta U}{S_{st}^2} t, \quad w = \frac{W}{U}. \quad (2)$$

Тогда

$$v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = 1, \quad v_{ecm} = -\frac{dy_A}{d\tau} = \frac{S_{st}}{S(t)} = \frac{1}{s(\tau)}. \quad (3)$$

При этом согласно (3) значение $s(\tau)$ должно удовлетворять следующим условиям

$$s = s_0 - \tau + \int_0^{\tau} v_{ecm}(\tau_1) d\tau_1 = s_0 - \tau + \int_0^{\tau} \frac{1}{s(\tau_1)} d\tau_1, \quad \frac{ds}{d\tau} = -1 + \frac{1}{s(\tau)}. \quad (4)$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

В связи с эквипотенциальностью электродов форма области межэлектродного пространства (МЭП) на плоскости комплексного потенциала представляет собой полосу (рис. 1,б).

Выберем в качестве параметрической переменную $\chi = \sigma + i\nu$, область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 2,а). Конформное отображение параметрической плоскости χ на плоскость комплексного потенциала определяется по формуле $W = Ui\chi$.

Тогда согласно (2)

$$w = \varphi + i\psi = i\chi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = 1. \quad (5)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z(\chi, \tau) = -i \int_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{s(\tau_1)} + s(\tau)\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau), \quad (6)$$

где $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_χ функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямой (при $\chi = \sigma + i$ $\text{Im} z_a(\chi, \tau) = 0$); $z_c(\xi, \tau)$ – аналитическая в области D_ξ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_ξ функция, предназначенная для описания

выпуклости на ЭИ (при $\xi=\omega+i0$ $\text{Im} z_c(\xi, \tau) = 0$). Функция $z_c(\xi, \tau)$ определена на полосе единичной ширины D_ξ (рис. 2,б). Связь ξ и χ

$$\chi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{e^{\pi\xi} e^{\pi\beta} - 1}{e^{\pi\xi} - e^{\pi\beta}} + i, \quad \xi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + e^{\pi\chi} e^{\pi\beta}}{e^{\pi\chi} + e^{\pi\beta}}. \quad (7)$$

Производные при $\chi = \sigma$

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{e^{\pi\sigma} (e^{2\pi\beta} - 1)}{(1 + e^{\pi\sigma} e^{\pi\beta})(e^{\pi\sigma} + e^{\pi\beta})}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{e^{\pi\beta} (e^{2\pi\sigma} - 1)}{(1 + e^{\pi\sigma} e^{\pi\beta})(e^{\pi\sigma} + e^{\pi\beta})} \frac{d\beta}{d\tau}. \quad (8)$$

При $\xi=\omega+i$

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{(1 + e^{\pi\omega} e^{\pi\beta})(e^{\pi\omega} + e^{\pi\beta})}{e^{\pi\omega} (e^{2\pi\beta} - 1)}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{e^{\pi\beta} (e^{2\pi\omega} - 1) d\beta}{e^{\pi\omega} (e^{2\pi\beta} - 1) d\tau}. \quad (9)$$

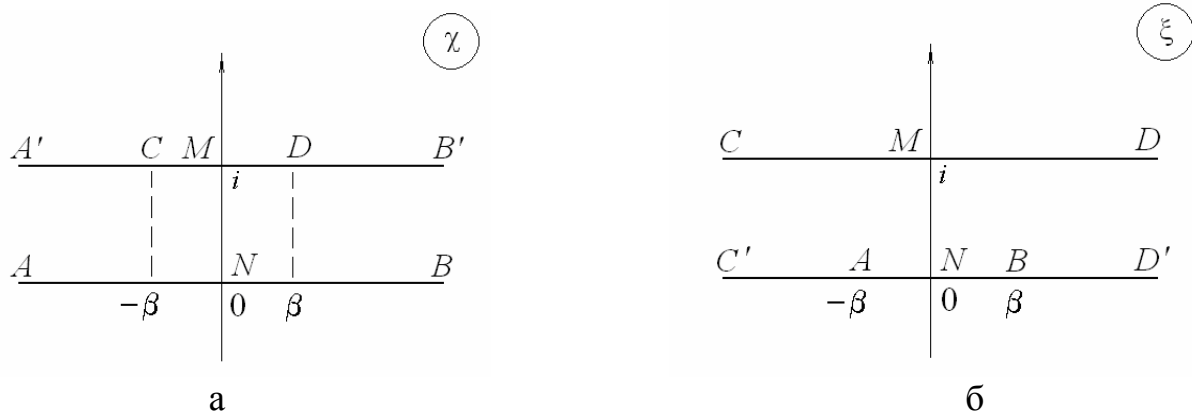


Рис. 2. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ .

В силу (6) поскольку горизонтальный размер неровности ЭИ $r = \text{Re} z_D$

$$r = \frac{R}{S_{st}} = s(\tau)\beta(\tau) + z_c(\infty, \tau) + z_a(\beta(\tau) + i, \tau), \quad (10)$$

где $\beta(\tau)$ – образ точки D , определяемый из этого уравнения. Из (10) найдем производную

$$\frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\beta(\tau) + i, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} z_c(\infty, \tau) + \beta(\tau) \left(-1 + \frac{1}{s(\tau)} \right)}{s(\tau) + \frac{\partial z_a}{\partial \chi}(\beta(\tau) + i, \tau)}. \quad (11)$$

Функция $z_a(\chi, \tau)$ определяется следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi=\sigma+i0$ в узловых точках σ_m ($m=0, \dots, n$). Заданными на каждом временном шаге будут значения $\text{Im} z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$. Примем $\text{Im} z_a(\sigma_n, \tau) = 0$, поскольку $z_a(\sigma, \tau)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\text{Im} z_a(\sigma, \tau)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции $z_a(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_a(\chi, \tau)$ аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на прямой $\text{Im} \chi = 1$ и $\text{Im} z_a(\sigma, \tau) = \text{Im} z_a(-\sigma, \tau)$

$$z_a(\chi, \tau) = \operatorname{sh} \pi \chi \int_0^{\infty} \operatorname{Im} z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi}. \quad (12)$$

Производная

$$\frac{dz_a}{d\chi}(\chi, \tau) = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma. \quad (13)$$

Функция $z_c(\xi, \tau)$ получается аналогичным образом. Будем искать решение на границе $\xi = \omega + i$ в узловых точках ω_m ($m=0, \dots, n$). Заданными будут значения $\operatorname{Im} z_c(\omega_m, \tau) = \bar{y}_m$. Примем $\operatorname{Im} z_c(\omega_n, \tau) = 0$.

Для восстановления функции $z_c(\xi, \tau)$ используем формулу Шварца с учетом того, что $z_c(\xi, \tau)$ аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на прямой $\operatorname{Im} \xi = 0$ и $\operatorname{Im} z_c(\omega + i, \tau) = \operatorname{Im} z_c(-\omega + i, \tau)$

$$z_c(\xi, \tau) = \operatorname{sh} \pi \xi \int_0^{\infty} \operatorname{Im} z_c(\omega + i, \tau) \frac{d\omega}{\operatorname{ch} \pi \omega + \operatorname{ch} \pi \xi}. \quad (14)$$

Производная

$$\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi, \tau) = - \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\partial z_c}{\partial \omega}(\omega + i, \tau) \frac{\operatorname{sh} \pi \omega}{\operatorname{ch} \pi \omega + \operatorname{ch} \pi \xi} d\omega. \quad (15)$$

3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решается численным методом. При этом на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$, $j = 1, 2, \dots, k$ решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости χ на физическую плоскость z . При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при $\tau = 0$. Значения переменных $y_m(\tau_{j+1})$ и $\bar{y}_m(\tau_{j+1})$ на следующем шаге по времени вычисляются с помощью частных производных $\frac{\partial y_a}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j)$, $\frac{\partial y_c}{\partial \tau}(\omega_m, \tau_j)$. Частные производные по времени определяются при решении краевой задачи: найти $\frac{\partial z}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ как аналитическую функцию комплексного параметра χ , удовлетворяющую краевому условию [5]

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) = - \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial \sigma}. \quad (16)$$

Для вычисления производной $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_a(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Значения $\text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна $Q(\sigma, \tau)$. Для восстановления $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (12)

$$\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau) = \text{sh} \pi \chi \int_0^{\infty} Q(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\text{ch} \pi \sigma - \text{ch} \pi \chi}. \quad (17)$$

Для вычисления производной $\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$ также применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_c(\xi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_\tau$ будут значения $\text{Im} \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega_m, \tau_j) = r_m$. Значения $\text{Im} \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\omega, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна $R(\omega, \tau)$. Для восстановления $\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$ используем формулу Шварца, аналогичную (14)

$$\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau) = \text{sh} \pi \xi \int_0^{\infty} R(\omega, \tau) \frac{d\omega}{\text{ch} \pi \omega + \text{ch} \pi \xi}. \quad (18)$$

С учетом (3)–(9) определяются производные $\frac{\partial z}{\partial \sigma}, \frac{\partial z}{\partial \tau}$ при $\chi = \sigma + i0$ (на границе анода)

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = s(\tau) + \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) + \frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma), \tau) \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = -\frac{i}{s(\tau)} + \left(-1 + \frac{1}{s(\tau)}\right) \sigma + \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma, \tau) + \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi(\sigma), \tau) + \frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma), \tau) \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \quad (20)$$

На границе катода $\xi = \omega + i$ в системе координат, связанной с катодом $z_{et}(\chi, \tau) = -is(\tau) + s(\tau)\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau)$.

С учетом (3), (4) производные

$$\frac{\partial z_{et}}{\partial \sigma}(\sigma + i, \tau) = s(\tau) + \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma + i, \tau) + \frac{\partial z_c}{\partial \sigma}(\xi(\sigma + i), \tau), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{et}}{\partial \tau}(\sigma + i, \tau) = & \left(-1 + \frac{1}{s(\tau)}\right) \sigma + \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma + i, \tau) + \\ & + \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi(\sigma + i), \tau) + \frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi(\sigma + i), \tau) \frac{\partial \xi}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для вычисления $\frac{d\beta}{d\tau}$ (11) найдем производные

$$\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\beta(\tau) + i, \tau) = -\operatorname{sh} \pi \beta(\tau) \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \beta(\tau)}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial z_a}{\partial \chi}(\beta(\tau) + i, \tau) = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \beta(\tau)} d\sigma, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} z_c(\infty, \tau) = \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\sigma + i, \tau) d\sigma. \quad (25)$$

Значения q_m, r_m , определяются методом коллокаций по краевому условию (16) с учетом (19), (20) и (5)

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma_m) \overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma_m)} \right] + 1 = 0, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (26)$$

На катоде краевое условие с учетом (21), (22) имеет вид

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\partial z_{et}}{\partial \tau}(\omega_m) \overline{\frac{\partial z_{et}}{\partial \sigma}(\omega_m)} \right] = 0, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (27)$$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (26), (27) и определения частных производных $\operatorname{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \tau} = q_m, \operatorname{Im} \frac{\partial z_c}{\partial \tau} = r_m$ производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее снова повторяется процесс вычисления $\frac{\partial z_a}{\partial \chi}, \frac{\partial z_c}{\partial \xi}, q_m, r_m$ и т.д.

4. ВИДОИЗМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ЭХО С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОД – ИНСТРУМЕНТА В ФОРМЕ КРУГА

Рассмотрим нестационарную задачу электрохимического растворения с помощью ЭИ, представляющего собой круг с радиусом R . Круглый ЭИ заглубляется в заготовку со скоростью V_{et} под прямым углом к поверхности (рис. 3,а).

Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w , где $l = kk_I \eta U / V_{et}$ или $l = kk_I \eta I / (\kappa V_{et})$

$$z = Z/l, \quad x = X/l, \quad y = Y/l, \quad \tau = \frac{V_{et}}{l} t = kk_I \eta U t / l^2. \quad (28)$$

При этом $v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = 1.$

В связи с эквипотенциальностью электродов форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала представляет собой прямоугольник (рис. 3,б).

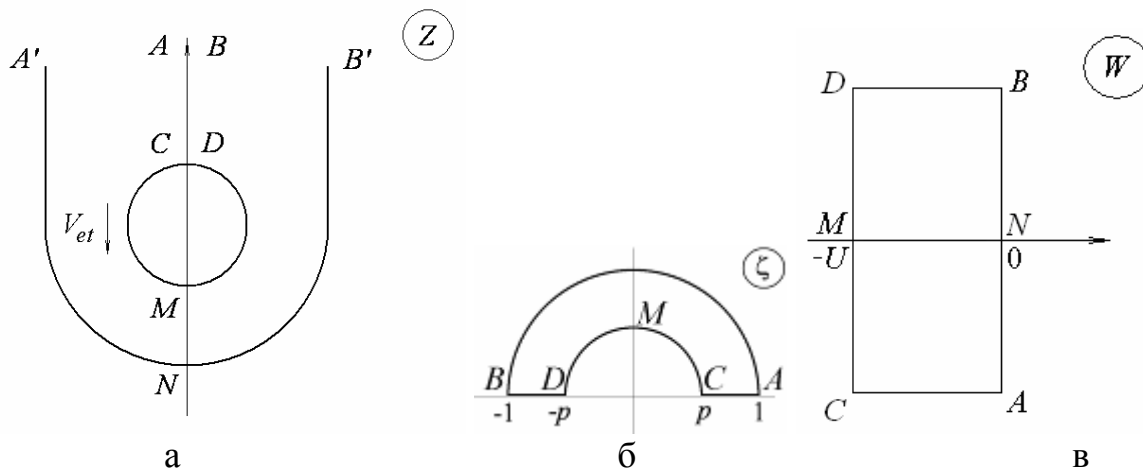


Рис. 3. Форма образа МЭП: *а* – на физической плоскости; *б* – на плоскости комплексного потенциала; *в* – на параметрической плоскости ζ .

Выберем в качестве параметрической переменную $\chi = \sigma + iv$, область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу ширины $1/2$ (рис. 6,а). Конформное отображение параметрической плоскости χ на плоскость комплексного потенциала определяется по формуле (см. рис. 3,в)

$$W = -\frac{U}{\ln p} \left(\ln \zeta - i \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\chi = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}} \left(\zeta^{2m-1} + \zeta^{-2m+1} \right). \quad (29)$$

Производная

$$\frac{dW}{d\chi} = -\frac{U}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1}. \quad (30)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ (рис. 4,а) на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z(\chi, \tau) = g(\tau) \operatorname{sh} \pi\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau), \quad (31)$$

где функция $z_0(\chi) = g \operatorname{sh} \pi\chi$ при $g > 0$ конформно отображает полосу плоскости χ на верхнюю полуплоскость с разрезом; $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_χ функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при $\chi = \sigma + i$ $\operatorname{Im} z_a(\chi, \tau) = 0$); $z_c(\xi, \tau)$ – аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_χ функция, предназначенная для описания выпуклости на ЭИ (при $\xi = \omega + i0$ $\operatorname{Im} z_c(\xi, \tau) = 0$). Функция $z_c(\xi, \tau)$ определена на полосе D_ξ (рис. 4,б).

Связь ξ и χ

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^{2\pi\xi} + e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\xi} e^{2\pi\beta} + 1} + \frac{i}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e^{2\pi\chi} + e^{2\pi\beta}}{e^{2\pi\chi} e^{2\pi\beta} + 1} + \frac{i}{2}. \quad (32)$$

Производная

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{e^{2\pi\chi} (1 - e^{4\pi\beta})}{(e^{2\pi\chi} + e^{2\pi\beta})(e^{2\pi\chi} e^{2\pi\beta} + 1)}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{e^{2\pi\beta} (1 - e^{4\pi\sigma})}{(e^{2\pi\sigma} + e^{2\pi\beta})(e^{2\pi\sigma} e^{2\pi\beta} + 1)} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \quad (33)$$

При $\chi = \sigma + i/2, \xi = \omega$

$$\frac{d\xi}{d\chi} = \frac{(e^{2\pi\beta} + e^{2\pi\omega})(e^{2\pi\omega} e^{2\pi\beta} + 1)}{e^{2\pi\omega} (1 - e^{4\pi\beta})}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{e^{2\pi\beta} (e^{4\pi\omega} - 1)}{e^{2\pi\omega} (1 - e^{4\pi\beta})} \frac{\partial \beta}{\partial \tau}. \quad (34)$$

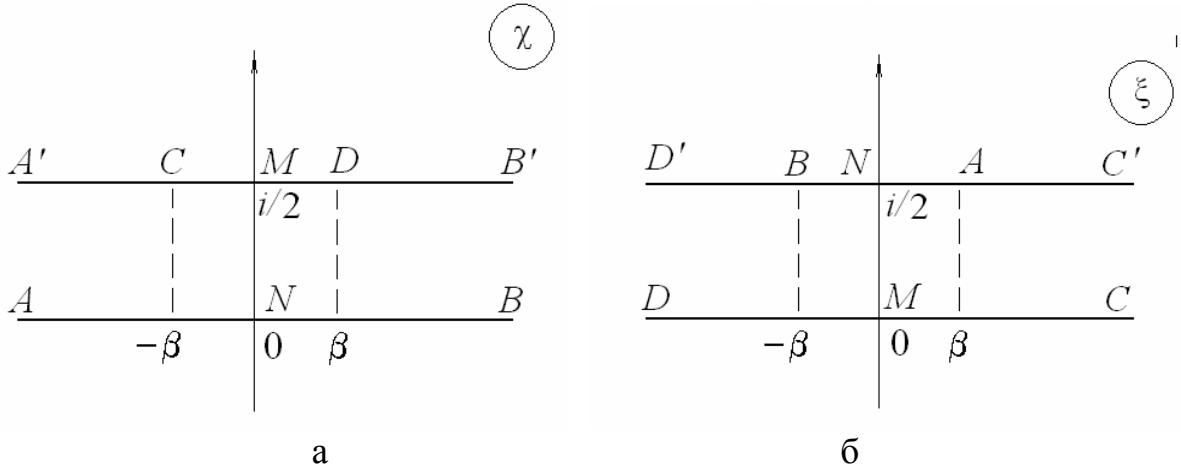


Рис. 4. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ .

В силу (31)

$$r = \frac{R}{l} = \text{Im} z \left(\beta + \frac{i}{2}, \tau \right) = g(\tau) \text{ch}(\pi\beta(\tau)) + \text{Im} \left\{ z_a \left(\beta(\tau) + \frac{i}{2}, \tau \right) + z_c(\infty, \tau) \right\} \quad (35)$$

где $\beta(\tau)$ – образ точки D , определяемый из этого уравнения.

Из уравнения, получаемого дифференцированием (35) найдем производную

$$\frac{d\beta}{d\tau} = - \frac{\text{ch}(\pi\beta(\tau)) \frac{dg}{d\tau} + \text{Im} \frac{\partial}{\partial \tau} z_c(\infty, \tau) + \text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \tau} \left(\beta(\tau) + \frac{i}{2}, \tau \right)}{\pi g(\tau) \text{sh}(\pi\beta(\tau)) + \text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \chi} \left(\beta(\tau) + \frac{i}{2}, \tau \right)}. \quad (36)$$

Найдем производную $\frac{dg}{d\tau}$

$$\text{Im} z \left(\frac{i}{2}, \tau \right) = g(\tau) + \text{Im} z_c(0, \tau) = s_0 - r_y - \tau, \quad \frac{dg}{d\tau} = -1 - \text{Im} \frac{\partial}{\partial \tau} z_c(0, \tau).$$

Функция $z_a(\chi, \tau)$ определяется аналогично предыдущей задаче. Формула Шварца принимает вид

$$z_a(\chi, \tau) = \text{sh } \pi\chi \int_0^{\infty} \text{Im } z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\text{ch } \pi\sigma - \text{ch } \pi\chi} + \text{sh } \pi\chi \int_0^{\infty} \text{Im } z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\text{ch } \pi\sigma + \text{ch } \pi\chi}. \quad (37)$$

Производная

$$\frac{\partial z_a}{\partial \chi}(\chi, \tau) = \int_0^{\infty} \text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{\text{sh } \pi\sigma}{\text{ch } \pi\sigma - \text{ch } \pi\chi} d\sigma - \int_0^{\infty} \text{Im} \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{\text{sh } \pi\sigma}{\text{ch } \pi\sigma + \text{ch } \pi\chi} d\sigma \quad (38)$$

Функция $z_c(\xi, \tau)$ получается аналогичным образом. Формула Шварца

$$z_c(\xi, \tau) = -i \int_0^{\infty} \text{Re } z_c(\omega, \tau) \frac{\text{sh } \pi\omega}{\text{ch } \pi\omega - \text{ch } \pi\xi} d\omega + i \int_0^{\infty} \text{Re } z_c(\omega, \tau) \frac{\text{sh } \pi\omega}{\text{ch } \pi\omega + \text{ch } \pi\xi} d\omega \quad (39)$$

Производная

$$\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi, \tau) = i \text{sh } \pi\xi \int_0^{\infty} \text{Re} \frac{\partial z_c}{\partial \omega}(\omega, \tau) \frac{d\omega}{\text{ch } \pi\xi - \text{ch } \pi\omega} - i \text{sh } \pi\xi \int_0^{\infty} \text{Re} \frac{\partial z_c}{\partial \omega}(\omega, \tau) \frac{d\omega}{\text{ch } \pi\omega + \text{ch } \pi\xi} \quad (40)$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные результаты представлены на рис. 5–7. На рис. 5 показаны формы поверхности при обработке полукруглым ЭИ с радиусом $r=10$. Картина в системе координат, связанной с подвижной асимптотической поверхностью анода (рис. 5,а), показывает ход процесса растворения и позволяет увидеть установление стационарной формы обрабатываемой поверхности (которая была рассчитана заранее).

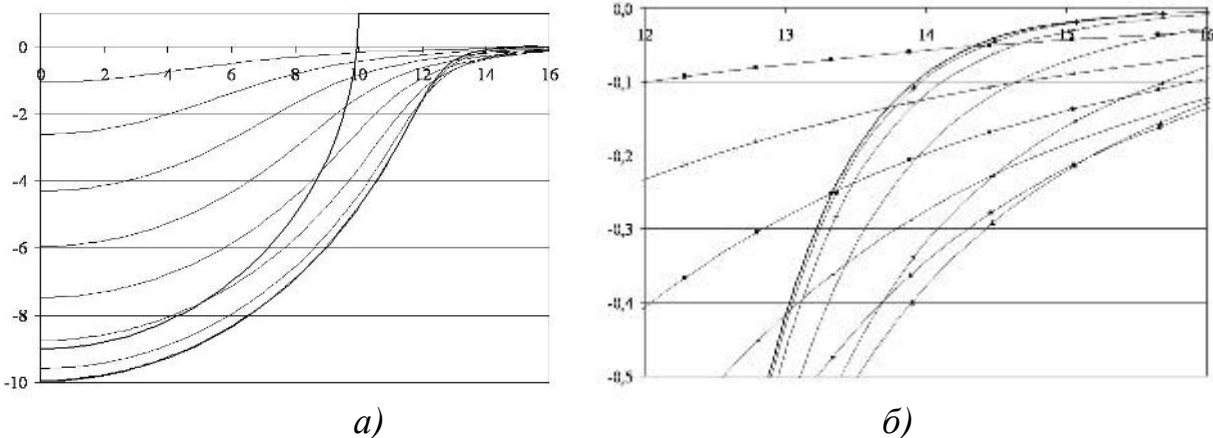


Рис. 5. Формы поверхности при обработке полукруглым ЭИ с радиусом $r=10$ и шагом по времени $\Delta\tau=2$: (а) – основная часть поверхности; (б) – фрагмент обрабатываемой поверхности вблизи излома ЭИ.

На рис. 6,а,б показаны формы нестационарной обрабатываемой поверхности при обработке ЭИ, имеющего выпуклость и впадину в форме сегмента круга. Во всех случаях наблюдается установление стационарной формы. Разработанный метод позволяет рассматривать ЭИ с выступом и впадиной, форма которых может варьироваться в широких пределах. В частности, на рис. 7 рассмотрен ЭИ в виде горизонтальной пластины, присоединенной к плоскому основанию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе предложен численно-аналитический метод решения задач нестационарной электрохимической обработки при помощи плоского электрода-инструмента с выступом или выемкой криволинейной формы, основанный на аналитическом решении задачи определения частных производных координат по времени и разделении функций, определяющих неровности ЭИ и обрабатываемой поверхности. Рассмотрение численных примеров подтвердило высокую эффективность предложенного метода.

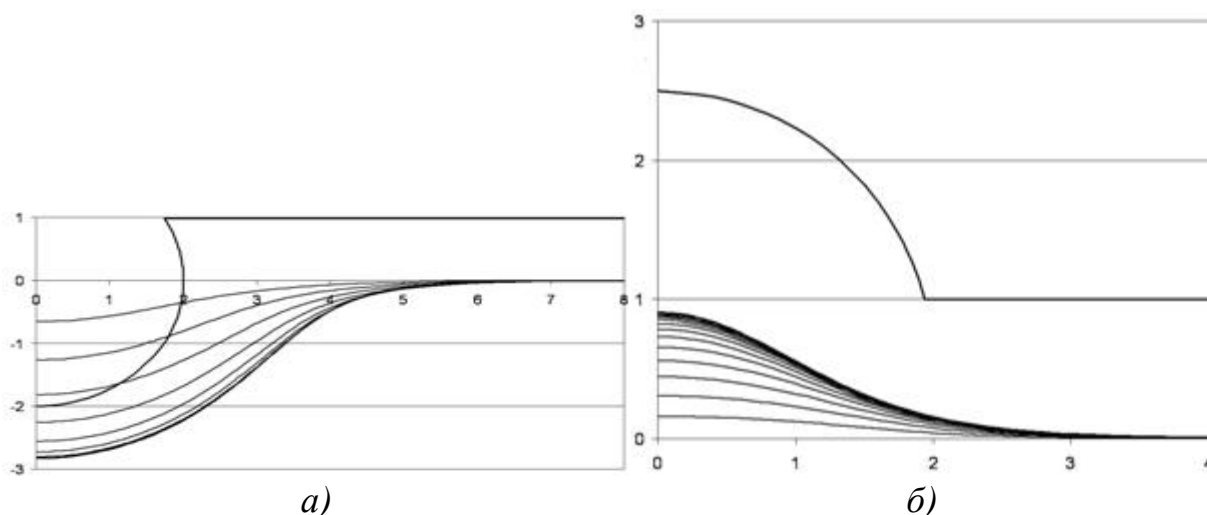


Рис. 6. Формы поверхности с шагом по времени $\Delta\tau=1$ при обработке ЭИ:
а – в форме сегмента с радиусом $r=2$ и с высотой $l=3$;
б – с выемкой с радиусом $r=2$.

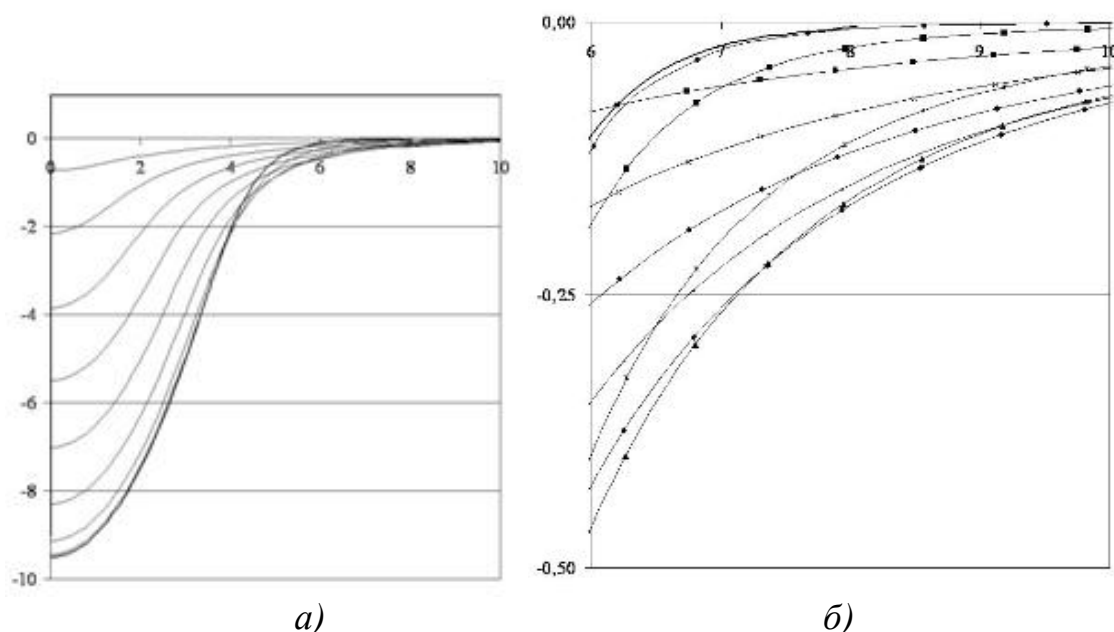


Рис. 7. Формы поверхности обрабатываемой ЭИ в форме вертикальной пластины с высотой $l=10$ с шагом по времени $\Delta\tau=2$:
(а) – основная часть поверхности;
(б) – фрагмент обрабатываемой поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-65497.2010.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мустянце А.Н., Эрлихман Ф.М., Энгельгардт Г.Р., Дикусар А.И. Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ // Электронная обработка материалов.- Кишинёв: Штиинца. – 1989, №3.-С. 11-15.
2. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Эволюция формы анодной границы при электрохимической размерной обработке металлов // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск. - 2004, Т. 45, №4, - С. 7-12.
3. Volgin V.M., Davydov A.D. Modeling of multistage electrochemical shaping // Journal of Materials Processing Technology. Elsevier. – 2004, Vol. 149, No 1-3 4. – P. 466-471.
4. Purcar M, Bortels L., Van den Bossche B., Deconinck J. 3D electrochemical machining computer simulations // Journal of Materials Processing Technology. Elsevier. -2004, Vol. 149, No 1-3. –P. 472-478.
5. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008, – 413с.

**ПРЕДЕЛЬНО-КВАЗИСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ
ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ГОРИЗОНТАЛЬНО ДВИЖУЩИМСЯ
УГЛОВЫМ ЭЛЕКТРОД-ИНСТРУМЕНТОМ**

Ошмарина Е.М., Поречный С.С.

Уфимский государственный авиационный технический университет

Моделирование электрохимической обработки (ЭХО) основано на законе Фарадея, согласно которому скорость растворения V_{ect} равна $V_{ect} = k\eta j$, $k = \varepsilon/\rho$, где ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого материала; j – плотность тока на анодной границе; $\eta = \eta(j)$ – выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла).

В [1] для решения стационарной задачи предлагалось исследовать процесс со скачкообразной зависимостью выхода по току от плотности тока

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе для исследования процессов с предельно высокой локализацией предлагается рассмотреть случай, когда максимальное значение плотности тока на обрабатываемой поверхности E_0 равно критическому $E_1 = \frac{j_1}{\kappa}$ (κ – электропроводность электролита).

Будем считать электрическое поле в межэлектродном пространстве (МЭП) соленоидальным и потенциальным. Тогда задачу определения напряженности поля можно решать с помощью аналитических функций комплексного переменного.

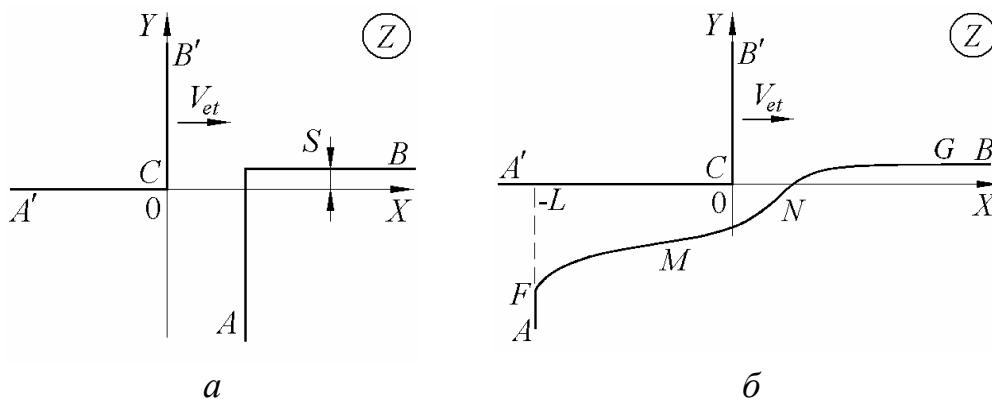


Рис. 1. Формы межэлектродного пространства на физической плоскости:
а – перед началом процесса; б – в процессе обработки.
FMNG – зона постоянного (критического) значения напряженности;
AF, GB – нерастворяемые (прямолинейные) границы.

Рассмотрим задачу формообразования обрабатываемой поверхности при обработке электрод - инструментом (ЭИ) в виде клина $A'SB'$ с углом раствора

равным $\pi/2$, движущимся горизонтально вправо с постоянной скоростью V_{et} . Сечение МЭП показано на рис. 1.

Образом МЭП на плоскости комплексного потенциала является полоса шириной U (рис. 2,а).

При использовании ступенчатой зависимости выхода по току при $E_0 = E_1$, на обрабатываемой поверхности образуются две зоны с двумя типами краевых условий. Первой зоне $FMNG$ с постоянным модулем напряженности $|E| = E_1$ на плоскости $\bar{E} = dW/dZ$ соответствует дуга окружности с центром в начале координат. Участкам AF ($\theta=0$, θ – угол между вектором напряженности и осью X) и GB ($\theta=-\pi/2$), где отсутствует растворение, на плоскости \bar{E} соответствуют отрезки, соответственно, действительной AF и мнимой GB осей.

На поверхности ЭИ $A'C$ угол $\theta=0$, на $B'C$ $\theta=-\pi/2$. Поэтому на плоскости годографа \bar{E} имеем, соответственно, горизонтальный и вертикальный лучи. Область на плоскости годографа размещается на двулистной поверхности. Более удобно изобразить каждый лист отдельно (рис 2, б, в). Пунктиром обозначена линия «склейки» двух листов.

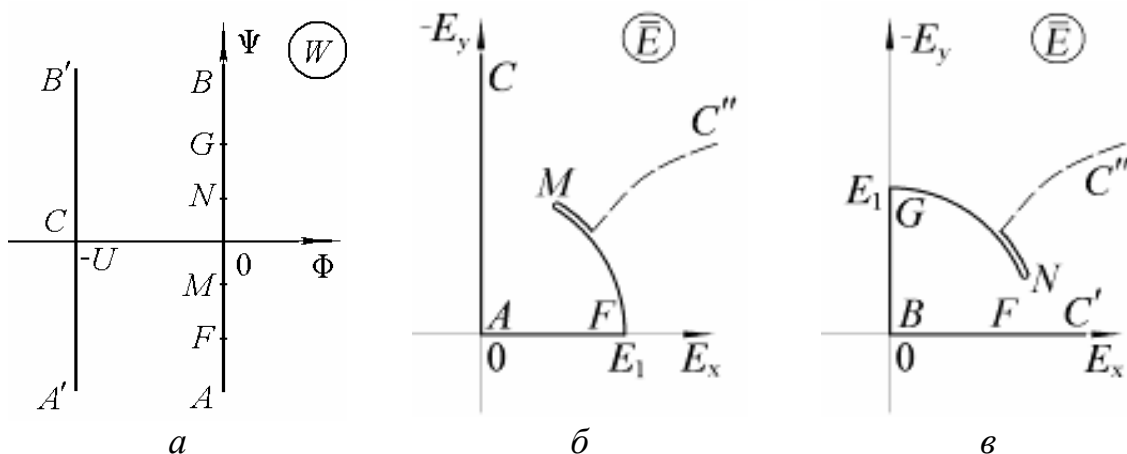


Рис. 2. Формы образа межэлектродного пространства на плоскостях:
 а – комплексного потенциала;
 б, в – годографа (б – первый лист; в – второй лист).

Применив преобразование $t_2 = \frac{-2}{E_1^2} \bar{E}^2$, получим фигуру, граница которой содержит только дуги окружности и части прямых, содержащие общие точки H, G (рис. 3).

Применив преобразование

$$t_1 = \frac{1}{t_2 + 1} = \frac{E_1^2}{\bar{E}^2 + E_1^2}, \quad (2)$$

получим пятиугольник с углами H, F, G, M, N , равными $-\pi, \pi/2, -\pi/2, 2\pi, 2\pi$, соответственно (рис. 4,а,б).

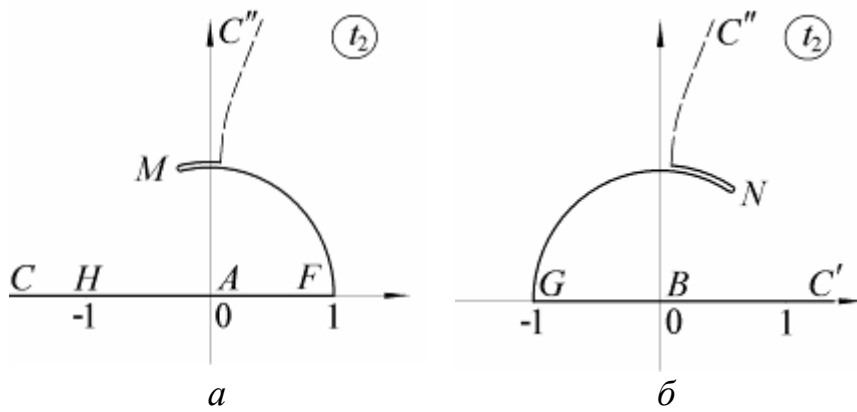


Рис. 3. Формы образа межэлектродного пространства на плоскости t_2 :
а – первый лист; б – второй лист.

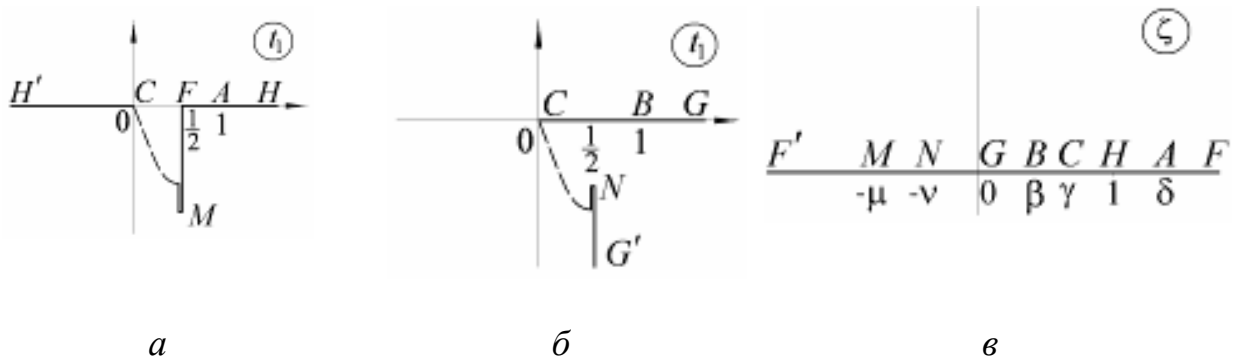


Рис. 4. Формы образа МЭП на плоскостях параметрических переменных:
а – t_1 , первый лист; б – t_1 , второй лист; в – плоскость ζ .

Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость ζ (рис. 4,в) на многоугольник t_1

$$t_1 = C_1 \int_{\gamma}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - 1)^2 \zeta^{3/2}} =$$

$$= \frac{1 - 3\mu\nu - \mu - \nu}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} - (\mu + 1)(\nu + 1) \frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - 1} - 2 \frac{\mu\nu}{\sqrt{\zeta}}.$$

Поскольку лучи $H'C$ и HF лежат на одной прямой, то

$$1 - 3\mu\nu - \mu - \nu = 0, \quad \nu < \mu = \frac{1 - \nu}{3\nu + 1} < 1, \quad 0 < \nu < \frac{1}{3}.$$

Тогда зависимость $t_1(\zeta)$

$$t_1(\zeta) = C_1 \left(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma} \right) \left((\mu + 1)(\nu + 1) \frac{(\sqrt{\gamma} \sqrt{\zeta} + 1)}{(\gamma - 1)(\zeta - 1)} - 2\mu\nu \frac{1}{\sqrt{\gamma} \sqrt{\zeta}} \right).$$

Так как $\text{Re} t_1(-\mu) = \text{Re} t_1(-\nu) = 1/2$, то

$$\frac{1}{2} = \text{Re} \left\{ -C_1 \left((\mu + 1)(\nu + 1) \frac{i\sqrt{\mu}}{-\mu - 1} - 2i \frac{\mu\nu}{\sqrt{\mu}} - (\mu + 1)(\nu + 1) \frac{\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} - 2 \frac{\mu\nu}{\sqrt{\gamma}} \right) \right\},$$

$$C_1 = \frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{2((\mu+1)(\nu+1)\gamma + 2\mu\nu(\gamma-1))} = \frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{4(\gamma-\mu\nu)}.$$

Тем самым

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{4(\gamma-\mu\nu)} \frac{1}{(\zeta-1)\sqrt{\zeta}} [(\mu+1)(\nu+1)\zeta + 2\mu\nu\zeta - 2\mu\nu] + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{4(\gamma-\mu\nu)} \frac{(\mu+1)(\nu+1)(\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}+1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta} + 2\mu\nu(\gamma-1)(\zeta-1)}{(\gamma-1)(\zeta-1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}} (\sqrt{\zeta}-\sqrt{\gamma}), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-t_1 &= \frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{4(\gamma-\mu\nu)} \frac{1}{(\zeta-1)\sqrt{\zeta}} [(\mu+1)(\nu+1)\zeta + 2\mu\nu\zeta - 2\mu\nu] + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}}{4(\gamma-\mu\nu)} \frac{(\mu+1)(\nu+1)(\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}-1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta} + 2\mu\nu(\gamma-1)(\zeta-1)}{(\gamma-1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} (\sqrt{\zeta}+\sqrt{\gamma}). \quad (4) \end{aligned}$$

Тогда напряженность

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E_1 \sqrt{\frac{1}{t_1} - 1} = E_1 \sqrt{\frac{(\mu+1)(\nu+1)(\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}-1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta} + 2\mu\nu(\gamma-1)(\zeta-1) \sqrt{\zeta} + \sqrt{\gamma}}{(\mu+1)(\nu+1)(\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta}+1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta} + 2\mu\nu(\gamma-1)(\zeta-1) \sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma}}} = \\ &= E_1 \sqrt{\frac{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\delta})(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\zeta}+\sqrt{\delta})(\sqrt{\zeta}+\sqrt{\beta})} \frac{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{\gamma}}}, \quad (5) \end{aligned}$$

где δ и β – образы точек A и B , определяемые из решения квадратного уравнения

$$[(\mu+1)(\nu+1)\gamma + 2\mu\nu\gamma - 2\mu\nu]\zeta - (\mu+1)(\nu+1)\sqrt{\gamma}\sqrt{\zeta} + 2\mu\nu(1-\gamma) = 0, \quad (6)$$

$$\sqrt{\delta} = \frac{(\mu+1)(\nu+1)\sqrt{\gamma} - \sqrt{D}}{2[(\mu+1)(\nu+1)\gamma - 2\mu\nu(1-\gamma)]}, \quad \sqrt{\beta} = \frac{(\mu+1)(\nu+1)\sqrt{\gamma} + \sqrt{D}}{2[(\mu+1)(\nu+1)\gamma - 2\mu\nu(1-\gamma)]}, \quad (7)$$

$$D = \gamma[(\mu+1)(\nu+1) - 4\mu\nu(1-\gamma)]^2 + 16\mu^2\nu^2(1-\gamma)^3.$$

Остается найти отображение $W(\zeta)$. Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим

$$W = \frac{iU}{\pi} \ln \frac{\zeta-\delta}{\zeta-\beta}, \quad \frac{dW}{d\zeta} = \frac{iU}{\pi} \frac{\delta-\beta}{(\zeta-\delta)(\zeta-\beta)}. \quad (8)$$

Так как справедлива формула (2), то с учетом (8)

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\zeta} &= \frac{1}{E} \frac{dW}{d\zeta} = \frac{1}{E} \frac{iU}{\pi} \frac{\delta-\beta}{(\zeta-\delta)(\zeta-\beta)} = \\ &= \frac{iU}{\pi E_1} \frac{\delta-\beta}{(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\delta})^{3/2} (\sqrt{\zeta}-\sqrt{\beta})^{3/2} \sqrt{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\delta}} \sqrt{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\beta}} \sqrt{\sqrt{\zeta}+\sqrt{\gamma}}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Интегрируя (7) численно от $\zeta=\gamma$, получим функцию $Z(\zeta)$.

Параметры заглупления кромки ЭИ L и S определяются следующим обра-

зом

$$L = -\operatorname{Re}Z(\infty), \quad S = \operatorname{Im}Z(0), \quad (10)$$

безразмерное время $\tau = L \frac{E_1}{U}$.

На рис. 5 приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат, соответствующие $s = S \frac{E_1}{U} = 0$ и $\tau = -2; -1.5; -1; -0.5; 0; 0.5; 1; 1.5; 2; \dots; 5$.

На рис. 5,а при $\tau \rightarrow \infty$ видно установление предельно-стационарной конфигурации с $|\bar{E}| = E_1$. Вблизи нерастворяемой зоны AF при возрастании τ формируется предельная форма, соответствующая решению задачи об истечении из-под щита (рис. 5,б, кривая ∞).

Следует отметить, что при $\tau < 0$ образы точек перегиба $-\mu$ и $-\nu$ совпадают и при дальнейшем уменьшении τ становятся комплексно сопряженными (обозначим их $-\mu \pm i\nu$). При этом внутри области на плоскости \bar{E} появляется точка ветвления M , являющаяся образом точки $\zeta = -\mu + i\nu$. Линия «склейки» на плоскости \bar{E} начинается с некоторой точки на границе области, проходит через точку ветвления, разворачивается и уходит на бесконечность (рис. 6).

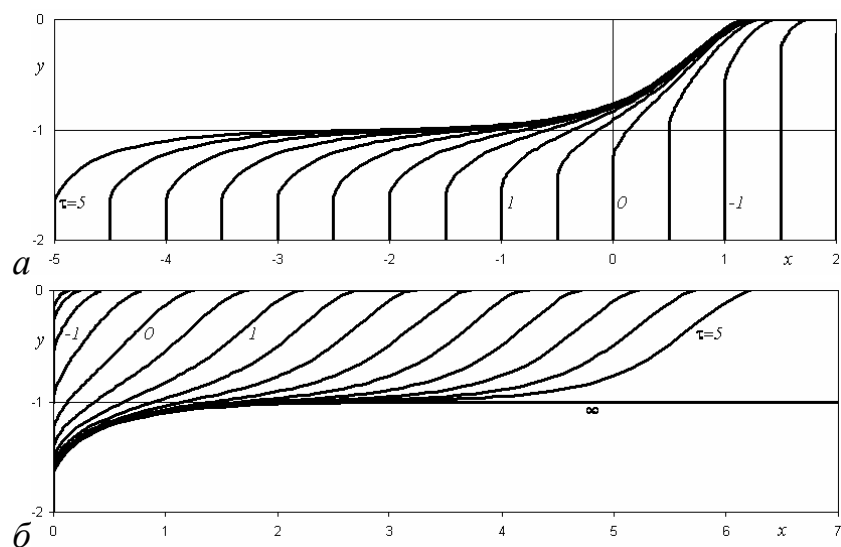


Рис. 5. Формы обрабатываемой поверхности: а – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ $S(0,0)$; б – в неподвижной системе координат.

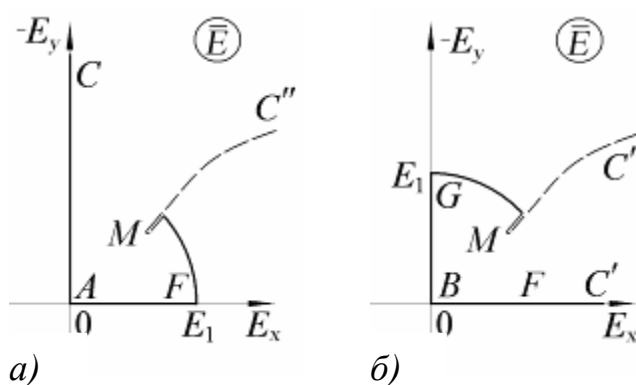
Как видно из рис. 5,б, при $\tau \rightarrow -\infty$ длина обработанной части поверхности уменьшается и стремится к нулю.

При решении задачи в случае отсутствия точек перегиба видоизменяется квадратное уравнение (6)

$$\left[(\mu + 1)^2 + \nu^2 \right] \gamma + 2(\mu^2 + \nu^2) (\gamma - 1) \left] \zeta + \left((\mu + 1)^2 + \nu^2 \right) \sqrt{\gamma} \sqrt{\zeta} - 2(\mu^2 + \nu^2) (\gamma - 1) = 0$$

и, в соответствии с этим формул (7), по которым определяются $\sqrt{\delta}$ и $\sqrt{\beta}$.

Рис. 6. Формы
образа МЭП на плос-
кости годографа:
а – первый лист;
б – второй лист.



Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-65497.2010.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. – 2010, № 10. – С. 77-81.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С НАДКРЫЛКОМ

Павлова Н.А.

Чебоксарский политехнический институт
Московского государственного открытого университета

Исследуемая задача сводится к обтеканию системы двух профилей. Применяется метод прямой итерации А. Г. Терентьева. Особое внимание уделяется численному анализу влияния надкрылка на форму каверны и гидродинамические характеристики профиля.

The investigated problem comes to a flow of the system of two foils. The method of the direct iteration, developed by Terentjev A.G., is applied. The special attention is given to the numerical analysis of influence of an upper wing on the form of a cavity and hydrodynamic characteristics of a foil.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изначально рассмотрим обтекание изолированного профиля с частичной кавитацией. Предполагается, что жидкость идеальная несжимаемая и невесомая, а течение плоское потенциальное и стационарное. Хорда основного профиля, плотность жидкости и скорость на бесконечности принимаются равными единице. Обозначим через γ_c и γ_b границы каверны и смачиваемой поверхности профиля соответственно.

Данная гидродинамическая задача сводится к отысканию гармонической функции тока, ψ , удовлетворяющей следующим граничным условиям: $\psi = \tilde{n} = const$ на γ_c и γ_b ; нормальная производная $\partial\psi / \partial n = -V_0 = const$ на γ_c ; $\psi \approx (\Gamma/2\pi)\ln(|x+iy|) + y$ на бесконечности. Здесь n – внешняя нормаль, Γ – циркуляция скорости; вместо скорости V_0 обычно задают число кавитации $\sigma = V_0^2 - 1$. Однако, при численных расчетах целесообразно задавать длину каверны, а скорость и число кавитации определять.

Кроме того, на задней кромке профиля выполняется условие Жуковского – Чаплыгина $\lim_{s \rightarrow a+0} V(s) + \lim_{s \rightarrow a-0} V(s) = 0$, где a – дуговая координата задней кромки; дуговая координата, s , выбрана таким образом, чтобы область течения оставалась слева.

Данная постановка справедлива также и для системы профилей, следовательно, задача обтекания профиля с надкрылком сводится фактически к задаче обтекания системы двух профилей. Расположим над частично кавитирующим профилем надкрылок в точке (x_0, y_0) , линейные размеры которого в четыре раза меньше единичной хорды профиля.

2. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Численный алгоритм основан на применении обобщенного интегрального соотношения Грина на сингулярные функции, данного в [1]. В случае обтекания системы двух профилей безграничным потоком с единичной скоростью, параллельной действительной оси, интегральное уравнение имеет вид

$$\oint_C V(s_\tau) G(\tau, z) ds_\tau + a_k = y, \quad z = x + iy \in C \in \bigcup_k C_k \quad (1)$$

Здесь $G(\tau, z) = -\frac{1}{2\pi} \ln|\tau - z|$ – функция Грина; $V(s_\tau)$ – распределение скорости на профиле; C_k – граница k -го тела; a_k – постоянная, равная значению функции тока на k -м профиле ($\psi_k = a_k$), $k = 1, 2$.

В двухсвязной области (2 контура в потоке) интегральное уравнение (1) содержит 2 неизвестных параметра a_k , для определения которых необходимо задать 2 условия. Такими условиями являются условия Жуковского – Чаплыгина на задней кромке каждого профиля

$$\lim_{s \rightarrow s_k + 0} V(s) + \lim_{s \rightarrow s_k - 0} V(s) = 0 \quad (2)$$

Дискретизация интегрального уравнения (1) осуществляется методом граничных элементов [2]. Удовлетворяя далее уравнение (1) лишь в контрольных точках и присоединяя условия (2), приходим к системе $N+2$ линейных уравнений относительно N значений скорости V_n и постоянных c_1 и c_2 , которую можно записать в матричной форме

$$\mathbf{D}\mathbf{W} = \mathbf{Q} \quad (3)$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1N} & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{N1} & \dots & D_{NN} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Если контур тела задан, то из уравнения (3) определяется решение

$$\mathbf{W} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q} \quad (5)$$

Далее применяется метод прямой итерации А.Г. Терентьева [3], схема которого приведена ниже

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(j-1)}, \mathbf{Q}^{(j-1)} &\xrightarrow{(5)} \mathbf{W}^{(j)} \xrightarrow{\text{коррекция скорости}} \mathbf{V}^{(j)} \xrightarrow{(4)} \\ &\rightarrow \mathbf{Q}^{(j)} \xrightarrow{\text{коррекция ординат}} \mathbf{Y}^{(j)} \xrightarrow{\text{интерполяция ординат}} \mathbf{y}^{(j)} \rightarrow \mathbf{D}^{(j)}, \mathbf{Q}^{(j)} \end{aligned} \quad (6)$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Все расчеты в данной работе проводятся на примере обтекания профиля Жуковского, который в общем случае характеризуется тремя параметрами d , h и c . Первые два параметра определяют толщину и искривленность профиля [4], третий – закругленность задней кромки. Параметрическую зависимость ординаты и абсциссы профиля можно найти из отображающей функции Жуковского. На рис.1 показано влияние надкрылка ($h = 0.1, d = 0.05, c = 0$) на форму каверны для профиля ($h = 0.1, d = 0.05, c = 0$), $\alpha = 10^\circ$ при различных её расположениях: а) при различных ординатах y_0 надкрылка с углом атаки $\alpha = 25^\circ$, фиксированной абсциссой $x_0 = 0.1$ и длине каверны $L_c = 0.997$ основного профиля, полученные гидродинамические характеристики данной конфигурации показаны в таблице 1; б) показано конфигурация при фиксировании надкрылка с углом атаки $\alpha = 20^\circ$, в точке $(-0.1, 0.15)$, гидродинамические характеристики приведены в таблице 2;

Рис. 1. Влияние надкрылка на форму каверны при различных её расположениях:
а) разные ординаты надкрылка при фиксированной длине каверны;
б) конфигурация каверны при фиксировании надкрылка.

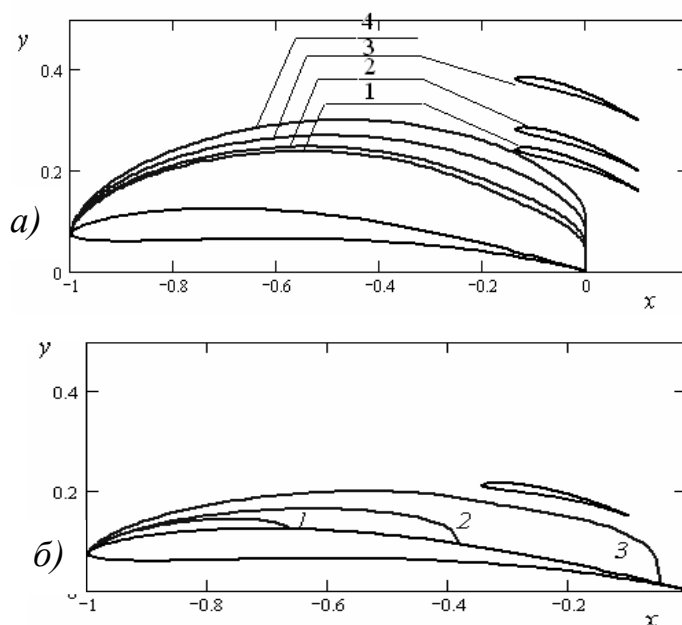


Таблица 1

№	y_0	σ	C_y		C_M		C_x	
			Основ. профиль	Надкрылок	Основ. профиль	Надкрылок	Основ. профиль	Надкрылок
1	0.15	2.712	3.412	-1.206	-1.704	0.26	0.137	-0.531
2	0.2	2.952	3.685	-0.88	-1.838	0.202	0.095	-0.355
3	0.3	3.218	3.986	-0.046	-1.984	0.055	0.012	-0.08
4	1	3.197	3.996	3.394	-1.985	-0.556	-0.076	0.354

Из рис. 1 можно сделать вывод, что надкрылок влияет на каверну только локально, чем ближе каверна, тем уже становится форма каверны.

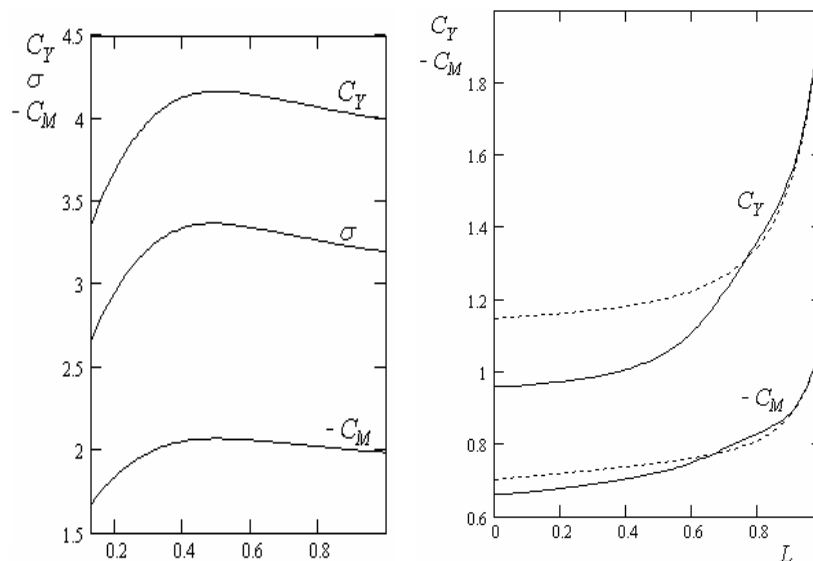
Влияние надкрылка на число кавитации σ , коэффициенты подъемной силы C_y и гидродинамического момента C_M относительно задней кромки основного профиля показаны на рис. 2, где пункты а) и б) рассчитаны для

случая 1а) и 1б) соответственно. Пунктирными линиями на рис. 2б) показаны расчеты, проведенные для изолированного профиля.

Таблица 2

№	L_c	σ	C_y		C_M		C_x	
			Основ. профиль	Надкрылок	Основ. профиль	Надкрылок	Основ. профиль	Надкрылок
1	0.323	1.563	0.993	1.44	-0.695	-0.219	-0.057	0.226
2	0.603	1.313	1.224	0.779	-0.788	-0.085	-0.046	0.179
3	0.942	1.674	2.065	0.008	-1.109	0.011	0.001	0.004

*Рис. 2. Влияние надкрылка на гидродинамические характеристики основного профиля:
а) разные ординаты надкрылка при фиксированной длине каверны;
б) при фиксировании надкрылка.*



Из рис. 2а) следует, что максимальные величины гидродинамических характеристик достигаются при удалении надкрылка от основного профиля на расстояние 0.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике. Чебоксары: Чув. гос. ун-т, 1987. 79с.
2. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Метод граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524с.
3. Терентьев А. Г. Итерационный метод в численной гидродинамике // Образование. Наука. Производство. Инновационный аспект. Москва.: Изд-во МГОУ, 2005. Вып. 3. Т. 1. С. 238 – 243.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987, 688 с.

МЕТОД РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТОК ДОЗВУКОВЫМ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Петров А.Г.

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского

Представлен оригинальный метод расчёта обтекания решеток дозвуковым потоком вязкого газа. Метод позволяет вычислять распределение давления на контуре и определять точки отрыва при больших числах Рейнольдса, находить профили, близкие к безотрывным, и проводить оптимизацию профилей прямым методом. Сначала решается задача обтекания потенциальным потоком несжимаемой жидкости, затем решаются уравнения пограничного слоя и определяются точки отрыва из условия равенства в них касательного напряжения. По формулам Кармана-Дзяна по найденному распределению коэффициента давления для несжимаемой жидкости и числу Маха пересчитывается коэффициент давления для потока вязкого газа.

ВВЕДЕНИЕ

Задачу обтекания решёток профилей гидротурбин при больших числах Рейнольдса можно решать путём сочетания методов обтекания тел идеальной жидкостью с теорией пограничного слоя [1, 2], если характер течения близок к безотрывному. В этом случае сначала определяется потенциальное обтекание контура, а затем по вычисленному распределению давления на границе идеальной жидкости можно решать соответствующее уравнение пограничного слоя. Из него, в частности, можно найти касательные напряжения и точки отрыва. В такой постановке задачу можно решить с высокой точностью, и решение будет моделировать реальное течение вязкой жидкости. Такой подход достаточно надёжен и не связан с проблемой устранения схемной вязкости, возникающей при численных расчетах по разностным схемам.

Для решения задачи потенциального обтекания контура произвольного очертания ниже применяется метод граничных элементов. Решение подобных задач сводится к интегральным уравнениям с сингулярным ядром. Приводятся квадратурные формулы высокого порядка точности, с помощью которых интегральные уравнения заменяются системой линейных алгебраических уравнений. Порядок системы определяется точностью расчета, т.е. количеством точек на контуре.

В качестве примеров рассмотрены решения плоских задач обтекания решетки профилей потенциальным потоком идеальной жидкости с циркуляцией, а также при учёте пограничного слоя и отрыва потока.

1. О МЕТОДЕ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В основе численного метода решения уравнения Лапласа, моделирующего обтекание решётки профилей идеальной жидкостью, лежит интегральное тождество, связывающее значения гармонической функции с её нормальной производной на границе области. Ядро интегрального уравнения в плоских и осесимметричных задачах имеет логарифмическую особенность. Квадратурные формулы третьего порядка точности для интегралов с такой особенностью были получены в работах [3 – 6] и применены для расчета кумулятивных струй, образующихся при захлопывании кавитационной полости вблизи стенки. В зарубежной литературе такой метод назван в конце 1970-х – начале 1980-х годов методом граничных элементов [7] и получил широкую известность и популярность наряду с методом конечных элементов.

Интегральное уравнение аппроксимируется линейной системой с помощью специально разработанных квадратурных формул. От простоты и точности квадратурных формул зависит эффективность расчётов. Можно достигнуть существенного упрощения и повышения точности численных схем с помощью специальных квадратурных формул для периодических функций (см. [8-12]). Периодичность возникает, если ввести координату точки на контуре как длину дуги кривой, отсчитываемой от фиксированной точки.

2. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Для бесконечно дифференцируемых функций периода l можно получить простые и весьма точные формулы для вычисления интегралов [8-9]

$$\int_0^l y(x) dx = h \sum_{j=1}^N y_j, \quad \int_0^l y(x) \ln \left| \sin \frac{\pi}{l} (x - x_i) \right| dx = h \sum_{j=1}^N \alpha(|i - j|) y_j, \quad (1)$$

$$\alpha(m) = - \left(\ln 2 + \frac{(-1)^m}{N} + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi km}{N} \right), \quad M = N/2,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, N, \quad h = l/N$$

Остаточный член R_N убывает быстрее любой степени $(1/N)^n$, (n – любое сколь угодно большое число), что обеспечивает очень быструю сходимость приближений интеграла с ростом N (количество верных знаков растёт пропорционально N).

Можно показать, что эта формула – точная для тригонометрических полиномов вида

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M a_k \cos \frac{2\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{l}.$$

Из квадратурной формулы (1) вытекает важное следствие для построения численных схем метода граничных элементов.

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{+\infty} = v_{\infty 1}, \quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{+\infty} = v_{\infty 2}. \quad (5)$$

Кроме того, функция Ψ имеет период h (шаг решетки) по переменной x , а циркуляцию Γ будем (для рассматриваемого невязкого потенциального течения) вычислять из условия Жуковского-Чаплыгина схода линий тока с острой кромки.

Решение краевой задачи (4-6) имеет следующее асимптотическое представление при $|y| \rightarrow \infty$

$$\Psi = U_2 x + U_1 y - \frac{\Gamma}{4\pi} \lambda |y| + C + O(e^{-\lambda|y|}), \quad \lambda = 2\pi/h, \quad (6)$$

где U_1 , U_2 и C – неизвестные постоянные, подлежащие вычислению.

Отсюда видно, что при $\Gamma \neq 0$ предельные значения скорости по разные стороны от решетки имеют разные значения. На входе в решетку $v_{\infty 1}$, $v_{\infty 2}$ выражаются через U_1 , U_2 и циркуляцию следующим образом:

$$v_{\infty 1} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{+\infty} = U_1 - \frac{\Gamma}{2h}, \quad (7)$$

$$v_{\infty 2} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{+\infty} = U_2.$$

Если шаг решетки устремить к бесконечности ($h \rightarrow \infty$), то получим обтекающие единичного профиля. В этом случае $v_{\infty 1} = U_1$, $v_{\infty 2} = U_2$. Для решетки профилей появляются дополнительные два неизвестных параметра U_1, U_2 , которые нужно вычислять.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА

Сформулированная задача для решетки профилей (4) – (6) сводится к решению системы интегральных уравнений [13]

$$AV(s) = 2\pi[C + U_2 x_i + U_1 y_i], \quad \int_0^l V(s) ds = -\Gamma. \quad (8)$$

$$AV(s) = -\int_0^l G(s, s') V(s') ds',$$

где s и s' – координаты точек M и M' , расположенных на профиле, $V(s)$ – распределение скорости на профиле. В качестве координаты выбирается длина дуги от фиксированной точки M_0 до точки M . Произвольная точка M определяется декартовыми координатами x, y или комплексным числом $z = x + iy$. Функция Грина $G(M, M')$ равна действительной части аналитической функции комплексных переменных

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

$$G = \text{Real} \ln \left[\frac{2}{\lambda} \sin \frac{\lambda(z' - z)}{2} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2}{\lambda^2} [\text{ch}(\lambda(y' - y)) - \cos(\lambda(x' - x))] \right]. \quad (9)$$

Эта функция – гармоническая по x, y и x', y' , имеет период по переменной $x'-x$, равный шагу решетки h и особые точки $y'-y = 0, x'-x = nh, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

В окрестности особой точки $z' = z$ функция Грина имеет разложение

$$G = \ln r + o(r^2), \quad r = |z' - z|.$$

По распределению скорости $V(s)$ и постоянной C , вычисляется функция тока Ψ во всех точках течения жидкости вне контура L

$$\Psi(M) = C + U_2 x_i + U_1 y_i + \frac{1}{2\pi} \oint_L [G(M, M') V(M')] ds. \quad (10)$$

Если точки M и M' расположены на профиле, то функция Грина $G(M, M')$ является функцией двух аргументов $G(s, s')$.

5. СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ НА ПРОФИЛЕ

Координату точки $M(x, y)$ на контуре удобно задавать параметрическими уравнениями $x = \varphi(\zeta), y = \psi(\zeta)$, где $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ – функции параметра ζ с единичным периодом (для проведения численных расчетов вводится дискретизация контура конечным числом точек $M_1, M_2, \dots, M_N = M_0$ так, чтобы точке M_i соответствовало значение $\zeta = \zeta_i = i/N, i = 1, 2, \dots, N$). Параметр ζ и координата s связаны дифференциальным соотношением

$$dx = l f(\zeta) d\zeta, \quad \int_0^1 f(\zeta) d\zeta = 1, \quad (11)$$

где $f(\zeta)$ – плотность точек на контуре, ее значения при $\zeta = \zeta_1$ можно вычислять с помощью квадратурной формулы для периодической функции (1)

$$S_i = \sqrt{(dx/d\zeta_i)^2 + (dy/d\zeta_i)^2}, \quad l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i, \quad f_i = \frac{1}{l} S_i. \quad (12)$$

С помощью замены переменной $s \rightarrow \zeta$ интегральный оператор A приводится к виду

$$AV(\zeta) = - \int_0^1 G(\zeta, \zeta') V(\zeta') l f(\zeta') d\zeta'. \quad (13)$$

Если воспользоваться квадратурной формулой для интеграла от периодической функции с логарифмической особенностью, то система интегральных уравнений (9) заменится системой линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} V_j = 2\pi [C + U_2 x_i + U_1 y_i], \quad \frac{l}{N} \sum_{j=1}^N V_j = -\Gamma. \quad (14)$$

Отсюда определяются значения скорости вдоль профиля V_1, V_2, \dots, V_N и C . Ниже представлен способ вычисления трёх величин U_1, U_2 и Γ , оставшихся пока неизвестными.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ПРИ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ

Вследствие линейности уравнения Лапласа функция тока Ψ и соответствующая ей скорость на границе профиля разбивается на три слагаемых

$$\Psi = U_1 \Psi_1 + U_2 \Psi_2 + \Gamma \Psi_3, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial n} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \Gamma V_3, \quad (15)$$

где $U_1 = U \sin \alpha$, $U_2 = U \cos \alpha$, течения с функциями тока Ψ_1 и Ψ_2 имеют циркуляции равные нулю, а с функцией Ψ_3 циркуляция равна -1 . Отсюда функции Ψ_k и V_k , $k = 1, 2, 3$ находятся единственным образом. Из (15) получаем следующие системы уравнений для значений $(V_k)_j$ в точках контура x_j, y_j и постоянных C_1, C_2 и C_3 .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N A_{ij} (V_1)_j &= 2\pi(C_1 + y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N f_j (V_1)_j = 0. \\ \sum_{j=1}^N A_{ij} (V_2)_j &= 2\pi(C_2 + x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \sum_{j=1}^N f_j (V_2)_j = 0. \\ \sum_{j=1}^N A_{ij} (V_3)_j &= 2\pi C_3, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \frac{l}{N} \sum_{j=1}^N f_j (V_3)_j = -1. \end{aligned} \quad (16)$$

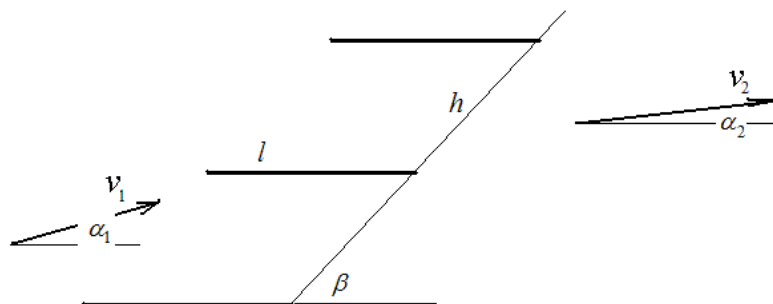
В точке схода потока M $V_M = 0$. Отсюда следует уравнение для определения циркуляции

$$V_M = U_1 (V_1)_M + U_2 (V_2)_M + \Gamma (V_3)_M = 0. \quad (17)$$

При наличии острой кромки, с которой осуществляется сход потока, условие (18) называется условием Чаплыгина-Жуковского. Однако, для более точного вычисления давления на контуре в вязком потоке жидкости циркуляция находится из другого условия, описанного ниже.

Входящие в это уравнение величины U_1, U_2 выражаются через заданные скорости $v_{\infty 1}$ и $v_{\infty 2}$ по формулам (7). Проведены серии расчётов различных видов решёток, которые показали, что время счёта одного варианта составляет около 0,3 секунды при 100 расчётных точках на профиле.

Сравнение с точным решением обтекания пластин. В монографии [14] приведено точное решение обтекания решетки пластин, изображенных на фиг. 2.



Фиг. 2. Решетка пластин.

Приведем точное решение задачи при $\alpha_1 = 10^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $l = 1$, $h = 1$, $v_1 = 1$. Для построения решения находится корень уравнения

$$\sin \beta \ln \frac{E(\varepsilon) + 2\varepsilon \sin \beta}{E(\varepsilon) - 2\varepsilon \sin \beta} + 2 \cos \beta \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon \cos \beta}{E(\varepsilon)} = \pi$$

$$E(\varepsilon) = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2 \cos 2\beta + \varepsilon^4}$$

Он оказывается равным $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.775344$. После этого вычисляется значение $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.775344$. После этого вычисляется значение

$$k_0 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \varepsilon_0^2}{1 + \varepsilon_0^2} \operatorname{ctg} \beta \right) = -0.407318$$

и циркуляция

$$\Gamma = -4\varepsilon_0 \frac{E(\varepsilon_0)E_1(\varepsilon_0)}{(1 - \varepsilon_0^2)(1 - \varepsilon_0^4)} \sin \alpha_1 = -0.326936$$

$$E_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos k_0$$

Зависимость скорости V от координаты точки на пластинке $x \in (-0.5, 0.5)$ определяется из параметрического уравнения

$$V(\tau) = -\frac{E_1(\varepsilon) \left(\sin \left(\tau - \frac{k_0 + k_2}{2} \right) + \sin \frac{k_0 - k_2}{2} \right)}{(1 - \varepsilon_0^2)(1 + \cos(\tau - k_0)) \cos \frac{k_0 - k_2}{2}}$$

$$x(\tau) = -(\psi(\tau) \cos \beta + \varphi(\tau) \sin \beta),$$

$$\varphi(\tau) = \ln \frac{E(\varepsilon_0)}{1 + \varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 \cos \tau}, \quad \psi(\tau) = \arg(1 - \varepsilon_0^2, 2i\varepsilon_0 \sin \tau),$$

где k_2 - корень уравнения

$$(1 - e^2) \cos \frac{k_0 - k_2}{2} = (1 + e^2) \sin \frac{k_0 - k_2}{2} - 2e \sin \frac{k_0 + k_2}{2} \operatorname{tg} \alpha_1$$

Проведем сравнение этих теоретических результатов с численным расчетом решетки эллипсов с полуосью $a = 1/2$ и полуосью b , которую будем уменьшать. Для определения исходных параметров решетки эллипсов, соответствующих fig. 2 следует повернуть рис. 2 на угол β по часовой стрелке. Тогда для углов α и γ получим следующие значения:

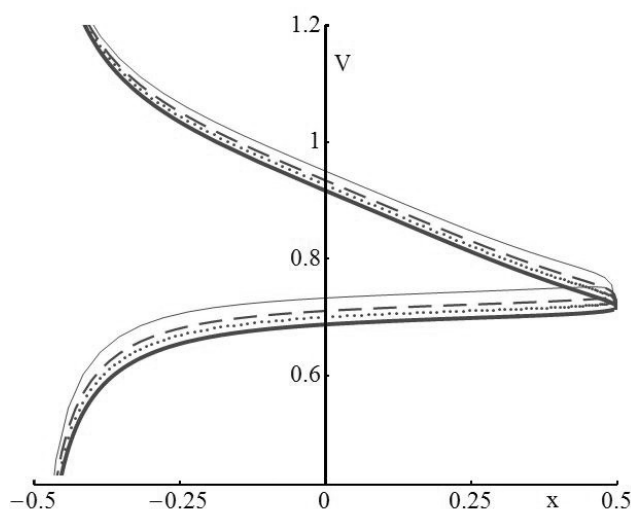
b	N	Г	b	N	Г
0.02	64	-3.0745	0.01	256	-3.1771
0.02	128	-3.0753	0.005	256	-3.2224
0.01	128	-3.1767	0.005	512	-3.2471

Как видно из таблицы, значение циркуляции при уменьшении b действительно приближается к теоретическому $\Gamma = -3.2694$.

На фиг. 3 точное распределение скорости на пластинке (жирная линия) сравнивается с расчетными значениями скоростей на эллипсах с различными значениями полуосей b : тонкая линия при $b = 0.02$, штриховая линия при $b = 0.01$ и точки при $b = 0.005$.

При одном и том же значении x имеются два значения скорости: меньшее на нижней стороне пластинки и большее на верхней. При уменьшении полуоси b в 2 раза отличие скоростей на обеих сторонах пластинки от точных значений

уменьшается тоже примерно в 2 раза. При $b = 0.0025$ расчетная и теоретические кривые на графике будут неотличимы.



Фиг. 3. Сравнение точной и расчетных значений скорости на пластине.

7. РАСЧЁТ ТОЧКИ ОТРЫВА

При большом числе Рейнольдса $Re = v_\infty L / \nu$ где L – характерный размер профиля, v_∞ скорость жидкости на входе, ν – коэффициент кинематической вязкости, вблизи границы профиля уравнения Навье-Стокса приближаются уравнениями пограничного слоя

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u v}{\partial y} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

где u и v – компоненты скорости вдоль и поперек пограничного слоя; здесь, как обычно в теории пограничного слоя x и y – координаты вдоль и поперек пограничного слоя. На границе профиля $y = 0$ принимается условие прилипания $u = v = 0$, а на бесконечности (под бесконечностью здесь понимается внешняя граница пограничного слоя, весьма близко отстоящая от профиля) – условие $u \rightarrow V$, $v \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Функция $V(x)$ – распределение скорости потенциального течения вдоль границы профиля, определяемая по изложенной выше численной схеме для потенциального течения. Строго говоря, контур профиля при этом следует нарастить на толщину вытеснения пограничного слоя.

Уравнение (19) существенно проще для численного решения, чем уравнения Навье-Стокса. Кроме того, существуют однопараметрические методы построения его приближенного решения. Наиболее эффективны методы Кочина-Лойцанского и Лойцанского, изложенные в [1], стр. 98-107 для ламинарного погранслоя. Согласно методу Лойцанского касательное напряжение на границе τ выражается аналитически через функции $V(x)$ и $\zeta(f)$:

$$\tau = \frac{\mu V(x)}{\delta^{**}(x)} \zeta(f), \quad \delta^{**}(x) = \sqrt{\frac{\nu f(x)}{V'(x)}}, \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{aV'(x)}{[V(x)]^b} \int_0^x [V(\xi)]^{b-1} d\xi.$$

Для эмпирических параметров в [1] на стр. 107 рекомендованы следующие значения $a = 0,44$; $b = 5,75$, а для зависимости $\zeta(f)$ приведена таблица, которая аппроксимируется следующей степенной функцией

$$\zeta(f) = \alpha(f_s + f)^\gamma, \quad \gamma = 0,74; \quad f_s = 0,089, \quad \alpha = 1.3$$

В итоге для касательного напряжения получим следующую аналитическую аппроксимацию

$$t = \frac{mV(x)^{1+b/2} a(f + f_s)^g}{\sqrt{naT_0^x (x)^{b-1} dx}}$$

Отсюда для области безотрывного обтекания $\tau > 0$ получаем неравенство

$$f_1(x) = \frac{f + f_s}{a} = \frac{V'(x)}{V(x)^b} T_0^x \quad V(x)^{b-1} dx + \frac{f_s}{a} > 0, \quad \frac{f_s}{a} \gg 0,089$$

К этому же критерию пришли в работе [16] с несколько иными значениями параметров. Различие возникло из-за разного выбора методов решения уравнений пограничного слоя: в [15,16] и настоящей работе выбран метод KL (Кочина-Лойцянского), а в [17] - метод L (Лойцянского). Замечательно, что и для турбулентного режима критерий безотрывного обтекания имеет такой же вид, но с другими значениями параметров. Эмпирические постоянные в критериях безотрывности показаны в следующей таблице

Type BL	Laminar BL		Turbulent BL		
Method	L	KL	L	BZ	KL
a	0.44	0.45	1.17	1.00	1.17
b	5.75	5.35	4.75	4.00	4.75
f_s	0.089	0.068	2.53	0.69	2.00

Здесь BZ обозначает метод Г.М. Бам-Зеликовича. Таким образом, отрыв происходит в области с достаточно быстро убывающей скоростью $V(x)$. В области нарастания скорости отрыва не будет. Полезно выразить выражение для касательного напряжения через безразмерную скорость $v(x) = V(x)/U_\infty$. Тогда касательное напряжение примет вид

$$\frac{t}{t_0} = aa^{g-\frac{1}{2}} V(x)^{1+\frac{b}{2}} (f_1(x))^g \sqrt{L/T_0^x V(x)^{b-1} dx}$$

$$t_0 = \frac{mU_\infty}{L} \sqrt{Re} = \frac{rU_\infty^2}{\sqrt{Re}}, \quad Re = \frac{LU_\infty}{\nu}$$

Для ламинарного режима обтекания $aa^{g-1/2} \approx 1.07$. Сравнение с точными и численными решениями уравнений пограничного слоя для различных профилей показывают, что ошибка предлагаемой формулы порядка 1%. Так, для обтекания пластинки, вместо точной формулы Блазиуса $\tau = 0,332\sqrt{\mu\nu^3_\infty/x}$ имеет место $\tau = 0,327\sqrt{\mu\nu^3_\infty/x}$.

Для обтекания водой кругового цилиндра радиуса $R = 4.87$ см при скорости набегающего потока $v_\infty = 19,2$ см/сек и числе Рейнольдса $Re = Rv_\infty / \nu = 9350$ в монографии [1] (стр. 82) приводится следующее распределение скорости $V(x) = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,00033x^5$, найденное из эксперимента. Заметим, что оно существенно отличается от теоретического $V(x) = 2v_\infty \sin(x/R)$, что в условиях данного эксперимента соответствует следующему тэйлоровскому разложению $V(x) = 7,885x - 0,05541x^3 + 0,0001168x^5$. Это отличие связано с отрывным характером течения, которое не учитывается в последней теоретической зависимости.

Распределение касательного напряжения для ламинарного течения на границе кругового цилиндра по представленному выше экспериментальному распределению скорости $V(x)$ вычислялись двумя способами: а) по формуле (20) и б) путем численного решения уравнения пограничного слоя (18) с использованием численной схемы. Сравнение полученных распределений показало их хорошее согласие, практически неотличимое на графике до точки отрыва, в которой касательное напряжение равно нулю. Так, угол отрыва по прямому расчёту (18) примерно равен 81° , а по формуле (20) – 79° . В эксперименте точка отрыва определяется углом 81° .

На фиг. 4 представлены зависимости от параметра безразмерного касательного напряжения при симметричном обтекании эллипса $x = b \cos y = \sin$ потоком направленным по большой оси эллипса. Сплошная линия - расчет по теоретической формуле (7.2), точками, кружочками и штриховой линией обозначены расчеты прямым методом решения уравнений Навье - Стокса числах Рейнольдса $10^3; 5 \cdot 10^3; 10^4$. Расчеты уравнений Навье-Стокса проведены по схеме [18] и представлены авторами этой работы. Числа Рейнольдса вычислялись по малой оси эллипса. Распределение давления по лопатке и силовое воздействие потока на неё существенно зависят от того, какую точку принять за точку схода потока с профиля в задаче потенциального обтекания. При обтекании лопатки вязким потоком на спинке профиля и на корытце имеются точки отрыва (схода) потока

За этими точками идёт срывной, сравнительно узкий, след. При этом вполне естественно принять, что давления в точках отрыва должны быть равны, как и скорости на внешней границе пограничного слоя (см. фиг. 4.).

8. УЧЁТ СЖИМАЕМОСТИ ГАЗА

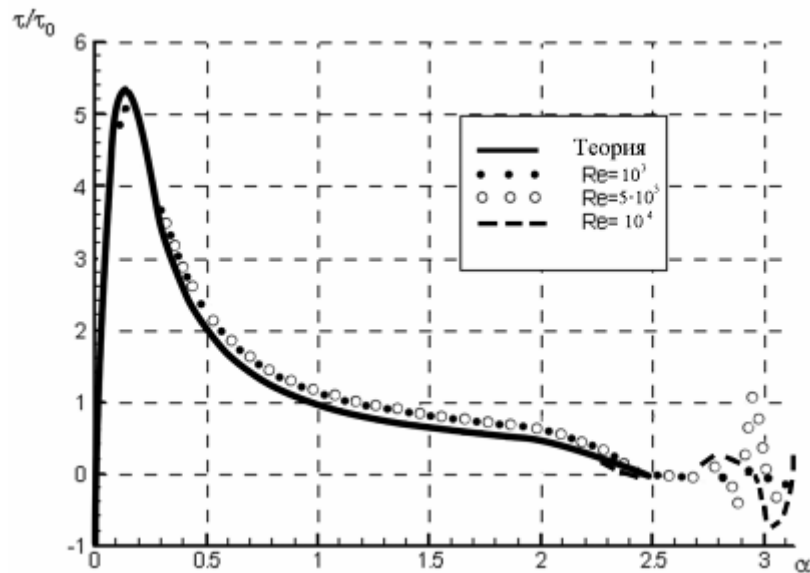
Описанная выше схема позволяет вычислять на контуре лопатки коэффициент давления в рамках модели несжимаемой жидкости

$$c_p = \frac{2(p - p_\Gamma)}{r v_\Gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{v_\Gamma^2}$$

Для сжимаемого газа коэффициент давления

$$c_p = \frac{2(p - p_\Gamma)}{r_\Gamma v_\Gamma^2}$$

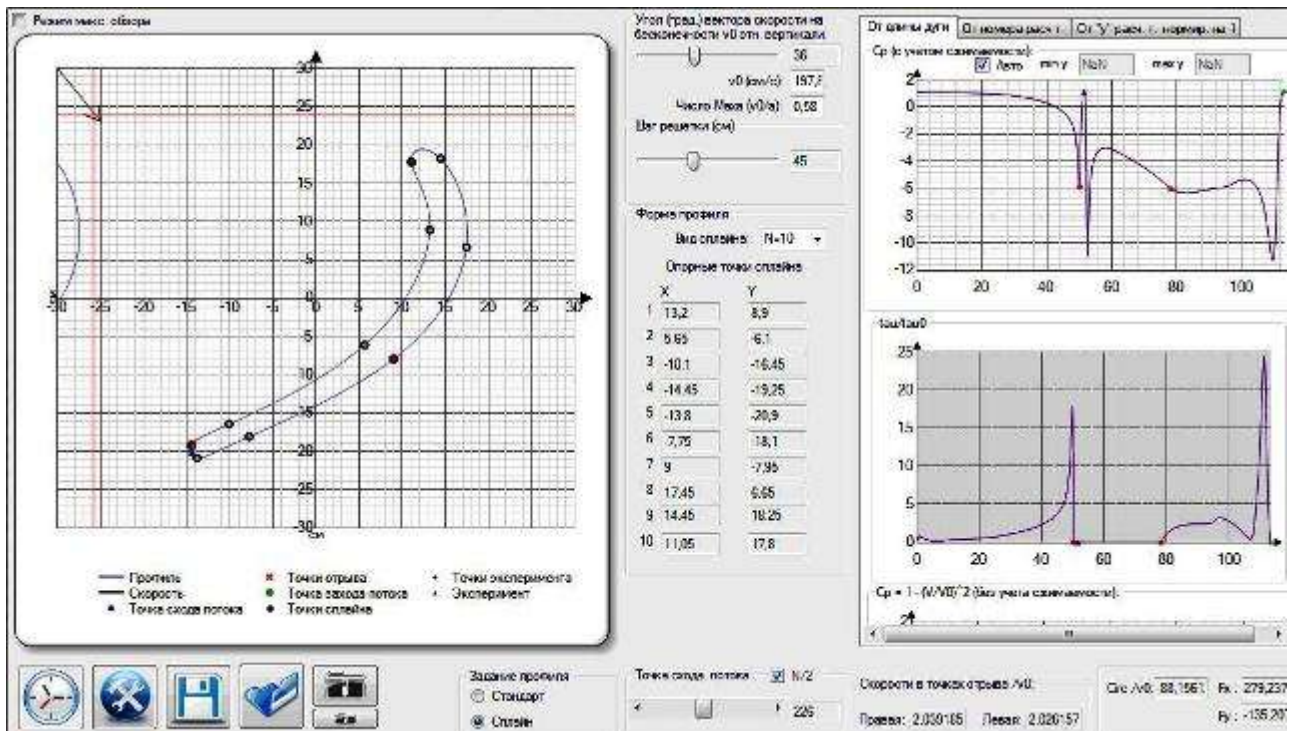
будет зависеть от числа Маха M .



Фиг.4. Зависимости от параметра α безразмерного касательного напряжения при симметричном обтекании эллипса $x = b \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ потоком, направленным по большой оси эллипса.

Для дозвукового обтекания существует приближенная формула Кармана-Цзяна [17], позволяющая пересчитывать коэффициент давления C_{pg} для газа через c_p

$$C_{pg} = \frac{C_p}{(1 - M_{\Gamma}^2)^{1/2} + (1 - (1 - M_{\Gamma}^2)^{1/2})c_p / 2}$$



Фиг.5.

На фиг. 5. приведен пример расчета экспериментального профиля лопатки турбины. Слева изображена лопатка, справа коэффициент давления и касательное напряжение. Синяя точка - критическая точка. Красные точки точки отрыва. Число Маха $M=0.4$.

9. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

1) Оцифрованный профиль (координаты точек профиля в виде таблицы $x; y$) вводится из файла и воспроизводится на дисплее компьютера.

2) Кроме построенного профиля вводятся шаг решетки, вектор скорости потока на входе, число Маха.

3) Тут же приводятся графики коэффициента давления и касательного напряжения. Приводятся точки отрыва (красные точки), критическая точка (синяя), значения компонент силы.

4) Профиль лопатки можно деформировать и тут же получать все гидродинамические характеристики. При этом условие равенства давления в точках отрыва может немного нарушиться, и вручную с помощью соответствующего тумблера, изменяя циркуляцию, можно добиться, чтобы равенство давлений было выполнено.

5) Выводятся все расчетные данные: координаты профиля, таблицы коэффициента давления, касательного напряжения и компоненты силы. Их можно при необходимости вводить при повторных расчетах.

Пример расчета изображен на фиг. 5.

ВЫВОДЫ:

1. Предлагаемые численные схемы расчёта обтекания турбинных лопаток жидкостью, базирующиеся на методе граничных элементов, достаточно просты и не требуют большого времени для расчетов. Они точно учитывают большое изменение кривизны границы, а затрачиваемое время на расчёт одного контура составляет около 0,3 секунды и на порядки меньше, чем время решения уравнений Навье-Стокса обтекания лопаток по существующим пакетам программ, требующим сгущения сетки вблизи границы. Кроме того, в разностных схемах нельзя устранить схемную вязкость, которая при большом числе Рейнольдса становится сравнимой с реальной вязкостью и может иногда приводить даже к качественному изменению характера течения.

2. При обтекании лопаток турбин, близких к безотрывным, предлагаемым методом с высокой точностью можно рассчитывать распределение давления на лопатке и силовые нагрузки. Точки отрыва несложно определяются, что позволяет контролировать предположение о безотрывном характере обтекания. Для расчетов отрывного обтекания лопаток можно дополнять предлагаемую схему расчета уточненным распределением давления в зоне отрыва.

3. Этот же метод можно применять и для расчета ламинарного течения при высоких числах Рейнольдса около осесимметричных тел, как односвязных типа эллипсоида, так и двухсвязных - типа тора с аналогичным методом вычисления циркуляции [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцанский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физмат-лит, 1962.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 711 с.
3. Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г. Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости// Журнал выч. мат. и мат. физики. 1974. т. 14, N3, С. 797-802.
4. Воинов В.В., Воинов О.В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями// ДАН СССР. 1975. т.221. N3. С.559-562.
5. Воинов В.В., Воинов О.В. О движении и заполнении полостей в безграничной жидкости и около плоскости// Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1975. N1.
6. Воинов В.В., Воинов О.В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки// ДАН СССР. 1976. т. 227. N1. С. 63-66.
7. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1984.
8. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Расчет профиля капиллярно-гравитационной волны на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины// Вестник МГУ N2, 1991 г. С. 92-96.
9. Петров А.Г., Смолянин В.Г. Расчет нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины// Прикл. мат. и мех., т. 57, вып. 4, 1993
10. Петров А.Г., Стернин Л.Е., Станкевич Д. Б. Гидродинамический метод расчета плоских течений и оптимизация профилей рабочих лопаток бустерной гидротурбины// Сборник трудов НПО «Энергомаш» им. академика В.П. Глушко. № 23. Москва 2005. С. 27-56.
11. Петров А.Г. Методы расчета обтекания плоских и осесимметричных тел потоком жидкости применительно к гидротурбинам и другим гидродинамическим устройствам//Конверсия в машиностроении. Изд-во ООО «Информ. Конверсия». №5 (78). 2006г. С. 27-33.
12. Петров А.Г., Станкевич Д.Б. Расчет обтекания рабочих лопаток гидротурбин // Конверсия в машиностроении. Изд-во ООО «Информ. Конверсия». N5 (78). 2006г. С. 34-38.
13. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966
14. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Т.~1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
15. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009. 518 с.
16. Петров А.Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости/ ЖВМ и МФ, 2011, том 51, № 7
17. Елизаров А.М., Касимов А.Р., Маклаков Д.В. Задачи оптимизации формы в аэродинамике. М.: Физматлит, 2009. 518 с.
18. Калинин Е. И., Мазо А.Б. Численное решение задач обтекания системы тел в переменных функция тока завихренность, Физико-математические науки// Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 151, N 3, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 2009, 144153.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СУПЕРКАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЗА ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ТЕЛАМИ

Серебряков В.В.

Институт Гидромеханики Национальной Академии Наук Украины
serebryakov_vlasdimir@yahoo.com

Содержание работы включает рассмотрение основных положений асимптотической теории осесимметричной суперкавитации в приближении гидродинамики тонких тел совместно с получением ключевых асимптотических решений и затем разработке на основе этой теории комплекса практических зависимостей для расчета суперкавитационных течений за осесимметричными телами при высокоскоростном движении в воде.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

r, x, t	Цилиндрические координаты, время	U_∞, P_∞, ρ	Скорость движения, гидростатическое давление, массовая плотность жидкости
$r = R(x, t)$	Форма осесимметричной каверны	$\sigma = \frac{P_\infty - P_c}{\rho U_\infty^2 / 2}$	Число кавитации, P_c - давление в каверне
R_n, R_k, L_k, λ	Радиус кавитатора в сечении отрыва струй, максимальный радиус, полу-длина, удлинение стационарной осесимметричной каверны при $\sigma = \text{const}$,	$D; c_{do}, c_d$	Сопротивление кавитатора, коэффициенты сопротивления кавитатора: $\sigma = 0, \sigma > 0$

ВВЕДЕНИЕ

Применение суперкавитации позволяет осуществить обтекание тела в каверне при практически полной изоляции его поверхности от контакта с водой и, тем самым, избежать значительного вязкого сопротивления. При этом минимальные сопротивления при движении в каверне достигаются в случае предельно удлиненных (тонких) каверн при движении в них максимально удлиненных тел с удлинениями, ограниченными только условиями их прочности. Типичный пример течения в случае экспериментальной осесимметричной каверны с искусственным поддувом за диском приведен на Рис. 1. Основы гидродинамики суперкавитации наиболее полно представлены в ряде монографий [6, 11, 29, 32, 36, 42, 57] и др.

Проблема надежного расчета суперкавитационных течений оказываются одной из очень важных, с точки зрения приложений, но также и наиболее сложных проблем. Решение этой проблемы сводится к сложному типу задач математической физики для течения с заранее неизвестными свободными границами. Особенно важными для приложений являются каверны при очень больших удлинениях. Наиболее полно эти течения могут быть исследованы на

основе современных методов нелинейного численного решения задачи. Однако, значительная удлиненность суперкаверн совместно со сложной сингулярной структурой решений оказываются существенными препятствиями для разработки надежных численных решений этих задач. Поэтому в настоящее время достаточно надежные нелинейные численные решения получены только для отдельных, в основном, стационарных тестовых задач [1, 5, 8, 9, 27, 37, 38, 54-56]. При этом, как разработка, так практическое использование методов нелинейного численного расчета связаны с значительными сложностями, в том числе и, вследствие существенной зависимости этих методов от особенностей конкретных задач, возникающих в приложениях, существенно отличных от задач тестовых решений.

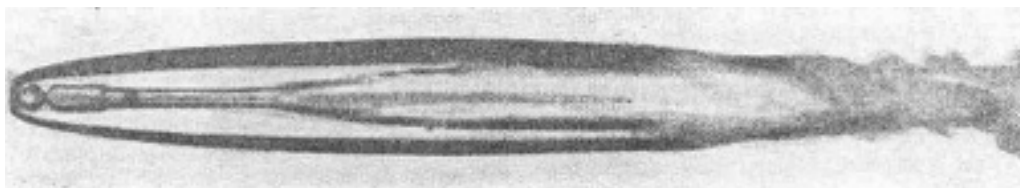


Рис. 1. Экспериментальная осесимметричная каверна с искусственным поддувом за диском.

В то же время приложения требуют простых и, более того, наиболее универсальных методов расчета, не зависящих в значительной мере от особенностей той, или иной задачи. С учетом сложности расчета суперкавитационных течений в этой области был разработан ряд приближенных моделей и зависимостей [10,11, 32, 34, 40]. На основе этих приближенных и эвристических моделей был определен ряд наиболее важных зависимостей для формы и размеров стационарной при $\sigma = \text{const}$ каверны. Доказана близость формы каверны в основной части ее поверхности к эллипсоидальной [10, 11, 36]. Получен закон расширения струй на бесконечности (1а) [1946 [6, 43], описывающий передние участки каверн. Определена зависимость для наибольшего радиуса каверны за кавитатором типа диска $k \sim 0.96 - 1$ (1б), [1957 [10, 32, 36]. Получена зависимость первого приближения для удлинения каверны λ (1с) [1956 [40]:

$$\text{а) } R^2 = \frac{2\sqrt{c_{do}} x}{\sqrt{\ln(x^2/R^2)}} \approx \frac{2\sqrt{c_{do}} x}{\sqrt{\ln x}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln x}{\ln x}\right], \text{ б) } R_k = R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \text{ в) } \sigma = \frac{\ln 1/\sigma}{\lambda^2} \quad (1)$$

Значительная удлиненность наиболее важных для приложений каверн с другой стороны является естественной основой для построения более простых расчетных моделей. Модель на основе известной Гидродинамике Тонких Тел [31, 35] оказалась одной из наиболее эффективных с точки зрения разработки системы наиболее удобных для приложений уравнений и зависимостей. Исследований в этой области представлены значительным количеством работ [3, 4, 7, 12, 13, 14, 15, 16-26, 28, 33, 39, 41,44, 46-53, 59, 60] и др. Содержание статьи включает 2 основных взаимосвязанных раздела. Первая часть посвящена основам теории в приближении Гидродинамики Тонких Тел (ГТТ) [31, 35] на основе Метода Сращиваемых Асимптотических Разложений (МСАР) [58], включая разработку методов решений и получение базовых асимптотических решений

совместно с анализом их основных особенностей. Вторая часть посвящена разработке на основе результатов этой асимптотической теории системы более удобных и универсальных практических зависимостей для расчета основных элементов суперкавитационных течений за осесимметричными и близкими к ним телами.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И БАЗОВЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СУПЕРКАВИТАЦИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГТТ

Гидродинамики тонких тел (ГТТ). Основные разложения ГТТ для потенциала осесимметричного течения идеальной несжимаемой жидкости могут быть получены на основе представления течения около тонкого тела $r = R(x)$ источниками на оси при $L = O(1)$, $r \rightarrow 0$, или $\delta_* \rightarrow 0$ во внутренних переменных $r = \delta_* \hat{r}$, $\hat{r} = r / \delta_* = O(1)$ и имеют вид [31, 35]:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{q(x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + r^2}} dx_1 \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{4\pi} \left\{ q(x) \ln r^2 + q(x) \ln \frac{1}{4x(L-x)} - \int_0^L \frac{q(x_1) - q(x)}{|x-x_1|} dx_1 \right\} +$$

$$+ O\left(r^2 \ln \frac{1}{r}\right), \left(\delta_*^2 \ln \frac{1}{\delta_*}\right); \quad \varphi = \pi U_\infty \frac{dR^2}{dx} \quad (2)$$

В качестве параметра тонкости тонкого тела $\delta_* \rightarrow 0$ используется величина порядка отношения наибольшего диаметра тела к его длине, которая предполагается малой. Следует заметить, что разложения гидродинамики тонких тел в случае остроносых тел справедливы практически во всей области течения. Эти разложения справедливы во внешней области при $x = O(L)$ также и в случае тупоносых окончаний тонкого тела. В этом случае в районе окончаний имеются малые области неоднородности с размерами, в частности в случае эллипсoidalных кромок, порядка $O(\delta_*^2)$. Эти неоднородности могут воздействовать на поток как источники, диполи и другие мульти-поли и пренебрегать этим воздействием без потери точности нельзя.

Асимптотическая постановка задачи в приближении ГТТ. В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости задача для определения течения, формы каверны и сопротивления сводится к решению задачи для уравнения Лапласа при граничных условиях не протекания на заданной поверхности кавитатора и условия не протекания совместно с условием заданного (в большинстве случаев постоянного) давления на неизвестной заранее поверхности каверны. В качестве условий в сечении отрыва струй используются условия непрерывности радиуса и угла поворота в сечении срыва струй с поверхности каверны. При нестационарном обтекании задаются начальные условия для формы кавитатора и каверны в начальный момент и нормальные компоненты скоростей этих поверхностей. Для моделирования задней части каверны обычно используется схема Рошко замыкания каверны на тело некоторой формы. Схема образования

каверны за тонким конусом представлена на рис. 1. Асимптотическая постановка стационарной задачи в приближении ГТТ используя разложения (2) с точностью до малых $\delta_*^2 \ln(1/\delta_*)$ сводится к задаче для интегродифференциального уравнения для формы каверны $r = R(x)$ за тонким кавитатором $r = r_n(x)$ [10, 19, 23]:

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4x(L-x)} - \int_0^{x_s} \frac{d^2 r_n^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \frac{d^2 R^2}{dx^2} dx_1 -$$

$$(\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (1) \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1}$$

$$- \int_{x_s}^L \frac{d^2 R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \frac{d^2 R^2}{dx^2} dx_1 - \frac{dr_n^2}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L} = 2\sigma(x) \quad (3)$$

$$(\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (\ln 1/\delta_*^2)^{-1} \quad (1)$$

a) $[R = r_n(x)]_{x=x_s}$, b) $\left[\frac{dR^2}{dx} = \frac{dr_n^2}{dx} \right]_{x=x_s}$, c) $[R^2 = 0]_{x=L}$ d) $\left[\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \frac{d^2 r_n^2}{dx^2} \right]_{x=x_s}$.

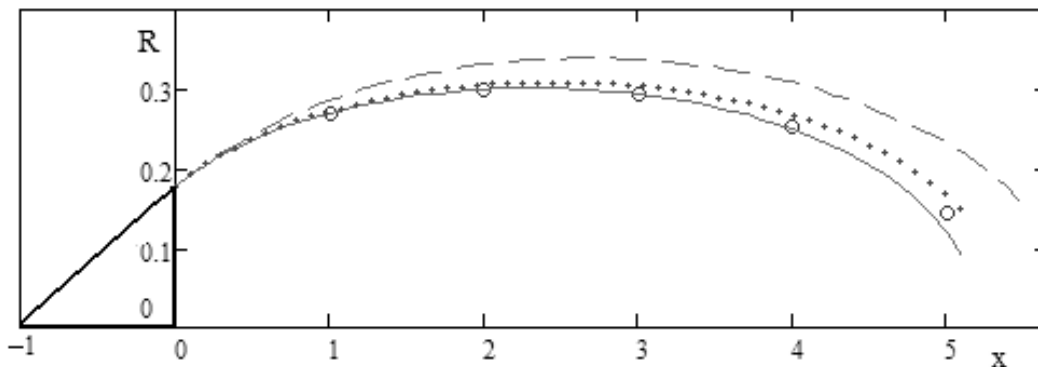


Рис. 2. Тонкая каверна за тонким конусом, $\sigma = 0.04$, $\gamma = 10^\circ$, $l = 1$, асимптотическое решение (б) по параметру тонкости ε
 ----- 1-е приближение – эллипсоидальная каверна,
 ———— 2-е приближение $M = 0$, + + + + 2-е приближение, $M \sim 0.35$,
 ○ ○ ○ ○ нелинейный численный расчет $M = 0$ [9]

Используется полярная система координат r, x с началом в носовой точке кавитатора. Здесь $x = x_s$ координата сечения отрыва. $\sigma = 2(P_\infty - P_c) / \rho U_\infty^2$ - число кавитации, где $P_\infty - P_c$ - разность гидростатического давления и давления в каверне, ρ - массовая плотность жидкости, U_∞ - скорость набегающего потока в обратном движении. Условие (3d) может быть применено в некоторых случаях при не фиксированной координате сечения отрыва.

Параметр δ_* определяет величину порядка отношения наибольшего радиуса каверны к длине системы кавитатор + каверна и в данном случае рас-

считается как малый параметр. Под каждым членом уравнения (3) указаны порядки малости его членов при $\delta_* \rightarrow 0$. Решение предельного при $\delta_* \rightarrow 0$, уравнения обнаруживает тупоносый при $\sigma = \text{const}$ характер формы задней кромки каверны. Исходя из этого последний член в уравнении (3) может рассматриваться в качестве точечного эквивалента заднего замыкания каверны типа Рябушинского. Это замыкание описывается источником давления, моделирующим повышенное давление вблизи кавитаторов малых размеров типа диска, тупого конуса и др. В пределах точности (ГТТ) форма малого тела в замыкании не существенна, но очень важен факт присутствия этого замыкания, воздействие которого на каверну осуществляется универсальным образом. Уравнение (3) предусматривает возможность применения тонких, но тупоносых кавитаторов, в частности, в форме параболоида и также позволяет учесть влияние сжимаемости при дозвуковых скоростях, $\beta = 1 - M^2$, M - число Маха. Следует заметить что уравнение в целом содержит все члены обеспечивающие точность приближения $O(\delta_*^2 \ln 1/\delta_*)$ и пренебрежение некоторыми из членов этого уравнения может снизить его точность до очень малой точности решений первого приближения $O(\ln 1/\delta_*)$. В работе [44] пренебрегается первым членом ИДЕ (3), определяющим правильную асимптотику решения на бесконечности и, соответственно, корректное поведение формы передних участков каверн. В работах [13] пренебрегается членами ИДЕ (3), моделирующим заднее замыкание каверны.

Основы асимптотического подхода [12, 16, 19]. В отличие от (ГТТ) в задачах суперкавитации имеется 2 независимых параметра тонкости, характеризующих отдельно удлинения кавитатора и каверны: ε и δ . В общем случае асимптотические решения должно искажаться по 2м независимым параметрам тонкости. Однако, общего подхода в этом случае пока не разработано. Значительные упрощения задачи достигаются в двух типичных случаях при использовании решений по одному малому параметру с учетом закрепления порядков их отношения ε/δ .

Случай $\varepsilon/\delta = O(1)$ [19, 23, 25] соответствует регулярной задаче возмущений. При этом области кавитатора и каверны оказываются одного порядка, сечение отрыва находится во внешней области и начальные условия в этом сечении не теряется.

Случай $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ [16, 22, 24, 26, 46-48] соответствует сингулярной задаче возмущений. В этом случае при числе кавитации $\sigma \rightarrow 0$ размеры каверны неограниченно возрастают и размеры кавитатора становятся значительно меньшими по сравнению с размерами каверны. Внешнее решение становится непригодным в области начальных условий в сечении отрыва и эти условия теряются. При этом условия отрыва должны быть заменены условиями срачивания внутреннего решения в районе кавитатора с внешним решением.

Условия $\varepsilon/\delta = O(1)$ и $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$ определяют ограничения, накладываемые на степень пригодности соответствующих регулярных и сингулярных решений. Регулярные решения применимы только для случая тонких кавитаторов – типа

конуса и также тупоносых кавитаторов типа параболоида, где возможно получение асимптотических внутренних решений в приближении ГТТ. Регулярные решения обычно достаточно пригодны при не очень сильно различающихся длинах кавитатора и каверны в большинстве случаев не более чем в 5-6 раз. Сингулярные решения применимы как в случае тонких кавитаторов, так и кавитаторов типа диска, конуса с большим углом раствора и т.п. В случае кавитаторов типа диска, возможными являются только сингулярные решения. При этом, внутреннее вблизи кавитатора типа диска решение, является нелинейным и не может быть получено в виде асимптотического решения в приближении ГТТ. Сингулярные решения в случае тонких кавитаторов обычно достаточно пригодны, если длины каверн существенно больше длин кавитатора не менее, чем в 5-6 раз.

Опыт разработки теории показывает что подавляющая часть сложностей и основные сингулярности имеют место уже в постановке стационарных задач. При этом разработка нестационарной асимптотической теории в рамках ГТТ не вносит существенных дополнительных сложностей при получении асимптотических решений. Однако, эффективность аналитических решений в этом случае теряется из за существенно не универсальности и значительного увеличения их размеров зависимостей.

Регулярные решения при $\varepsilon / \delta = O(1)$ - каверны за тонкими кавитатрами. Важность применения тонких кавитаторов обусловлена их специфическими свойствам, которые используются для целей управления движением, компенсации воздействия весомости на форму каверны, применяются в различных технологических процессах обработки различных материалов и жидкостей и др. Ниже находится и исследуется ряд вариантов решения регулярной задачи при стационарном обтекании [12, 19, 23, 48].

Прямой метод решения при заданной длине кавитатора, Асимптотическое решение задачи (3) ищется при заданных: длине кавитатора $\ell = 1$ достаточно произвольной формы $r_n = r_n(x) = \delta \tilde{r}_n(x)$ и числа кавитации $\sigma(x) = (\delta^2 \ln 1 / \beta^2 \delta^2) \hat{\sigma}(x)$, $\hat{\sigma}(x) = O(1)$ при условии $\varepsilon / \delta = O(1)$ и задании различных вариантов $\delta = O(\varepsilon)$. В случае конуса $\varepsilon = \tan \gamma$, γ - угол полу-раствора Сечения отрыва предполагается фиксированным. Решение для формы и длины каверны L_c ищется в виде рядов:

$$a) R^2 = \delta^2 \left[\tilde{R}_0^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2\delta^2)} \tilde{R}_1^2 + \dots \right], \quad b) L_c = \tilde{L}_{c0} + \frac{\tilde{L}_{c1}}{\ln(1/\beta^2\delta^2)} + \dots \quad (4)$$

и сводится к последовательности краевых задач:

$$a) \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} = -2\hat{\sigma}(x) \left[\frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} = \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \right]_{x=0}, \quad \left[\tilde{R}_0^2 = \tilde{r}_n^2 \right]_{x=0};$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \frac{d^2 \tilde{R}_1^2}{dx^2} &= \frac{1}{2\tilde{R}_0^2} \left(\frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \ln \left(\frac{\tilde{R}_0^2}{4(1+x)(1-L_{co})} \right) - \int_{-1}^0 \frac{\frac{d^2 \tilde{r}_n^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2}}{|x_1 - x|} dx_1 - (5) \\
&- \int_0^{L_{co}} \frac{\frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2}}{|x_1 - x|} dx_1 - \frac{d\tilde{r}_n^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \Big|_{x=L_{co}}, \quad \frac{d\tilde{R}_1^2}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tilde{R}_1^2 \Big|_{x=0} = 0
\end{aligned}$$

Решение в квадратурах находится в виде двух членов ряда:

$$\begin{aligned}
R^2 &= R_0^2 + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} R_1^2 = \\
&= [\varepsilon^2 + 2m\varepsilon^2 x] - \left[\int_0^x \frac{(x-x_1)2\sigma(x_1)}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} dx_1 \right] + \frac{1}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} \left[\int_0^x (x-x_1) \frac{d^2 R_1^2}{dx_1^2} dx_1 \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

В ряде случаев, включая конус, решение находится в аналитическом виде. В общем случае более удобен численный расчет на основе решения (6) в виде квадратур. Рис. 2 иллюстрирует точность решения (6): конус $\gamma = 10^\circ$, $\sigma = 0.046$ $l = 1$ в сравнении с данными нелинейного численного расчета [9].

Полуобратный метод решения. Уравнения задачи (3) записываются в системе координат при $x = 0$ в миделе каверны. Решение задачи ищется при заданной длине $L_e = 1$ задней после миделя части каверны по параметру тонкости этой части каверны δ , однако, при условии $\varepsilon/\delta = O(1)$ в виде рядов аналогичных (4а) при начальных и граничных условиях (7):

$$\begin{aligned}
\text{а) } R^2(x) \Big|_{x=0} &= \delta^2, \quad \frac{dR^2(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad R^2(x) \Big|_{x=1} = 0, \\
\text{б) } \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L_s} &= 2R_n \tan \gamma, \quad R^2 \Big|_{x=L_s} = R_n^2, \quad (7)
\end{aligned}$$

где $\delta = 1/\lambda = R_m/L_e$, R_m наибольший радиус каверны. Величина λ в случае каверны за малым кавитатором при $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$, является величиной удлинения всей каверны, но может также рассматриваться как величина двойного удлинения задней половинки каверны. При этом задаются условия (7б), определяющие положение сечения отрыва при заданной форме тонкого кавитатора. Эти условия определяют радиус каверны R_n , угол наклона ее меридиана γ в сечении отрыва и положение сечения отрыва $x = L_s$.

Ниже рассматривается типичный случай решения для каверны при $\sigma = \text{const}$ за конусом с углом полу раствора γ и также его вырождение при $\gamma \rightarrow 0$ в решение для формы каверны за цилиндром. Вначале находится решение первого приближения аналогично решению задачи (5а) в форме эллипсои-

дальной каверны. На основе первого приближения пристыковывается кавитатор и определяются все элементы задачи второго приближения.

Форма задней части каверны после миделя для типичных случаев каверны за конусом и цилиндром в сравнении с формой каверны за малым кавитатором при одном и том же значении числа кавитации $\sigma = 0.04$ иллюстрируется Рис. 3. Решение для формы каверны 2го приближения практически совпадает с решением первого приближения. Однако, имеются существенное различие в величине удлинений при одном и том же числе кавитации при кавитаторах различной формы. Каверна за цилиндром существенно короче задней части каверны за диском. При этом задние части каверны за конусом с углом $\gamma > 5^\circ$ практически совпадают по размерам и форме с задней половинкой каверны за малым кавитатором. При решении удалось найти выражение зависимости (8а) для числа кавитации в случае каверны за конусом от двойного удлинения λ ее задней части. Выражение (8а) оказалось универсальным, давая в пределах, зависимость для двойного удлинения каверны за цилиндром (8б) и зависимость для удлинения (8с) в случае кавитатора типа диска. Результаты расчета по зависимости (8а) в сравнении с зависимостью (8с) иллюстрируются Рис. 4.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma &= \frac{\ln \lambda^2}{\lambda^2} \left[1 - 2 \left(1 + \varepsilon \lambda \sqrt{1 + (\varepsilon \lambda)^2} \ln \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{1 + (\varepsilon \lambda)^2}} \right) \frac{1}{\ln \lambda^2} \right], \quad \varepsilon = \tan \gamma : \\ \text{б) } \sigma &= \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{e}, \quad \text{с) } \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{e}} \end{aligned} \quad (8)$$

Анализ регулярных асимптотических решений Этот анализ определяет наиболее типичные свойства этих решений. Пренебрегая малыми $(\ln 1/\delta_*^2)^{-1}$ предельное уравнение при стационарном обтекании получается в виде (9):

$$\frac{d^2 R^2}{d x^2} \ln \frac{1}{\beta^2 \delta_*^2} + 2\sigma(x) = 0; \quad \text{а) } \delta = \varepsilon, \quad \text{б) } \sigma = \delta^2 \ln 1/\beta^2 \delta^2, \quad \text{с) } \sigma = \delta^2 \ln(1/\beta \varepsilon \delta^2) \quad (9)$$

С учетом условия $\varepsilon/\delta = O(1)$ все регулярные решения уравнений (1,9) универсальны пригодны при различных параметрах тонкости. Здесь, в зависимости от необходимости, возможно применение различных параметров тонкости, связанных как с кавитатором, так и с каверной. Параметр (9а) улучшает точность величины максимального радиуса каверны, параметр (9б) улучшает решение при не достаточно больших значениях удлинения каверны, параметр (9с) задает значения удлинения на основе уравнения первого приближения близкие к их значениям во втором приближении. Предельное регулярное решение уравнения (9) при $\sigma = \text{const}$ определяет эллипсоидальную каверну (1а).

$$\text{а) } R^2 = \left\{ \varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 x - \frac{\sigma}{\ln(1/\beta^2 \delta^2)} x^2 \right\}_{\sigma \rightarrow 0} \rightarrow 2\varepsilon^2 x, \quad \text{б) } R^2 \Big|_{\substack{\sigma=0 \\ x \rightarrow \infty}} \rightarrow 2\sqrt{c_{do}} \frac{x}{\sqrt{\ln x}} \quad (10)$$

При заданном кавитаторе значительное увеличении каверны при $\sigma \rightarrow 0$, соответствует нарушению условий $\delta/\varepsilon = O(1)$, мы вместо реальной асимптотики

расширения струй (10b) при $x \rightarrow \infty$ имеем параболическую асимптотику в (10a). Это объясняет причину непригодности регулярных решений при нарушении ограничения $\delta/\varepsilon = O(1)$. При $\delta/\varepsilon = O(1)$, имея 2 независимых параметра ε, σ , решение строится по одному из них. Однако, при любом задании δ все аналогичные решения с учетом условий $\delta/\varepsilon = O(1)$ с точностью до малых высшего порядка являются асимптотически эквивалентными решениями и никаким выбором параметра тонкости нельзя преодолеть условия $\delta/\varepsilon = O(1)$. Единственным параметром, уточняющим форму каверны при $\sigma = 0, x \rightarrow \infty$ во втором приближении является, параметр, связанный с кавитатором $\delta = \varepsilon$, приводящий к решению в следующем виде [23, 25]:

$$R^2 \Big|_{\substack{\sigma=0 \\ x \rightarrow \infty}} = \varepsilon^2 \left\{ (1+2x) + \frac{1}{\ln 1/\varepsilon^2} \left[\frac{1+2x}{2} \ln(1+2x) + x^2 \ln x - (1+x)^2 \ln(1+x) \right] \right\}$$

Однако, и это уточнение оказывается недостаточным для правильного поведения формы каверны на достаточных удалениях от кавитатора, так как при $x \rightarrow \infty$ это решение не вырождается в асимптотику (10b). Вследствие слабой особенности решений в сечении отрыва возможны только два приближения и эта особенность сохраняется при рассмотрении нестационарных решений.

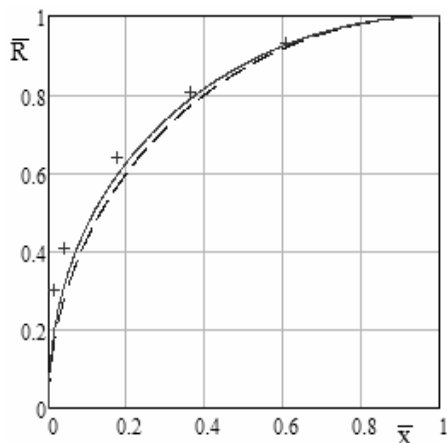


Рис. 5. Внешнее решение для формы каверны второго приближения $R_k = 1$

- решение второго порядка (15a), $\beta = 1$
- эллипсоидальная каверна
- +++++ нелинейный численный расчет [5]

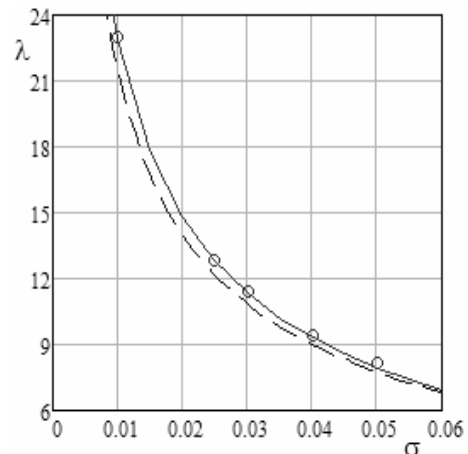


Рис. 6. Зависимость $\lambda = \lambda(\sigma)$ удлинения каверны λ от числа кавитации σ второго приближения, $\beta = 1$

- решение второго порядка (15b),
- решение первого приближения (1c) [40],
- o o o o нелинейный численный расчет [5]

Сингулярные решения $\delta/\varepsilon = O(1)$ [16, 22, 25, 26, 46-48]. Решение задачи для формы каверны включает два решения: отдельно для небольшого внутреннего участка каверны и внешнего участка для формы большей части поверхности каверны. Начальные условия на участке внутреннего

решения предполагаются заданными. Начальные условия для внешнего решения находятся путем сращивания внутреннего и внешнего решений. На основе этих решений строится равномерно-пригодное решение.

Внешнее сингулярное решение при $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$. Это решение для формы каверны пригодно в обоих случаях тонких кавитаторов и кавитаторов типа диска. Пренебрегая размерами кавитатора $O(\delta^2 \sqrt{\ln 1/\delta^2})$ задача для определения формы каверны получается в виде [16]:

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4(1+x)(1-x)} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^2R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2R^2}{dx^2} dx_1 - \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=+1} = 2\sigma(x); \left[R^2(x) = 0 \right]_{x=-1}, \left[R^2(x) = 0 \right]_{x=+1}, \left[R^2(x) = \delta^2 \right]_{x=0} \quad (11)$$

Решение задачи в общем случае $\sigma(x) = \sigma \hat{\sigma}(x)$, $\hat{\sigma}(x) = O(1)$ при заданной полудлине каверны $L_k = 1$ ищется в виде рядов:

$$R^2 = \delta^2 \left[\tilde{R}_0^2 + \tilde{R}_1^2 (\ln 1/\delta^2)^{-1} + \dots \right], \quad \sigma = \delta^2 (\ln 1/\delta^2) \left[\tilde{\sigma}_0 + \tilde{\sigma}_1 (\ln 1/\delta^2)^{-1} + \dots \right] \quad (12)$$

Асимптотическое решение для основного случая при $\sigma = \text{const}$, $\delta = 1/\lambda$, где λ - удлинение каверны (отношение диаметра миделя к длине каверны) сводится к последовательности задач:

$$\frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} + 2\tilde{\sigma}_0 = 0; \left[\tilde{R}_0^2(x) = 0 \right]_{x=-1}, \left[\tilde{R}_0^2(x) = 0 \right]_{x=+1}, \left[\tilde{R}_0^2(x) = 1 \right]_{x=0}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2R_0^2} \left(\frac{dR_0^2}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 R_1^2}{dx^2} + \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 \tilde{R}_0^2}{4(1+x)(1-x)} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2 \tilde{R}_0^2}{dx^2} dx_1 - \frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \Big|_{x=-1} + \frac{d\tilde{R}_0^2}{dx} \Big|_{x=+1} = 2\tilde{\sigma}_1; \left[\tilde{R}_1^2(x) = 0 \right]_{x=-1}, \left[\tilde{R}_1^2(x) = 0 \right]_{x=+1}, \left[\tilde{R}_1^2(x) = 0 \right]_{x=0} \quad (14)$$

Решение задачи второго порядка при $\sigma = \text{const}$ имеет вид В. Серебряков 1973, [16]:

$$\text{a) } R^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[(1-x^2) + \frac{x^2 \ln 4 - \ln(1+x)^{(1+x)} - \ln(1-x)^{(1-x)}}{\ln \lambda^2} \right], \quad \text{b) } \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\beta e}} \quad (15)$$

Точность решения (15) для формы и удлинения каверны иллюстрируется на Рис. 5, 6 в сравнении с данными нелинейного численного расчета.

Внутренние решения Для получения замкнутых равномерно пригодных решений в общем случае необходимо аналитическое выражения для внутреннего вблизи кавитатора решения. Решение первого приближения в случае тонких кавитаторов (16) [22-24,] оказались пригодным для кавитаторов достаточно про-

извольной формы. Получено также приближенное нелинейное решение для формы каверны за диском (17) [23] пригодное для срачивания.

$$R^2 = \varepsilon^2 \left[\frac{2nx}{\sqrt{s}} + (1 - 2m) \right], \quad \tilde{s} = \frac{\ln(x / \varepsilon^2)}{\ln(1 / \varepsilon^2)}, \quad \text{тонкий конус: } m = 1 \quad (16)$$

$$\bar{R}_0^2 = 1 + 2\sqrt{c_{do}} \bar{x} / \sqrt{\ln \frac{4(\bar{x} + \bar{\Delta})^2}{\beta^2(1 + 2\sqrt{c_{do}} \bar{x})}}, \quad \bar{\Delta} = 0.5 \left[\sqrt{c_{do}} + \frac{1}{\sqrt{c_{do}}} \right], \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_n}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R_n} \quad (17)$$

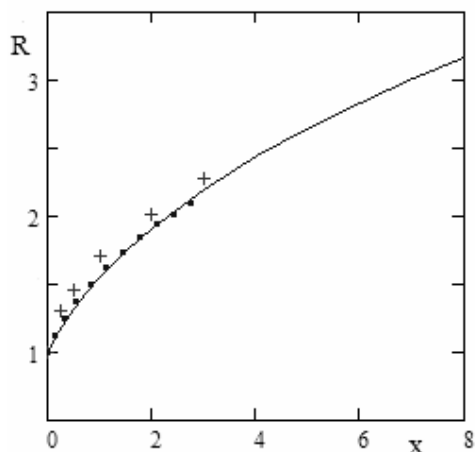


Рис. 7. Форма каверны за диском при $\sigma = 0$ в районе внутреннего решения

————— Решение (17)
 + + + + Нелинейный численный расчет [9]
 □ □ □ □ Эмпирическая зависимость [11]

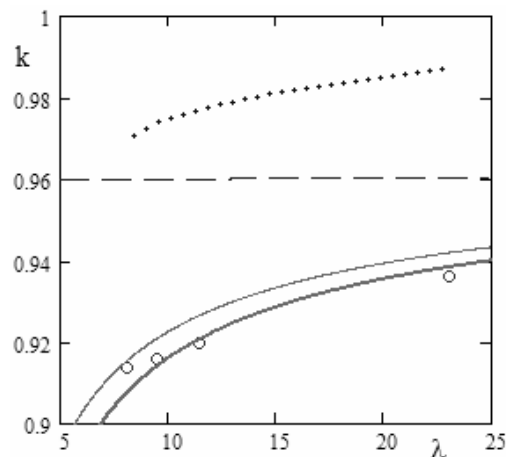


Рис. 8. Значение k в формуле для наибольшего радиуса второго приближения

————— диапазон значений по зависимостям (21b)
 o o o o Численный расчет [9]
 - - - - - Данные экспериментов [11]
 □ □ □ □ Эмпирическая формула [45]

Результаты расчета внутреннего решения (17) для бесконечной каверны за диском иллюстрируются на Рис 7 в сравнении с нелинейным численным расчетом и экспериментальными данными.

При этом в проблеме срачивания обнаруживается универсальная возможность срачивания только на основе поведения этого решения на бесконечности, независимо от формы кавитатора. С учетом того, что известная асимптотика [6, 43] содержит недостаточное количество членов, разрабатывается также дополнительный вариант гидродинамики тонких тел для полубесконечных тел. На основе этого разложения находится дифференциальное уравнение для закона расширения струй на бесконечности и дополнительные члены асимптотики струй на бесконечности [22, 48].

Разложение ГТТ для полубесконечных тел [22, 48]

$$\begin{aligned}
\text{a) } \varphi &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^L \frac{q(x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + r^2}} dx_1 \Big|_{\substack{r \rightarrow 0, \\ x \rightarrow \infty}} = -\frac{1}{4\pi} \left[q(x) \ln \frac{4x^2}{r^2} + \int_x^\infty \frac{q(x_1)}{x_1} dx_1 \right] + \dots \\
\text{b) } \frac{d\varphi}{dx} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{dq(x)}{dx} \ln \frac{4x^2}{r^2} + \frac{q(x)}{x} \right] + \dots, \quad (18)
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения закона расширения струй на бесконечности при движении по закону $x = x_n(t)$ с постоянной и переменной скоростью:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{\beta^2 R^2}{4x^2} - \frac{1}{x} \frac{dR^2}{dx} &= 0, \\
\text{b) } \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \ln \frac{\beta_*^2 R^2}{4[x-x_n(t)]} + \frac{dx_n(t)}{dt} \frac{\frac{\partial R^2}{\partial t}}{x-x_n(t)} &= 0, \\
\text{c) } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\pi\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 \ln \frac{\beta_*^2 R^2}{4[x-x_n(t)]^2} \right] &= 0 \quad (19)
\end{aligned}$$

Трехчленное разложение для асимптотики расширения струй на бесконечности при обезразмеривании по характерном размеру кавитатора R_n в форме Левинсона [43] и асимптотически эквивалентное двухчленное разложение в форме Гуревича [6] с дополнительными членами [22, 48]:

$$\begin{aligned}
\text{a) } R^2 &= \frac{2\sqrt{c_{do}} x}{\sqrt{\ln x}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln x}{\ln x} + \frac{1}{2} \frac{\ln(e\sqrt{c_{do}}\beta^2/2)}{\ln x} + \dots \right], \\
\text{b) } R^2 &= \frac{2\sqrt{c_{do}} x}{\sqrt{\ln(x^2/R^2)}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\ln 4 / e\beta^2}{\ln(x^2/R^2)} + \dots \right] \quad (20)
\end{aligned}$$

Уравнение аналогичное уравнению (19а) было “угадано” Ю. Якимовым в его известной работе [33], однако важность и величины дополнительных членов асимптотики и их зависимости в его работах не были определены.

Анализ результатов решения сингулярной задачи Внешнее, наиболее важное для приложений решение, занимает большую часть поверхности каверны, за исключением небольшого нелинейного участка внутреннего решения вблизи кавитатора. Как следует из Рис.5 каверна при $\sigma = \text{const}$ на большей части ее поверхности близка к эллипсоидальной форме. Имеющаяся зависимость для определения наибольшего радиуса каверны R_k (1b) является полуэмпирической, а для удлинения каверны λ зависимостью первого приближения (1с). Исходя из этого наиболее важным с точки зрения приложений являются результаты теории в виде универсальных асимптотических зависимостей 2го порядка для удлинения (21а) и основных размеров каверны (21b, 21с):

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma &= \frac{2 \ln \lambda / \beta \sqrt{e}}{\lambda^2}, \text{ b) } R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{\sigma} \left[1 + 2 \frac{\ln 2 / \sqrt{e}}{\ln \lambda^2 / \beta^2} \right] \approx R_n^2 \frac{c_d}{\sigma} \left[\frac{1}{1 - 2 \frac{\ln 2 / \sqrt{e}}{\ln \lambda^2 / \beta^2}} \right], \\
 \text{c) } L_k &= R_n \frac{\sqrt{c_d \ln \lambda^2 / \beta^2}}{\sigma} \left[1 - \frac{\ln e / 2}{\ln \lambda^2 / \beta^2} \right] \quad (21)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов по этим зависимостям в сравнении с данными нелинейного численного расчета приведены в табл. 1. Существенным дополнительным результатом, полученных на основе сращивания, является уточнение малой поправки $k \sim 0.96 - 1$ в известной формуле для наибольшего радиуса каверны [1b].

Таблица 1.

$\backslash \sigma$	0.03	0.04	0.05
λ зависимость 21a)	11.327	9.291	7.924
λ нелинейный численный расчет [5]	11.456	9.453	8.132
R_k зависимость 21b)	5.537	4.834	4.357
R_k нелинейный численный расчет [5]	5.5544	4.8448	4.3624
L_k зависимость 21c)	63.497	45.583	36.109
L_k нелинейный численный расчет [5]	63.5181	45.8	35.4731

Значение поправки k может быть найдено также на основе нелинейной интегральной зависимости (22) в размерном виде, полученной вариационным путем при обтекания конусов по симметричной схеме Рябушинского [40] :

$$LD = 3 \left(\Delta P V - \frac{1}{2} m U_\infty^2 \right). \quad (22)$$

Здесь L - длина поверхности кавитатор –каверна, D - кавитационное сопротивление $\Delta P = P_\infty - P_c$, m , V продольная присоединенная масса и объем всей поверхности. Определяя величины m , V на основе сингулярного решения (15) в работе [15] была получена асимптотическая зависимость для кавитационного сопротивления по параметру $\sigma = \delta^2 \ln 1 / \delta$. Одним из следствий этой зависимости является выражение для коэффициента k , асимптотически эквивалентное зависимости (21b). Это также может является подтверждением правильность теории сингулярных решений (11-21).

Нестационарная уравнения. Время входит в разложения (ГТТ) только в качестве параметра и эти разложения могут быть аналогично использованы для получения интегро-дифференциального уравнения для формы тонкой осесимметрично каверны в нестационарном потоке. При рассмотрении нестационарной суперкавитации наиболее эффективно применение системы координат, связанной с неподвижной жидкостью. Задача для определения формы тонкой осесимметричной каверны в приближении ГТТ в нестационарном потоке может

быть представлена в виде :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \ln \frac{\beta_*^2 R^2}{4[x_n(t) - x][x_c(t) - x]} - \int_{x_n(t)}^{x_s(t)} \frac{\frac{\partial^2 r_n^2}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}}{|x_1 - x|} dx_1 - \\
 & \quad (\ln 1 / \delta_*^2)^{-1} \qquad (1) \qquad \qquad \qquad (\ln 1 / \delta_*^2)^{-1} \\
 & - \int_{x_s(t)}^{x_e(t)} \frac{\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}}{|x_1 - x|} dx_1 + \frac{dx_n(t)}{dt} \frac{\frac{\partial r_n^2}{\partial t} \Big|_{x=x_n(t)}}{|x_n(t) - x|} - \frac{dx_e(t)}{dt} \frac{\frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{x=x_e(t)}}{|x_e(t) - x|} = \frac{4\Delta P(x, t)}{\rho} \quad (23) \\
 & \quad (\ln 1 / \delta_*^2)^{-1} \qquad \qquad (\ln 1 / \delta_*^2)^{-1} \qquad \qquad (\ln 1 / \delta_*^2)^{-1} \qquad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \left[R^2 = r_n^2 \right]_{t=t_n(x)}, \left[\frac{\partial R^2}{\partial t} = \frac{\partial r_n^2}{\partial t} \right]_{t=t_n(x)}, \text{ b) } \left[R^2 = 0 \right]_{x=x_e(t)}, \\
 & \text{c) } \left[\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} = \frac{\partial r_n^2}{\partial t^2} \right]_{t=t_n(x)} \quad \text{d) } \left[R^2 = R_i^2 \right]_{t=t_i}, \left[\frac{\partial R^2}{\partial t} = \frac{\partial R_i^2}{\partial t} \right]_{t=t_i}
 \end{aligned}$$

Здесь t - время, $x = x_n(t)$, $x = x_s(t)$, $x = x_e(t)$ - законы движения соответственно носовой точки кавитатора, сечения отрыва струй, конца каверны, $t = t_n(x)$, $t = t_s(x)$, $t = t_e(x)$ эти законы в виде обратных функций. β_* - значение β для характерного числа Маха. Условия (23d) задают форму каверны и радиальные скорости ее поверхности в начальный момент.

Уравнения задачи (23) определяется с точностью до $\delta_*^2 \ln(1/\delta_*)$ на основе представления формы нестационарного тонкого тела представляющего комплекс кавитатор +каверна в виде $R^2 = \delta_*^2 \hat{R}(x, t)^2$, $\hat{R}(x, t)^2 = O(1)$ при $\delta_* \rightarrow 0$, и $L_* = O(1)$, $T_* = O(1)$. Величины $L_* = O(1)$, $T_* = O(1)$, δ_* определяют типичные для рассматриваемого диапазона значения, характерных масштабов длин, времени и параметра тонкости. Предельное при $\delta_* \rightarrow 0$ уравнение с точностью до малых $1/\ln 1/\delta_*$ получается в виде:

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} \ln \frac{1}{\beta_*^2 \delta_*^2} + \frac{4\Delta P(x, t)}{\rho} = 0. \quad (24)$$

Физически представление пространственно временной поверхности для формы каверны в виде $R^2 = \delta_*^2 \hat{R}(x, t)^2$ выражает условие равенства порядков малости инерционных сил стационарной и нестационарной природы. Это условие может быть выражено также в виде условия для числа Струхала $St = U_* L_* / T_* = O(1)$, где U_* - характерная скорость движения.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Идеи и методика получения зависимостей практического расчета.

Увеличение диапазона скоростей при движении с суперкавитацией сопровождается очень быстрым уменьшением чисел кавитации и, соответственно, увеличением удлинений суперкаверн. Одним из наиболее важных свойств осесимметричных и, близких к ним кавитационных течений, в этом случае является существенная независимость закона расширения и деформаций сечений каверны в неподвижной жидкости от соседних сечений, формы кавитатора, криволинейности траектории и от суперкавитационного течения в целом. Это свойство было обнаружено экспериментально в ряде работ [10,11, 32, 34, 42] и др., начиная с известных исследований Н. Reikhardt 1946 [45].

Расчеты осесимметричного течения являются основными и на их основе затем может быть рассчитан ряд важных для приложений пространственных течений, близких к осесимметричным. Поэтому на первых этапах [10, 11, 32, 34] на основе интегральных законов сохранения энергии и импульса эвристическим путем была определена форма осесимметричной стационарной при $\sigma = \text{const}$ эллипсоидальной каверны и экспериментально подтверждена близость этой формы к экспериментальным данным. Были определены полуэмпирические зависимости для основных размеров каверны и предложены эмпирическая зависимость для формы каверны вблизи кавитатора и поправка для формы средней части каверны [11].

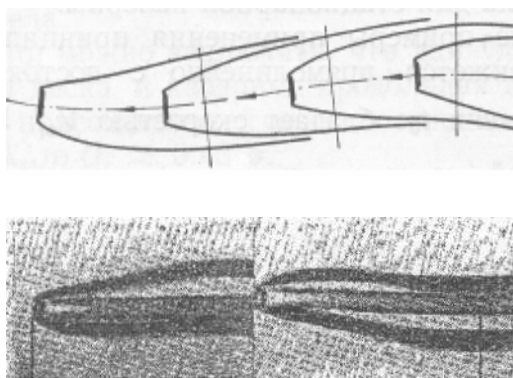


Рис. 9. Применение “принципа независимости расширения каверны в случае криволинейной траектории [11]



Рис. 10. Эксперимент по входу в воду [7]. точки - расчет на основе принципа независимости при $\mu \sim 2$

Полученное полуэмпирическое решение для формы стационарной осесимметричной каверны затем было применено для расчета ряда стационарных и нестационарных суперкавитационных течений при движении по криволинейной траектории Рис.9, движении с ускорением, при входе тел в воду Рис.10 [10, 2, 7, 34] и др. Надежность достаточно точного расчета многих случаев кавитационного обтекания, включая такие неудобные для расчета случаи, как при

движении со скачком скорости, была многократно подтверждена рядом экспериментальных исследований. Наряду с обычной практикой расчета в работе [36], был также предложен альтернативный полуэвристический метод для расчета стационарной каверны и при $\sigma = \text{const}$ также получено решение в виде эллипсоидальной каверны. Этот метод основывался на модели плоских сечений кавитационного течения Рис. 11, с использованием элементов ГТТ и применением интегрального закона сохранения энергии. Точность решения в виде эллипсоидальной каверны за диском иллюстрируется Рис. 11, 12, являясь удовлетворительной на большей части поверхности каверны, но достаточно грубой вблизи кавитатора. К сожалению расчеты на основе стационарной при $\sigma = \text{const}$ каверны не давали возможности для расчета стационарных и нестационарных каверн при переменном давлении в каверне. Недостаточное научное обоснование этого практического метода расчета также не давало уверенности в реальных ограничениях его пригодности.

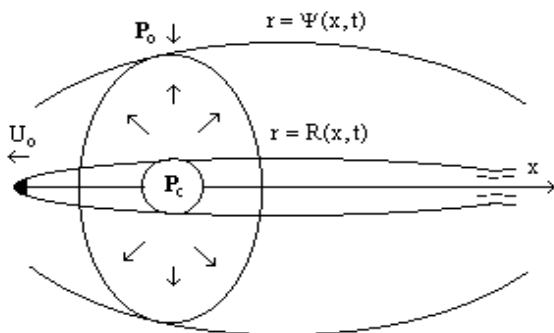


Рис. 11. Радиальная модель плоских сечений

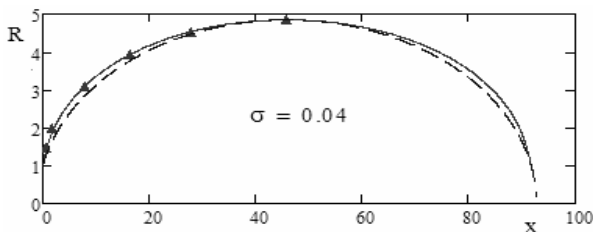


Рис. 12. Форма эллипсоидальной каверны,

$\Delta \Delta \Delta \Delta$ нелинейный численный расчет [9]

----- эллипсоидальная каверна

————— нелинейная аппроксимация для формы стационарной каверны (35)

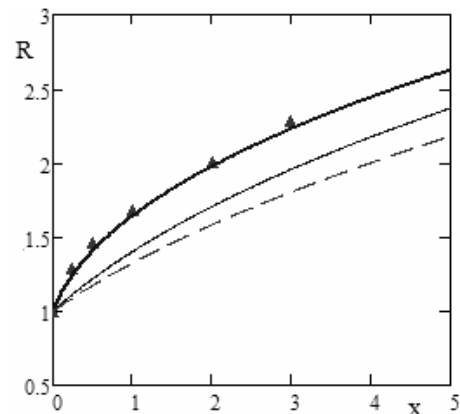


Рис. 13. Форма переднего участка каверны в сравнении с ее эллипсоидальной аппроксимацией

$\Delta \Delta \Delta \Delta$ Нелинейный численный расчет при $\sigma = 0.04$ [9]

————— эллипсоидальная каверна $\sigma = 0.04$, решение (31a)

----- эллипсоидальная каверна $\sigma = 0.005$ решение (31a)

————— нелинейная аппроксимация формы каверны (35)

На основе асимптотической теории в приближении ГТТ приводятся обоснование и результаты разработки наиболее общих уравнений. Эти уравнения пригодны для расчета подавляющей части стационарных и нестационарных суперкавитационных течений, включая течения при переменной по x, t разности давления в потоке и каверне с возможностью оценки их точности в различных случаях применения.

Основная идея разработки уравнений для практического расчета заключается в использовании простых и универсальных уравнений первого приближения при стационарном (9) и нестационарном (24) обтекании. Эти уравнения получены с очень малой точностью $O(\ln 1/\delta)$. Тем не менее, как следует из результатов сравнения Рис. 5, эти уравнения первого приближения очень хорошо описывают форму каверны. В эти уравнения входит медленно изменяющаяся функция $\ln 1/\delta_*$, где значения характерной величины δ_* могут быть выбраны оптимальным для некоторого основного случая. В частности, применительно к случаю стационарной каверны $\sigma = \text{const}$ значение $\delta_* = \lambda / \sqrt{\epsilon}$ на основе решения (15b) обеспечивает точность решения предельного уравнения в пределах решения 2го приближения. Асимптотическая теория также указывает на малую величину участков внутреннего вблизи кавитатора решения при $\delta/\epsilon \rightarrow 0$. Это позволяет при разработке методов практического расчета пренебречь размерами этих участков а вместо сращивания использовать, аналогично работы [36], интегральный закон сохранения энергии [58]. В целом при разработке уравнений для практического расчета свойство независимости расширения сечений каверны может трактоваться как свойство слабой зависимости закона расширения каверны от условий конкретного случая обтекания. Наиболее просто принять в качестве основного - случай стационарного обтекания каверны при $\sigma = \text{const}$ и использовать уточненные на основе решения этой задачи 2го приближения величины для решения задач в различных случаях стационарного и нестационарного обтекания не слишком значительно отличающихся от каверны при $\sigma = \text{const}$

Стационарные осесимметричные каверны за кавитатором типа диска.

Наиболее простой исходный вариант уравнений, при стационарном обтекании имеет вид 1974 [17, 18]:

$$\mu \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \sigma(x) = 0, \text{ a) } \left. \frac{dR^2}{dx} \right|_{x=0} = 2 \sqrt{\frac{D}{k\pi\mu\rho U_\infty^2}} = R_n \sqrt{\frac{2(c_d)}{k\mu}}, \text{ b) } R^2 \Big|_{x=0} = 0 \quad (25)$$

Здесь в качестве основы принимается предельное уравнение (9) при его уточнении с помощью величины μ определяемой для каверны при $\sigma = \text{const}$. В простейшем варианте размерами кавитатора $R_n \sim O(\delta_*^2 \sqrt{\ln 1/\delta_*})$ пренебрегается и в качестве второго начального используется уравнение сохранения энергии, которая передается кавитатором расширяющимся сечениям каверны в начальный момент. Начальное условие (25a) на основе известной зависимости для сопротивления кавитатора (принимает вид (25b)). В случае диска $c_d \approx 0.82 - 0.83$. При $\sigma = \text{const}$ эти уравнения определяет эллипсоидальную каверну и известные характерные зависимости для ее основных размеров:

$$\text{a) } R^2 = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}} x - \frac{\sigma}{2\mu} x^2, \\ \text{b) } R_k = R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \text{ c) } L_k = R_n \frac{\sqrt{c_d 2\mu/k}}{\sigma}, \text{ d) } \lambda^2 = \frac{2\mu}{\sigma} \quad (26)$$

Система уравнений типа (25) физически соответствует очень простой модели радиального расширения. В случае вытянутых каверн размеры кавитатора малы и его сопротивление практически не зависит от формы каверны, а форма каверны - не зависит от формы кавитатора и определяется только его сопротивлением. Движущийся кавитатор расталкивает неподвижную жидкость в стороны. При этом и работа сопротивления кавитатора трансформируется в кинетическую энергию образующегося практически радиального, вблизи каверны, течения жидкости в каждом, из проходимых им неподвижных сечений. При этом возмущенное течение концентрируется в области ограниченной поверхностью $r = \Psi(x, t)$ с величиной порядка полудлины каверны. Чем тоньше каверна, тем меньше закон расширения ее сечений зависит от формы этой поверхности $r = \Psi(x, t)$.

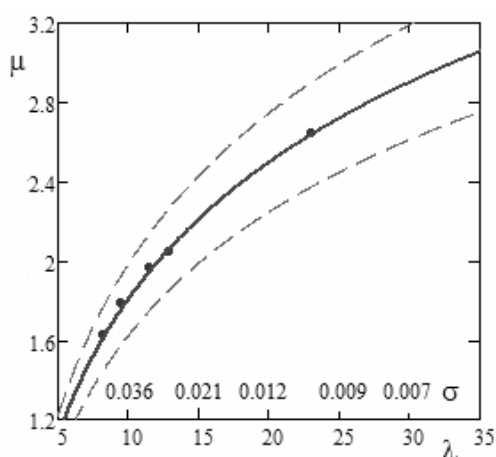


Рис. 14. Зависимость величины μ от λ и σ в случае каверны за малым кавитатором типа диска $\beta = 1$

———— Второе приближение (27 b,c) ———— 10% отклонение величины μ

• • • • $\mu = \sigma \lambda^2$ - Нелинейный численный расчет [5]

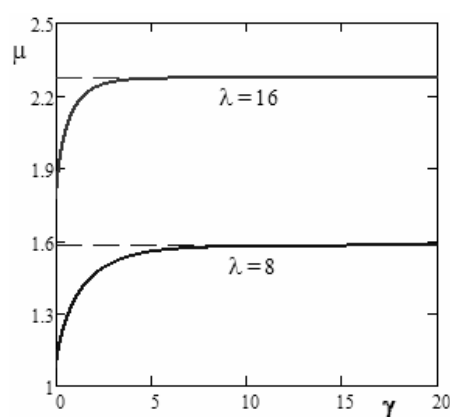


Рис. 15. Характер зависимости для μ от от полу-угла раствора γ^0 тонкого конуса при типичных величинах двойного удлинения задней части каверны

———— расчет (31b, c): $\lambda = 8, 16$

———— соответствует значению μ в случае каверны за кавитатором типа диска- зависимости: (27bc)

Далее происходит расширение по инерции, образовавшегося после прохождения кавитатора радиального течения, имеющего определенную массу, вместе с сечением каверны под воздействием разности давлений в потоке и каверне. Сечение каверны по инерции достигает своей наибольшей величины с радиусом R_k . После достижения максимума сечение начинает уменьшаться под воздействием разности давлений и дойдя до определенного радиуса начинает разрушаться, трансформируясь в зону хаотического движения жидкости уносящего энергию в след. Основная идея получения практических уравнений за-

ключалась в том, чтобы представить форму каверны уравнением первого приближения (26), однако при этом определить входящие в решение задачи характерные коэффициенты на основе более точных уравнений и в частности интегро дифференциальных уравнений (IDE). Уравнения задачи (25) содержат 2 характерные величины μ , k , имеющих ясный физический смысл. Важным является то, что эти величины очень слабо зависят от формы кавитатора и каверны и в большинстве случаев могут использоваться в качестве типичных постоянных для различных случаев обтекания. Величина μ характеризует инерционные свойства расширяющегося сечения каверны, являясь инерционным коэффициентом подобным величине присоединенной массы. Эта величина определяется на основе зависимости 2го порядка для удлинения каверны λ (21а):

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\beta e}} = \frac{2\mu}{\lambda^2}, \quad \text{б) } \mu = \ln \frac{\lambda}{\sqrt{\beta e}} \rightarrow \text{в) } \mu = \ln \sqrt{\frac{\ln 2 / \beta^2 \sigma}{e \beta^2 \sigma}}, \\ \text{д) } \mu \Big|_{\sigma \sim 0.04 \div 0.02} \approx 0.5 \ln \frac{1.5}{\beta^2 \sigma} \Big|_{\beta \sim 1} \sim 1.8 - 2.2 \end{aligned} \quad (27)$$

Типичные диапазоны изменения этой величины μ в качестве характерных констант для различных диапазонов λ и σ приведены в табл. 2

Таблица 2.

μ	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
λ / λ	9/6	12/8	15/10	19/12	23/14	29/17	36/21	45/25
σ / σ	0.04/0.06	0.03/0.05	0.02/0.04	0.014/0.03	0.01/0.02	0.007/0.02	0.005/0.01	0.003/0.009

Величина k характеризует небольшой продольный перенос энергии вдоль сечений каверны и определяется на основе решения 2-го приближения (21б) и его аппроксимации в виде зависимости от σ :

$$\text{а) } k(\lambda) = 1 - 2 \frac{\ln 2 / \sqrt{e}}{\ln \lambda^2 / \beta^2} \rightarrow \text{б) } k(\sigma) \approx 1 - \frac{2 \ln 2 / \sqrt{e}}{\ln 4 / \beta^2 \sigma} \Big|_{\sigma \sim 0.04 \div 0.01} \sim 0.92 - 0.94 \quad (28)$$

Уравнение (25) при $\sigma = \text{const}$ имеет физический смысл закона сохранения полной энергии расширяющегося сечения каверны, сообщенной жидкости кавитатором, включая кинетическую E_{kx} и потенциальную E_{px} энергию сечения:

$$E_{kx} + E_{px} = k\pi \frac{\mu \rho}{4} U_{\infty}^2 \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \pi R^2 \Delta P = kD \quad (29)$$

С точностью до поправки $k \sim 1$ при $x = 0$ в начальный момент вся энергия расширения сечения каверны является кинетической. В миделе каверны вся энергия сечения является потенциальной, определяя величину наибольшего радиуса каверны R_k .

Усовершенствованный вариант системы стационарных уравнений:

$$\text{a) } \mu_c \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \sigma = 0, \text{ b) } \left. \frac{dR^2}{dx} \right|_{x=0} = R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}}, \text{ c) } R^2 \Big|_{x=0} = R_n^2, \quad (30)$$

Эта система уравнений пригодна для уточненного расчета каверн за кавитаторами типа диска, включая достаточно грубое представление формы каверны вблизи кавитатора. Рис. 13. Для учета конечности размеров кавитатора и замыкания используется малая поправка для величины μ в виде зависимости (31b) при значении $c_{d*} \sim 0.82$ для диска. Решение задачи (30) в при $\sigma = \text{const}$ также определяет эллипсоидальную каверну.

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} x - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2, \text{ b) } \mu_c = \mu \frac{c_{d*}}{(c_{d*} - k\sigma)}, \\ \text{c) } R_m &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \text{ d) } L_c = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_c}{k}} (\sqrt{c_d - k\sigma} + \sqrt{c_d}). \end{aligned} \quad (31)$$

При этом зависимости для основных размеров каверны (31c,d) до ее заднего замыкания в случае диска оказываются совпадающие с зависимостями (26b-d), незначительно отличаясь для не тонких кавитаторов другой формы.

Система уравнений (30-31) пригодна также для расчета каверн за тонкими кавитаторами, но этот случай требует отдельного рассмотрения. Для возможности уточненного расчета каверн за тонкими кавитатором может быть использовано выражение для μ (32c) где $\lambda = \lambda(\sigma)$ определяется последовательными приближениями по зависимости (32b) асимптотического решения задачи второго порядка для каверны за конусом (8a) при $\beta = 1$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_c &= \mu \frac{c_{d*}}{(c_{d*} - k\sigma)}, \text{ b) } \lambda^2 = \frac{\ln \lambda^2}{\sigma} \left[1 - 2 \left(1 + \varepsilon \lambda \sqrt{1 + \varepsilon^2 \lambda^2} \ln \frac{\varepsilon \lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \lambda^2}} \right) \frac{1}{\ln \lambda^2} \right], \\ \text{c) } \mu &= \sigma [\lambda(\sigma)]^2 \text{ d) } \mu_{\varepsilon \rightarrow 0} \rightarrow \ln \frac{\lambda}{e} \text{ e) } \mu_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow \ln \frac{\lambda}{\sqrt{e}} \end{aligned} \quad (32)$$

В предельных случаях универсальная зависимость (32b) (32d, 32e) определяет величины удлинений каверны за цилиндром и кавитатором типа диска. Результаты расчета по зависимостям для μ (32bc) применительно к уточненному расчету каверны за тонким кавитатором приведены на рис. 15. Характер зависимости для μ в этом случае указывает, что в реальном диапазоне удлинений величина μ сохраняет свое значение вплоть до углов полураствора конуса $\gamma \sim 5^\circ$. При больших углах значение μ остается таким же как для каверн за кавитаторами типа диска и может рассчитываться по зависимостям (27b,d) и Табл. 2. Таким же образом может рассчитываться и величина k по зависимостям (28). При углах меньших 5° необходимо применение уточненного расчета по зависимостям (32b, c) при значении $k \sim 1$.

Особенно важным при расчете каверны за тонким кавитатором является применение начального условия (30b) на основе интегрального закона сохране-

ния энергии в отличие от классического условия равенства углов каверны и кавитатора в сечении отрыва, использованного при асимптотическом решении регулярной задачи (3-6). Запишем для сравнения решение (33a) задачи (30) и формальное предельное решение (33b) задачи (3-6):

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c} x} - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2 \\ \text{b) } R^2 &= R_n^2 + \left(\frac{dr_n^2}{dx} \Big|_{x=0} \right) x - \frac{\sigma}{\ln(1/\delta^2)} x^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Результаты расчета решения (33a) в случае каверны за конусом при $\gamma = 10^\circ$, $\sigma = 0.04, 0.02$, $R_n = 1$ в сравнении с данными нелинейного численного расчета [9], приведены на рис. 16. Величины μ, k рассчитывались по зависимостям (27с, 28b). Для расчета сопротивления тонкого конуса применялись известная зависимость (34a) и нелинейная асимптотическая зависимость для тонкого конуса (34b)[28] пригодная до углов $\gamma \sim 30^\circ$. Аналогичная, но пригодная в меньшем диапазоне углов зависимость получена также в работе [13]

$$\text{a) } c_d = c_{d0} + \sigma, \text{ b) } c_{d0} = 2 \left[1 - (1 - \varepsilon^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \ln \frac{4}{\varepsilon^2} \right)^2 \right] \quad (34)$$

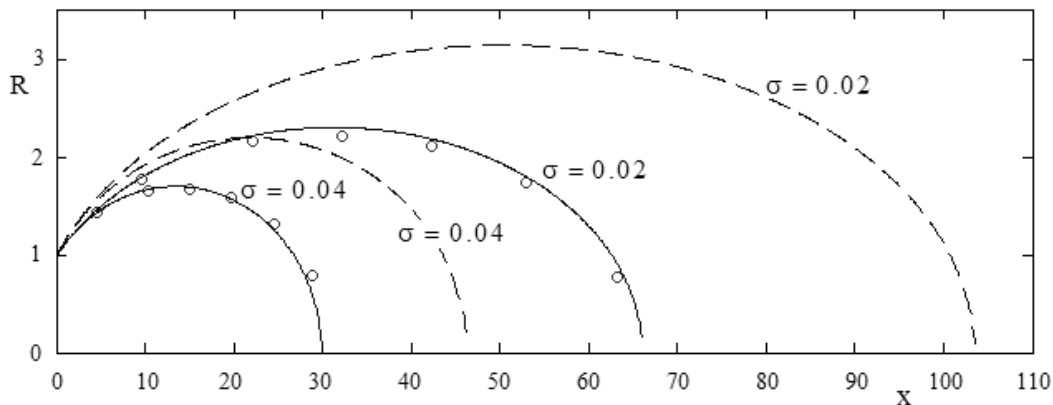


Рис. 16. Результаты расчета каверны за конусом $\gamma = 10^\circ$, $\sigma = 0.04, 0.02$, $R_n = 1$
 ——— Решение (33a) на основе уравнений для практического расчета (30)
 ○ ○ ○ ○ нелинейный численный расчет [9]
 - - - - - Формальное предельное решение (33b) в виде эллипсоидальной каверны по параметру $\delta^* = 1/\lambda_w$, где λ_w - удлинение комплекса кавитатор + каверна при равенстве углов наклона меридиана кавитатора и каверны в сечении отрыва струй.

Здесь же для сравнения приведены результаты расчета формального решения первого приближения при равенстве углов меридиана кавитатора и каверны в сечении отрыв струй (33b) на основе классического параметра тонкости

применяющегося в гидродинамике тонких тел в виде отношения максимального диаметра комплекса кавитатор+каверна к его длине: $\delta_* = 2R_m / (l + L_c)$. Как следует из результата сравнения решений Рис. 1, это формальное решение, для расчета формы каверн является пригодным для получения регулярных решений 2го приближения. Но, в то же время, как показывает сравнение результатов расчета на Рис. 16 это формальное решение, чаще всего используемое в ряде работ [13] для расчета каверн, оказывается полностью непригодным даже для качественных оценок. И как показывают результаты расчетов эта непригодность сохраняется при любом возможном выборе малого параметра. Параметр $\delta_* = 2R_m / (l + L_c)$ оказывается также одним из наиболее неудачных, не позволяя получить решения в случае кавитаторов близких к цилиндру.

Нелинейная аппроксимация каверны за диском на основе результатов асимптотических решений.

Аппроксимация (32) сконструирована на основе зависимостей первого приближения для формы каверны в районе асимптотики и предельного внешнего решения с эллипсоидальной формой каверны, но с использованием зависимостей 2го порядка для основных размеров каверны. Эта асимптотическая аппроксимация дает достаточно точные результаты, начиная с $\sigma \sim 0.05$ и больше вплоть до диапазона сверхтонких каверн, соответствующим движению при дозвуковых скоростях.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } R^2 &= R_n^2 + \sqrt{\frac{1}{\tilde{\mu}_x}} \left[R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} x - \frac{\sigma}{2\mu_c} x^2 \right], \\
 \text{b) } \mu_x &= 0.5 \ln \left\{ \sqrt{e} \left[1 + \frac{x}{2} \left(2 - \frac{x}{L_k} \right) \right] \right\} \Bigg|_{x=L_k} = \mu_{x0}, \\
 \text{c) } \mu_{x0} &= 0.5 \ln \left[\sqrt{e} \left(1 + \frac{L_k}{2} \right) \right], \text{ d) } \tilde{\mu}_x = \frac{\mu_x}{\mu_{x0}}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Результаты расчета зависимости (32) при $\sigma = 0.04$ приведены на Рис. 12, 13.

Уравнения для расчета нестационарных каверн. Основой для разработки практического метода расчета нестационарных каверн является предельное уравнение (24). Естественным ограничением для этого уравнения является условие для числа Струхала $St = O(1)$. Физически это ограничивает возможности применения этого уравнения условием того, что величины стационарных и нестационарных сил инерции в течении должны быть одного порядка. Для расчета нестационарных суперкавитационных течений более удобной является система координат связанная с неподвижной жидкостью. Естественным обобщением стационарных уравнений (25, 30) является аналогичная, наиболее простая система уравнений, В. Серебряков 1972 [16,18, 20,21] для расчета нестационарных каверн за кавитаторами типа диска:

$$\mu \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} + \frac{2\Delta P(x, t)}{\rho} = 0,$$

$$\text{a) } \left. \frac{\partial R^2}{\partial t} \right|_{t=t_n(x)} = \sqrt{\frac{D}{k\pi\mu\rho}} = 2R_n U \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}}, \quad \text{b) } R^2 \Big|_{t=t_n(x)} = 0, \quad (36)$$

Усовершенствованная более современная система уравнений для расчета нестационарной каверны, пригодная для расчетов каверн за кавитаторами типа диска и также тонкими кавитаторами имеет вид:

$$\mu(x) \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} + \frac{2\Delta P(x, t)}{\rho} = 0,$$

$$\text{a) } \left. \frac{\partial R^2}{\partial t} \right|_{t=t_n(x)} = R_n(x) U(x) \sqrt{\frac{2[c_d(x) - k(x)\Delta P(x)]}{k(x)\mu(x)}}, \quad \text{b) } R^2 \Big|_{t=t_n(x)} = R_n^2(x) \quad (37)$$

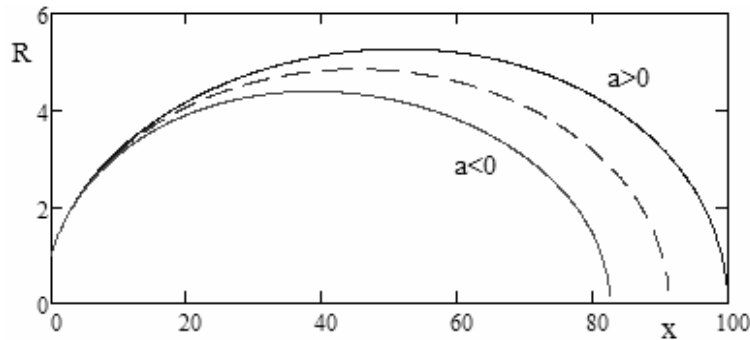


Рис. 17. Изменение формы каверны за диском в случае равноускоренного и равнозамедленного движения

----- невозмущенная каверна при $\sigma_0 = 0.04$

————— $a > 0$ - ускорение, $a < 0$ - замедление.

Физически система уравнений (37) в самом общем случае описывает следующий процесс. Кавитатор переменного радиуса $R_n(t)$ двигаясь в неподвижной жидкости с переменным коэффициентом сопротивления $c_d(t)$ и переменной скоростью $U(t)$ по закону $x = x_n(t)$ в момент времени $t = t_n(x)$ проходит неподвижное сечение x . При этом образуется начальное сечение каверны, которому кавитатор сообщает энергию работы по преодолению сопротивления с определенной поправкой $k(x)$. После этого начинается процесс независимого расширения сечения под воздействием разности давлений $\Delta P(x, t)$ без обмена энергией с соседними сечениями. Все величины в системе (4.24) применяются для момента начала расширения сечения $R_n(x) = R_n(t) \Big|_{t=t_n(x)}$, $c_d(x) = c_d(t) \Big|_{t=t_n(x)}$, $\sigma(x) = \sigma(x, t) \Big|_{t=t_n(x)}$, где $t = t_n(x)$ определяется в виде функции обратной $x = x_n(t)$. В качестве $c_d(x)$ используется стационарная состав-

ляющая коэффициента сопротивления кавитатора.

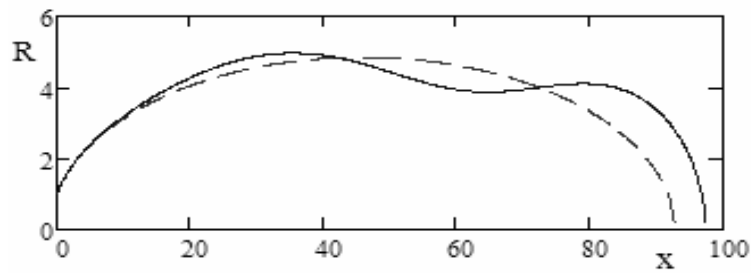


Рис. 18. Воздействие переменной разности давлений на форму нестационарной каверны

----- невозмущенная каверна при $\sigma_0 = 0.04$

———— гармонические колебания числа кавитации $\sigma_a = \pm 0.4\sigma_0$.

С учетом наиболее распространенного типа течений с кавернами, близкими в той, или иной мере к стационарной, наиболее естественным и простым является применения для расчета нестационарных течений коэффициентов второго приближения, полученных для стационарной каверны при $\sigma = \text{const}$. Более того предельные уравнения (24) указывают на возможность применения в нестационарном случае даже постоянного значения μ . Чаще всего применяется значение $\mu \sim 2$, которое соответствует стационарной при $\sigma = \text{const}$ каверне за малым кавитатором с удлинением $\lambda \sim 12$. Точность такого моделирования иллюстрируется Рис. 10 для случая каверны при входе тела в воду. Однако, имеется существенная возможность значительного уточнения результатов расчета путем применения величин $\mu(x), k(x)$, не вносящих никаких дополнительных сложностей в систему уравнений (37) вследствие того, что координата x входит в эти уравнения в качестве параметра. Наиболее прост здесь способ расчет величин $\mu(x), k(x)$ по стационарным зависимостям (27с, 28b) на основе числа кавитации в момент прохождения кавитатором неподвижного сечения жидкости. Решение системы (37) в наиболее общем случае $R_n(t), c_d(t), U(t), \Delta P(x, t)$ находится в интегральном виде:

$$R^2 = R_n^2(x) + 2R_n(x)U(x)\sqrt{\frac{c_d(x) - k(x)\sigma(x)}{2k(x)\mu(x)}}[t - t_n(x)] - \frac{2}{\rho\mu(x)} \int_{t_n(x)}^t \int_{t_n(x)}^t \Delta P(x, t) dt dt \quad (38)$$

В частном случае $\Delta P = \Delta P(x)$ имеет место универсальный интеграл :

$$R^2 = R_n^2(x) + 2R_n(x)U(x)\sqrt{\frac{c_d(x) - k(x)\sigma(x)}{2k(x)\mu(x)}}[t - t_n(x)] - \frac{\Delta P(x)}{\rho\mu(x)}[t - t_n(x)]^2 \quad (39)$$

который при $U, \Delta P = \text{const}$ определяет эллипсоидальную каверну и в принципе включает в себя все, ранее полученные традиционным способом решения на основе принципа независимости для ряда характерных случаев обтекания. Одним из таких решений является решение по входу тела в воду Рис. 10 [7], другим решением, решение [2] для случая ускоренного движения Рис. 17. Одним

из характерных примеров переменного давления является случай гармонических колебаний давления в каверне. Решение в этом случае представлено зависимостью (40) [21] в подвижной системе координат, $x = 0$ в носике, обезразмеривание относительно полудлины каверны L_k при σ_0 по скорости набегающего потока.

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_a \sin vt$$

$$R^2 = \frac{\sigma_0}{2\mu} [x(2-x)] + \frac{\sigma_a}{\mu v^2} \{ [\sin vt + \sin v(-t+x)] - vx \cos v(-t+x) \} \quad (40)$$

Это решение предсказывает появление бегущих волн на поверхности каверны при колебаниях давления в каверне, эта теория создана в работе [14].

Элементарные уравнения практического расчета позволяют достаточно точно рассчитать стационарные и нестационарные течения даже существенно отличные от течения со стационарной каверной постоянного давления на основе параметров определенных на основе решения этой задачи. Однако в некоторых случаях например в случае стационарных вертикальных каверн и в других случаях эти параметры могут нуждаться в дополнительной корректировке. Одним из преимуществ здесь является простота этих осесимметричных решений как основы для определения пространственных возмущений осесимметричных каверн очень важных для приложений. Основы этих методов расчета изложены работах [7, 3, 11...].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амромин Э. Л. Иванов А.Н. Осесимметричное обтекание тел в режиме развитой кавитации // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. -1975. - №3. -С. 37-42
2. Болдырев А. А. Экспериментальное исследование каверн за диском, движущимся с ускорением // Ученые Записки ЦАГИ. -1973. -IV, №6. -С. 119-123.
3. Воронин В. В. Исследование динамики двумерной газовой полости вблизи свободной поверхности весомой жидкости // Ученые Записки ЦАГИ. - 1983. -14, 2. - С. 37-47.
4. Григорян С.С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела // ПММ. - 1959. -23. - Вып. 5. - С. 951-953.
5. Гузевский Л. Г. "Численный анализ кавитационных течений." - Новосибирск, 1979. -36 с. -(Препринт СО АН СССР. Ин-т теплофизики: № 40-79).
6. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости.* -М.: Наука, 1978. - 536 с.
7. Журавлев Ю.Ф. Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях // Тр. ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского. - 1973. - Вып. 1532. -23 с.
8. Кожуро Л.А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Ученые Записки ЦАГИ. -1980. -4, №5. -С. 109-115.
9. Краснов В. К. , Кузнецов Ю. В. Применение метода граничных интегральных уравнений для расчета осесимметричных и плоских течений в трубе.// Сб. Актуальные проблемы гидродинамики, ЧГУ, Чебоксары - 1989. - С. 71-75.

10. Логвинович Г. В. 1961 Течения с развитой кавитацией // Инж. журнал. - 1961. -1. -Вып. 1. - С.35-50.
11. Логвинович Г. В. *Гидродинамика течений со свободными границами.* - Киев: Наукова Думка, 1969. - 215 с.
12. Логвинович Г. В. Серебряков В.В. О методах расчета формы осесимметричных каверн // Гидромеханика, Киев -1975. - 32. - С. 47-54.
13. Нестерук И. Г. Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. -1982. -1. - С. 28-34.
14. Парышев Э. В. Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского. -1978. - Вып. 1907. - С. 3-16.
15. Петров А.Г. Асимптотические разложения для тонких осесимметричных каверн // ПМТФ. -1986. -№5. - С. 45-49.
16. Серебряков В.В. Асимптотическое решение задачи о тонкой осесимметричной каверне // ДАН УССР, сер А-1973, №12. С.1119-1122.
17. Серебряков В.В. Кольцевая модель для расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией // Гидромеханика, Киев - 1974. - Вып. 27. - С. 25-29.
18. Серебряков В. В. Об одном варианте уравнений "Принципа независимости расширения каверны"// Гидромеханика, Киев -1976. -Вып. 34. С. 45-48.
19. Серебряков В. В. Асимптотическое решение задачи о форме тонкой осесимметричной каверны за тонким телом // Гидромеханика, Киев-1976. - 34. - С. 48-52.
20. Серебряков В. В. К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке // сб. Математич. методы исследования гидродинамических течений, Киев -1977. С. 58-62.
21. Серебряков В.В. Расчет формы тонких осесимметричных каверн в нестационарном потоке для ряда характерных случаев обтекания // Гидромеханика, Киев -1981. -Вып. 44. -С.86-94.
22. Серебряков В.В. Предельные зависимости теории нестационарного обтекания тонких осесимметричных тел// Бионика, Киев - 1986.вып. 20. - С. 21-32
23. Серебряков В.В. Асимптотическое решение осесимметричных задач кавитационного обтекания с развитой кавитацией в приближении теории тонких тел // Гидродинамика больших скоростей -Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1989. - С. 99 - 111.
24. Серебряков В. В. Асимптотические решения осесимметричных задач до- и сверхзвуковых отрывных течений воды при нулевых числах кавитации// ДАН Украины, 1992, № 9. С.66-71.
25. Серебряков В.В. Асимптотические зависимости для формы осесимметричных каверн и кавитационного сопротивления в приближении теории тонких тел// Гидромеханика, Киев -1993, вып. 66. С. 103-109.
26. Серебряков В. В. Асимптотические решения задач осесимметричных течений с развитой кавитацией в приближении теории тонких тел// Гидромеханика, Киев- 1994, вып. 68. С. 62-74.

27. Субханкулов Г.И. Хомяков А.Н. Применение метода граничных элементов к расчету осесимметричных каверн // Труды ГБС, Чебоксары -1990. С.124-132
28. Тайц О. Г. Осесимметричные каверны // Бионика, Киев -1985. - 19. - С. 73-80.
29. Терентьев А. Г. *Математические вопросы кавитации*. -Чебоксары: Изд-во ЧГУ, 1981. -132 с.
30. Терентьев А. Г. Теоретический анализ кавитационных течений// Гидродинамика больших скоростей, 1990, Из-во ЧГУ, Чебоксары. С. 5-15.
31. Франкль Ф.И., Карпович Е.А. *Газодинамика тонких тел*. -М.-Л.: Гос-техиздат, 1948. - 175 с.
32. Эпштейн Л.А. *Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов*. -Л. Судостроение, 1970. -208 с.
33. Якимов Ю. Л. 1983, Об интеграле энергии при движении с малыми числами кавитации и предельных формах каверн // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. - 1983. -№3. -С. 67-70.
34. Abelson H.I. A prediction of water entry cavity shape // "Pa. Amer. Soc. Eng." 1970. N WA/FE-8 3pp.
35. Adams M.C. and Sears W.R. Slender Body Theory –Review and Extension// J. of the aeronautical sciences, 1953, pp.85-98
36. Birkhoff G., Zarantonello E. *Jets, wakes and cavities*, Academic Press, New York, - 1957. - 406 p.
37. Bloch E. A., Numerical solution of free boundary problems by the method of steepest decent., J. Phys. Fluids, 1969 v. 12, (12) , pp. 129-132..
38. Brennen C. A numerical solution of axisymmetric cavity flows J. Fl. Mech, 37, 4, 1969, pp 671-688.
39. Chou C. "Axisymmetric cavities flows past bodies of revolution "J. of Hydronautics, 8, 1, 1974, pp 13 - 18.
40. Garabedian P. R. 1956 The calculation of axially symmetric cavities and jets // Pacific J. Math. -6. -1956. 611-689.
41. Kirschner I. A Simple Approach to Estimating Three –Dimensional Supercavitating Flow Fields// Proc. of CAV2009, Ann Arbor, Michigan, USA. 14p.
42. Knapp R., Daili J., Hammit F. *Cavitation* - McGRAW-Hill, 1970, 680p.
43. Levinson N. On the asymptotic shape of the cavity behind an axially nose moving through an ideal fluid // Annals of Mathematics. vol.47. N4. -1946. 704-731.
44. Nishiyama T., Kobayshi H. Finite cavity flow of axial symmetry Technol. Rept. Tohoku Univ, 34, 1, 1969, pp 173 - 178.
45. Reichard H., The laws of cavitation Bubbles at Axially Symmetric Bodies in Flow// Ministry of Aircraft Production (Britain), Rept.766, 1946.
46. Serebryakov V. V. , 1998, "Some problems of the supercavitation theory for sub- or supersonic motion in water", France: Agard–R-927, pp.23.1-23.
47. Serebryakov V.V. Some models of prediction of supercavitation flows based on slender body approximation //Proc. of CAV2001, Pasadena, USA, 2001, 13p.
48. Serebryakov V. V., 2002 The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water // Proc. of HSH2002, Cheboksary, Russia, pp.71-92.

49. Serebryakov V. V. Supercavitation flows with gas injection - prediction and drag reduction problems // Proc. of CAV2003, Osaka, Japan, 2003, 8p.
50. Serebryakov V.V. Problems of Hydrodynamic for High Speed Motion in Water with Supercavitation // Proc. of CAV2006, Vageningen, The Netherlands, 16p.
51. Serebryakov V. V. Practical methods for calculation of supercavitation on axisymmetric bodies for high speed motion in water// Proc of SubSea Tech 2007, St Petersburg, Russia, 12p.
52. Serebryakov V. V. Some problems of hydrodynamics for high speed motion in water with supercavitation // Proc SuperFAST2008, St Petersburg, Russia, 21p.
53. Serebryakov V. V. Physical - mathematical bases of the principle of independence of cavity expansion// Proc. of CAV2009, Ann Arbor, Michigan, USA , 14p.
54. Terentiev A. G., Dimitrieva N. A. Theoretical investigations of cavitation flows // Proc. of CAV1998, vol. 2, pp. 275-280
55. Terentiev A.G. Problems in the theory of high speed hydrodynamics// Proc. of HSH2002, Chebocary, Russia, 2002, pp.11-29.
56. Terentiev A.G. Numerical analysis of cavitating flows direct iterative manner// Proc. of CAV2006, Vageningen, The Netherlands, 15p.
57. Tulin M. Supercavitating flows - small perturbation theory J. Ship Res., 7, 3, 1964. pp.16 - 37.
58. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* Academic Press - 1964, 310p.
59. Vargnese A., Uhlman J., Kirschner I., Axisymmetric slender-body analysis of supercavitation high-speed bodies in subsonic flow// Proc. of conference in Rhode Island , pp. 185-200.
60. Vorus W. 1986 Ambient supercavities of slender bodies of revolution // J. Ship Res. 1986. -3, N.3. 215-219.

О ПЛОСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ СУПЕРКАВИТАЦИИ ДЛЯ ПЛАСТИН С ИНТЕРЦЕПТОРОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ И ЗАМКНИЕМ КАВЕРНЫ ПО СХЕМЕ ТУЛИНА-ТЕРЕНТЬЕВА

Урядов А.К., Фридман Г.М.

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
auryadov1975@mail.ru; grifri@peterlink.ru

ВСТУПЛЕНИЕ

На практике часто приходится сталкиваться с задачами о подводных крыльях, о кавитирующих крыльях и лопастях гребных винтов, о глиссирующих поверхностях и комплексах (тандемах) крыльев. При проектировании указанных элементов часто используются интерцепторы – специальные устройства, содержащие пластины и установленные поперек основной плоскости, примерно в перпендикулярном направлении [6].

Предложенной тематике посвящены многие работы, например [11] и [8]. Данная статья представляет краткий обзор проблем, к которым авторы уже обращались в своих публикациях [12,13]. Это плоские задачи, связанные с обтеканием пластины с интерцептором или решетки таких пластин с образованием застойной зоны и суперкавитацией. Они относятся к теории струй идеальной жидкости. С.А.Чаплыгин [10] первым рассмотрел и проанализировал задачу обтекания пластины с застойной зоной – областью постоянного давления, скорость на границе которой *меньше* скорости набегающего потока V_∞ . Использование модели с застойной зоной позволяет достаточно адекватно моделировать отрыв потока вблизи интерцептора, оставаясь в рамках невязкой жидкости.

Задачи данного типа рассматривались авторами в различных постановках и для различных схем замыкания каверны. В данной статье рассмотрен обзор задач для замыкания каверны по схеме Тулина-Терентьева, которая предполагает наличие в области замыкания двух быстросходящихся спиралей. Работы А.Г.Терентьева [7,8,9,14] легли в основу решения сформулированных в данной статье проблем.

При демонстрации результатов численно показано, что точка схода застойной зоны отвечает выполнению в ней условия Бриллюена, в соответствии с которым, предполагается гладкий сход застойной зоны с поверхности пластины, и которое позволяет определять давление внутри этой зоны, не выходя за рамки модели идеальной жидкости.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРЦЕПТОРОВ

Интерцепторы — выдвигаемые поперек набегающего потока пластины, позволяющие целенаправленно управлять отрывом потока на несущих поверхностях корпуса и на лопастях движителей быстросходных судов [1,2].

Гребной винт преобразует вращение вала двигателя в упор — силу, толкающую судно вперед. Диаметр и шаг винта являются важнейшими параметрами, от которых зависит степень использования мощности двигателя, а, следовательно, и возможность достижения наибольшей скорости хода судна.

С целью повышения ходовых и мореходных качеств судов, кроме традиционных путей, используется и способ установки интерцепторов, что позволяет значительно улучшать их гидродинамические характеристики [5].

Интерцептор способствует увеличению способности винта к «захвату» воды, особенно на лодках с высоко установленным мотором и большими углами ходового дифферента. Интерцептор также обеспечивает дополнительный подъем носа катера в случае установки на линиях угла наклона лопасти. Применение интерцептора на исходящей и внешней кромках лопасти увеличивает шаг.

Установка интерцепторов на днище судна в районах транца и миделя приводит при их выдвигании к возникновению перед ними зон повышенного давления, которые уменьшают осадку и, соответственно, смоченную поверхность судна. Возникающая за миделевыми интерцепторами воздушная каверна, заполняемая атмосферным воздухом, также ведет к уменьшению смоченной поверхности днища. В итоге же обеспечивается снижение общего сопротивления судна. Кроме того, при помощи интерцепторов можно управлять креном и дифферентом судна во времени, что позволяет использовать интерцепторы, в том числе, и как успокоители качки.

Важнейшим элементом быстроходного судна является движитель. Наиболее распространенный тип движителя — обычный полностью погруженный гребной винт — должен быть значительно заглублен для предотвращения попадания в его гидравлическое сечение атмосферного воздуха, который в этих случаях ухудшает тяговые характеристики винта. Особенностью глубоко погруженного гребного винта является невозможность развития больших оборотов на промежуточных скоростях движения: возрастание момента на гребном валу влечет за собой недостаточность тяги для быстрого разгона судна.

Одним из способов повышения эффективности движителя является разработка гребных винтов, приспособленных к работе вблизи поверхности воды при ограниченных режимах, для чего применяются интерцепторы, устанавливаемые на нагнетающей поверхности лопастей в районе выходящих кромок. Это делает каверну более тонкой и, что наиболее существенно, она смещается в сторону нагнетающей поверхности, приводя к увеличению подъемной силы профиля.

Важным преимуществом интерцепторов является возможность путем регулирования их высоты существенно изменять гидродинамические характеристики гребного винта.

Следующей областью применения интерцепторов являются клиновые рули быстроходных судов. Установка за рулями интерцепторов, выдвигаемых при переключке, повышает эффективность рулей и уменьшает величины необходимых углов переключки.

Примером может служить система интерцепторов QL Boat Trim System, являющаяся принципиально новым патентованным решением, с новыми стандартами в области дифферентовки судов. Технология использования интерцепторов обеспечивает плавность хода и быстрый выход на редан.

Практика показывает также перспективность использования интерцепторов не только в различных областях судостроения.

Так в 2006 году компания Gulfstream Aerospace Corporation завершила первый этап программы испытательных полетов, разработанной на основе исследовательской концепции Advanced Flight Controls (AFC). Программа AFC использует самолет Gulfstream GV, предназначенный для полетов на сверхдальние расстояния. Используемые технологии задействовали электронно-управляемый привод, приводящий в движение поверхности управления воздушным судном, включая руль высоты, элероны, закрылки, а также интерцепторы.

На этапе испытаний Gulfstream была оценена работа интерцепторов, управляемых электромеханическими приводами. Помимо этого, тестировались управление самолетом по крену, выпуск интерцепторов и придание самолету посадочной конфигурации, а также проводилась проверка боковой и курсовой устойчивости на высоких скоростях. В процессе испытаний экспериментальный самолет достигал предельной скорости при максимальной маневренности.

Другим примером может служить изобретение группы авторов из Военно-морской академии им. Адмирала Флота Советского Союза Н.Г.Кузнецова. Оно относится к ветротехнике и может быть применено на верхней части установок (ветроагрегат, дымовая труба, дымоход, вентиляционная шахта), имеющих вертикальный сквозной канал [4].

Цель изобретения – повышение эффективности устройства за счет энергии ветра с любого направления и упрощение конструкции. Ветроагрегат содержит ветроколесо, размещенное в башне, на торце которой расположен интерцептор. Его внутренний диаметр равен внутреннему диаметру башни. С целью повышения эффективности и упрощения конструкции данный интерцептор снабжен пластинами и имеет поперечное сечение, выполненное в виде многогранника, а пластины установлены радиально на ребрах наружной поверхности интерцептора.

2. ЗАДАЧА О КАВИТИРУЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ С ИНТЕРЦЕПТОРОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ И ЗАМЫКАНИЕМ КАВЕРНЫ ПО СХЕМЕ ТУЛИНА-ТЕРЕНТЬЕВА

Рассмотрим задачу обтекания кавитирующей пластины с интерцептором с образованием застойной зоны при ненулевом числе кавитации σ . Пластина $|BO|$ длины l находится под углом атаки α , интерцептор $|OA|$ имеет длину ε и имеет угол наклона по отношению к пластине $\beta \in (-\pi; \pi)$. Жидкость рассматривается однородная, несжимаемая, предполагается отсутствие силы тяжести (см. рис. 1)

Застойная зона гладко (по касательной) сходит с пластины в заранее неизвестной точке E на пластине и примыкает также по касательной в другой неизвестной точке F на интерцепторе. Нулевая линия тока идет из бесконечно удаленной точки C через неизвестную критическую точку D на пластине. Скорость набегающего потока равна V_∞ , а модуль скорости на поверхности каверны $V_0 = V_\infty \sqrt{1 + \sigma}$.

В соответствии с данной схемой границы каверны не замыкаются, а образуют две быстросходящиеся спирали с полюсами H^+ и H^- . Точка H разветв-

ляющей линии тока удалена в бесконечность. Бесконечным спиральным завиткам соответствует скачкообразное уменьшение модуля скорости от V_0 до 0. Представленное стационарное кавитационное течение в области замыкания является бесконечнолистным, в то время как в действительности возможно лишь однолистное течение.

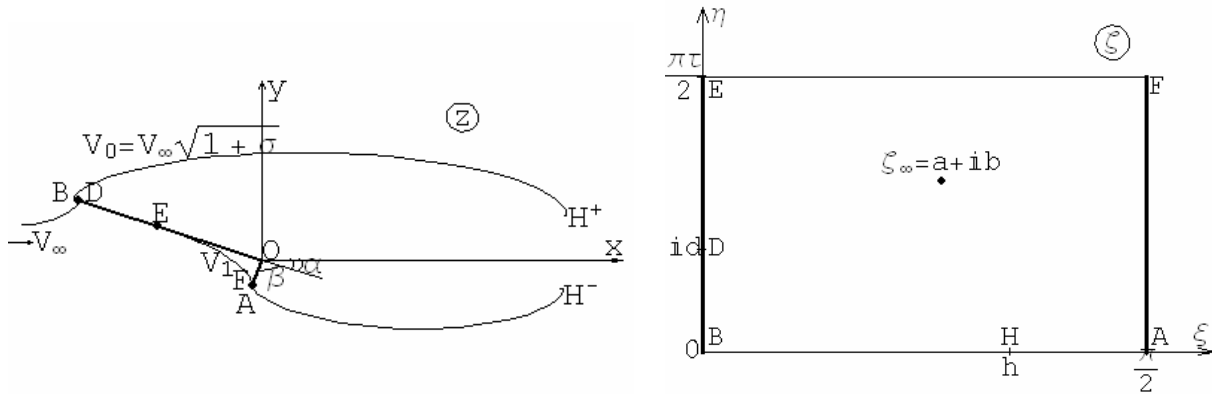


Рис. 1. Физическая и вспомогательная плоскости для задачи обтекания кавитирующей пластины с интерцептором с образованием застойной зоны и замыканием каверны по схеме Тулина-Герентьева

Таким образом, область течения ограничена твёрдыми стенками BE и FA и свободными поверхностями AH , BH^+ и EF , причём участки BE и FA неизвестной длины. Заметим, что $|OA|=l$ и $|OB|=\varepsilon$, скорость V_1 на границе застойной зоны EF неизвестна. Итак, сформулирована плоская нелинейная задача теории струй идеальной жидкости, и её решение может быть получено при помощи соответствующих методов.

Для решения поставленной задачи удобно использовать метод особых точек Чаплыгина. Физическую область отобразим на прямоугольник $\pi/2 \times \pi\tau/2$ вспомогательной области ζ , где τ имеет чисто мнимое значение. Соответствие между физической областью $z = x + iy$ и вспомогательной областью $\zeta = \xi + i\eta$ показано на рисунке 1. Бесконечно удалённой точке C на вспомогательной плоскости соответствует точка $\zeta_0 = a + ib$.

В соответствии с методом Чаплыгина точное решение задачи в форме двух производных комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ относительно физической и вспомогательной переменных z и ζ выглядит так:

$$\frac{dw}{dz} = V_0 e^{i\alpha} \frac{\theta_1(\zeta - id)}{\theta_1(\zeta + id)} \exp\left(i \frac{2\beta}{\pi} \zeta\right) \times \exp\left(ic \frac{\theta_1(\zeta)}{\theta_1(\zeta - h)}\right) \exp\left(-ic \frac{\theta_1(\zeta)}{\theta_1(\zeta + h)}\right); \quad (1)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = N \frac{\theta_1(2\zeta)\theta_1(\zeta - h)\theta_1(\zeta + h)\theta_1(\zeta - id)\theta_1(\zeta + id)}{\theta_1^2(\zeta - \zeta_\infty)\theta_1^2(\zeta + \zeta_\infty)\theta_1^2(\zeta - \bar{\zeta}_\infty)\theta_1^2(\zeta + \bar{\zeta}_\infty)}, \quad (2)$$

где c - произвольный действительный параметр.

Выражения (1) и (2) дают конформное отображение $z(\zeta)$:

$$z(\zeta) = \int_{\pi\tau/2}^{\zeta} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_E = \int_{\pi\tau/2}^{\zeta} \frac{dz}{dw} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta + z_E. \quad (3)$$

В данной задаче 9 действительных переменных, а именно $N, a, b, c, h, d, |\tau|$ (или $q = e^{-\pi|\tau|}$), V_1 и $z_F = l_F e^{-i(\alpha+\beta)}$. Для них можно сформулировать следующие условия:

$$z(0) = z_B = l e^{i(\pi-\alpha)} = \int_{\frac{\pi\tau}{2}}^0 \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_E; \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = z_A = \varepsilon e^{-i(\alpha+\beta)} = \int_{\frac{\pi\tau}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_E;$$

$$\frac{dw}{dz}(\zeta_\infty) = V_\infty; \quad \oint_{\zeta_\infty} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0; \quad \frac{dw}{dz}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) = V_1 e^{i\alpha}; \quad z\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}\right) = z_F = l_F e^{-i(\alpha+\beta)}. \quad (4)$$

Заметим, что неизвестные величины V_1 и z_F могут быть найдены из последних двух уравнений системы (4).

Второе, третье и четвертое комплексные условия из (4) включают по два вещественных соответственно. В результате имеем систему из девяти уравнений, что совпадает с количеством неизвестных, причем данная система нелинейна и имеет единственное решение.

Особо отметим, что, если положение точки E (величина $z_E = l e^{i(\pi-\alpha)}$) также является неизвестным, то решение может быть получено с использованием условия Бриллюена. Оно предполагает, что кривизна κ_1 на свободной поверхности (EF) и кривизна κ_2 на смоченной стороне пластины совпадают в точке схода застойной зоны E .

Кривизна κ контура определяется выражением: $\kappa = dv/ds$, где v задаёт направление касательной к контуру, а s - дуговая координата.

Пластина имеет нулевую кривизну в произвольной точке, поэтому то же самое выполнено на границе застойной зоны в точке E . Другими словами вторая производная для функции на границе застойной зоны равна нулю для координаты x . Это условие может быть записано в виде:

$$\frac{dv}{d\zeta} \Big|_{z_E} = \frac{d}{d\zeta} \arg \frac{dw}{dz} \Big|_{z=\frac{\pi\tau}{2}} = 0, \quad (5)$$

где $v = -\arg(dw/dz)$, а dw/dz определяется из (1).

Система нелинейных уравнений (4) совместно с (5) позволяет найти все неизвестные задачи, включая координату точки схода застойной зоны E .

Давление внутри застойной зоны постоянно и имеет значение $k = 1 - V_1^2 / V_0^2$. Распределение коэффициента давления на смоченной поверхности C_p определяется как

$$C_p = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{1}{V_\infty^2} \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}}. \quad (6)$$

Полный коэффициент силы C_F для силы F , действующей на пластину и интерцептор, может быть записан в форме:

$$C_F = C_D + iC_L = -i \frac{1 + \sigma}{l} (z_{H^+} z_{H^-}) + \frac{4\pi}{V_\infty l} P, \quad (7)$$

где P - это сопряжённый вычет производной $dw/d\zeta$ в точке ζ_0 .

3. ЗАДАЧА О РЕШЕТКЕ КАВИТИРУЮЩИХ ПЛАСТИН С ИНТЕРЦЕПТОРОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ И ЗАМЫКАНИЕМ КАВЕРНЫ ПО СХЕМЕ ТУЛИНА-ТЕРЕНТЬЕВА

Рассмотрим при тех же условиях и допущениях ту же задачу для случая кавитационного обтекания решётки, состоящей из одинаковых параллельных плоских пластин с интерцепторами (см. рис. 2). Период решётки предполагается равным $se^{i\alpha}$, число кавитации σ . В бесконечно удалённой точке C_2 значение скорости неизвестно и равно $V_2 e^{-i\alpha_2}$.

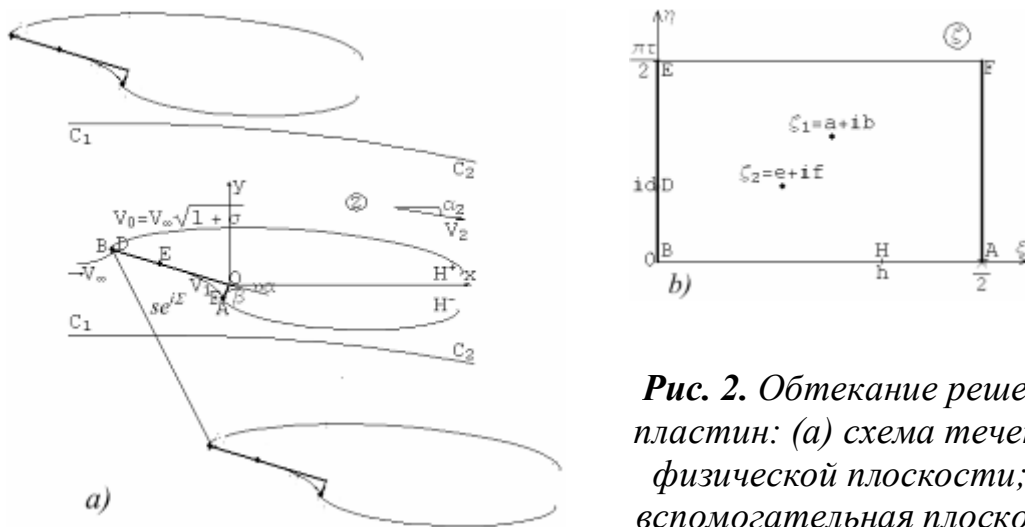


Рис. 2. Обтекание решетки пластин: (а) схема течения в физической плоскости; (б) вспомогательная плоскость.

Вновь, используя метод особых точек Чаплыгина, получим точное аналитическое решение.

Выражения для производных комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ для физической и вспомогательной переменных z и ζ выглядят так:

$$\frac{dw}{dz} = V_0 e^{i\alpha} \frac{\theta_1(\zeta - id)}{\theta_1(\zeta + id)} \exp\left(i \frac{2\beta}{\pi} \zeta\right) \exp\left(ic \frac{\theta_1(\zeta)}{\theta_1(\zeta - h)}\right) \exp\left(-ic \frac{\theta_1(\zeta)}{\theta_1(\zeta + h)}\right); \quad (8)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = N \frac{\theta_1(2\zeta)\theta_1(\zeta - h)\theta_1(\zeta + h)\theta_1(\zeta - id)\theta_1(\zeta + id)}{\theta_1(\zeta - \zeta_1)\theta_1(\zeta + \zeta_1)\theta_1(\zeta - \bar{\zeta}_1)\theta_1(\zeta + \bar{\zeta}_1)} \frac{1}{\theta_1(\zeta - \zeta_2)\theta_1(\zeta + \zeta_2)\theta_1(\zeta - \bar{\zeta}_2)\theta_1(\zeta + \bar{\zeta}_2)}, \quad (9)$$

где c - произвольный действительный параметр.

Тогда выражение для конформного отображения $z(\zeta)$ может быть получено тем же способом, как и для одиночной пластины с интерцептором.

В сформулированной задаче 11 действительных переменных: N , a , b , c , d , e , f , h , $|\tau|$ (или $q = e^{-\pi|\tau|}$), α_2 , V_2 , если не считать, что значения величин σ_2 , V_1 и z_F могут быть найдены из условий $\frac{dw}{dz}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) = V_1 e^{i\alpha}$, $z\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\tau}{2}\right) = z_F = l_F e^{-i(\alpha+\beta)}$ и

$\sigma_2 = \frac{V_0^2}{V_2^2} - 1$. Для оставшихся неизвестных можно сформулировать следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz}(\zeta_1) = V_\infty; \quad \frac{dw}{dz}(\zeta_2) = V_2 e^{-i\alpha_2}; \quad z(0) = z_B = l e^{i(\pi-\alpha)} = \int_{\frac{\pi\tau}{2}}^0 \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_E; \\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = z_A = \varepsilon e^{-i(\alpha+\beta)} = \int_{\frac{\pi\tau}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta + z_E; \quad \oint_{\zeta_1} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = s e^{i\Sigma}; \quad \oint_{\zeta_2} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = s e^{i(\pi+\Sigma)}; \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, имеется 11 неизвестных и 11 действительных условий, что дает систему, которая имеет единственное решение. Для нахождения точки схода застойной зоны вновь используется условие Бриллюэна.

Значения коэффициентов силы на пластине C_{F_p} и на интерцепторе C_{F_s} могут быть найдены таким образом:

$$\begin{aligned} C_{F_p} &= -\frac{i}{l}(1+\sigma) \left(z_B - z_E(1-\kappa_0) - \frac{1}{V_0^2} \int_{\pi\tau/2}^0 \frac{dw}{d\zeta} \overline{\frac{dw}{dz}} d\zeta \right), \\ C_{F_s} &= -\frac{i}{l}(1+\sigma) \left(z_F(1-\kappa_0) - z_A - \frac{1}{V_0^2} \int_{\pi/2}^{\zeta_F} \frac{dw}{d\zeta} \overline{\frac{dw}{dz}} d\zeta \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\zeta_F = \pi/2 + \pi\tau/2$ и $\kappa_0 = 1 - V_1^2/V_0^2$. Полный коэффициент силы $C_F = C_D + iC_L = C_{F_p} + C_{F_s}$.

4. ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ РЕШЁТКИ ПЛАСТИН С ИНТЕРЦЕПТОРАМИ ПО СХЕМЕ КИРХГОФА

В случае задачи о суперкавитационном обтекании одиночной пластины с интерцептором при условии положительного числа кавитации каверна не может простираться до бесконечности, поскольку статическое давление в набегающем потоке и в бесконечности за телом больше, чем давление внутри каверны. Уменьшение числа кавитации влечёт за собой увеличение размеров каверны и удаление от тела области её замыкания. В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ кавитационное течение совпадает со струйным обтеканием тел по схеме Кирхгофа. Таким образом, струйное обтекание препятствия можно рассматривать как кавитационное обтекание с бесконечно длинной каверной.

Применительно к решётке профилей схема Кирхгофа моделирует кавитационное обтекание лишь при вполне определённых для данной решётки числах кавитации $\sigma > \sigma_0$, где $\sigma_0 = v_0^2/v_\infty^2 - 1$. Здесь v_∞ - это модуль скорости набегающего потока, а v_0 - модуль скорости за решёткой.

Для нахождения этого минимально возможного значения σ_0 необходимо рассматривать задачу обтекания решётки пластин с интерцепторами по схеме Кирхгофа. Основные требования, обозначения и методы решения те же, что и для рассмотренных до этого задач.

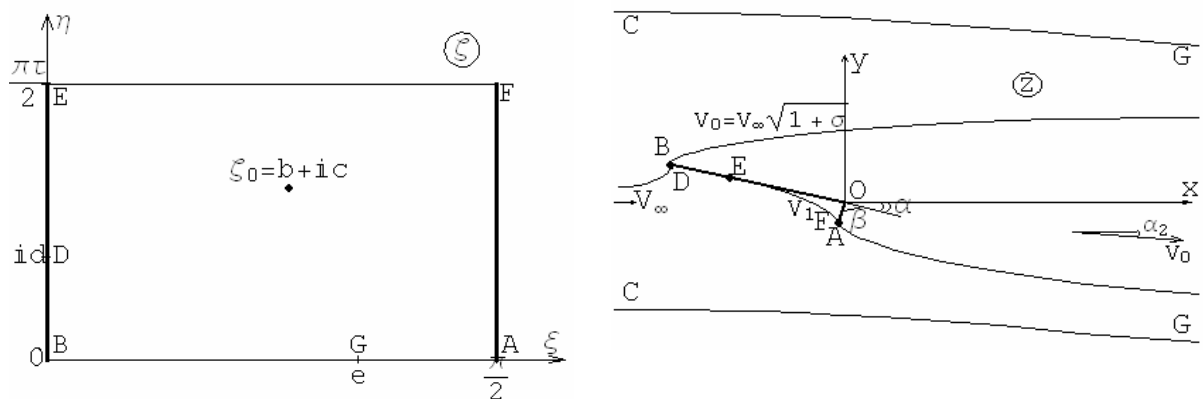


Рис. 3. Задача обтекания по схеме Кирхгофа решётки кавитирующих пластин с интерцептором с образованием застойной зоны. Физическая и вспомогательная плоскости в пределах одного периода.

Из рис. 3 (слева) видно, что, в отличие от предыдущего случая, в бесконечно удалённой точке G модуль скорости равен V_0 , направление же скорости вновь неизвестно и имеет значение α_2 по отношению к набегающему потоку.

Из решения данной задачи можно получить выражение для нахождения значения числа кавитации σ_0 , которое является минимально возможным при рассмотрении кавитационного обтекания решётки пластин с интерцептором с образованием застойной зоны и замыканием каверны по схеме Тулина-Терентьева.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Численное решение рассмотренных задач связано с проблемой решения системы сформулированных нелинейных уравнений, которая обусловлена слишком большим числом уравнений и неизвестных.

При решении системы используется метод Ньютона, и предварительно решается задача о кавитирующей пластине с интерцептором (решётке кавитирующих пластин с интерцепторами) и замыканием каверны по схеме Тулина-Терентьева без застойной зоны. Для такой постановки вспомогательной областью будет первый квадрант, поэтому при получении начальных значений для основной задачи используется конформное преобразование:

$$u = i \frac{\tan c'}{\tan \zeta}; \quad \zeta = \arctan\left(\frac{it_1}{u}\right) = -\frac{i}{2} \log \frac{u - t_1}{u + t_1}. \quad (12)$$

Начальное значение для параметра q находится из решения нелинейной задачи по внутреннему обтеканию интерцептора с образованием застойной зоны.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже представлены численные результаты для рассмотренных задач.

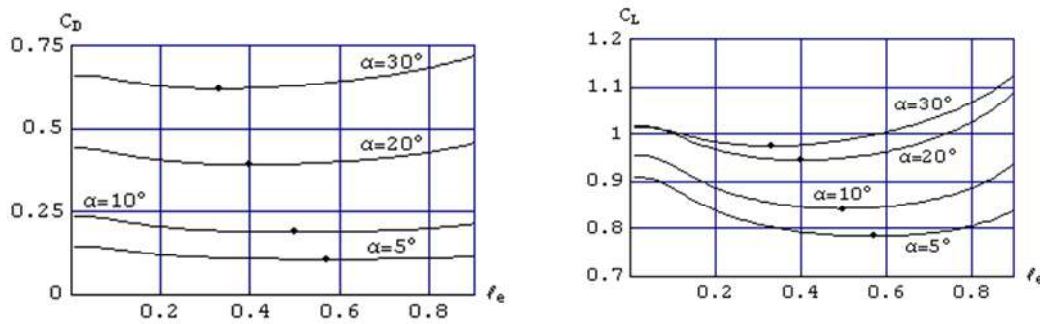


Рис. 4. Значения коэффициентов C_D и C_L в зависимости от положения точки l_E при $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 0.5$ и $\varepsilon/l = 0.05$ для углов атаки $\alpha = 5^\circ$, 10° , 20° и 30° (одиночная пластина).

На рис. 4 можно видеть графики коэффициентов подъёмной силы C_L и сопротивления C_D в зависимости от изменения координаты точки схода застойной зоны l_E для длины интерцептора $\varepsilon/l=0.05$. для значений угла атаки $\alpha=5^\circ$, 10° , 20° и 30° и угла наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$.

Из графиков также можно выделить еще одну важную закономерность. Хорошо видно, что для каждого случая существует минимальное значение для коэффициентов C_L и C_D (на графиках оно отмечено точками). Причем минимум, как для коэффициента сопротивления, так и для коэффициента подъемной силы при одинаковых исходных данных, достигается для одного и того же значения координаты точки схода застойной зоны. Оказывается, что величина l_E , при которой достигаются указанные минимумы коэффициентов сопротивления и подъемной силы, соответствует случаю выполнения условия Бриллюена в точке E . Рис. 5 представляет картины течения и годографы для следующих исходных параметров: $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 0.5$ и $\varepsilon/l = 0.15$. Верхний рисунок соответствует токи контакта $l_E = 0.1$, средний – $l_E = 0.9$, нижний – $l_E = 0.697$, когда выполнено условие Бриллюена.

Любопытно отметить, что если точка контакта находится ближе к передней кромки, то граница застойной зоны пересекает пластину. Однако эту границу можно рассматривать как некоторую форму профиля с постоянным давлением (p_∞) на верхней стороне и постоянным давлением (p_1) на участке нижней стороны, соответствующей застойной зоны.

Любопытно отметить, что если точка контакта находится ближе к передней кромки, то граница застойной зоны пересекает пластину.

Для решетки пластин ситуация аналогичная. Зависимости для коэффициентов сопротивления и подъемной силы, представленные на рисунке 6 при $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 1$, $\varepsilon/l = 0.05$ для углов атаки $\alpha = 5^\circ$, 10° и 15° и периода решетки $4e^{i100^\circ}$, также показывают наличие точек минимума, в которых выполнено условие Бриллюена.

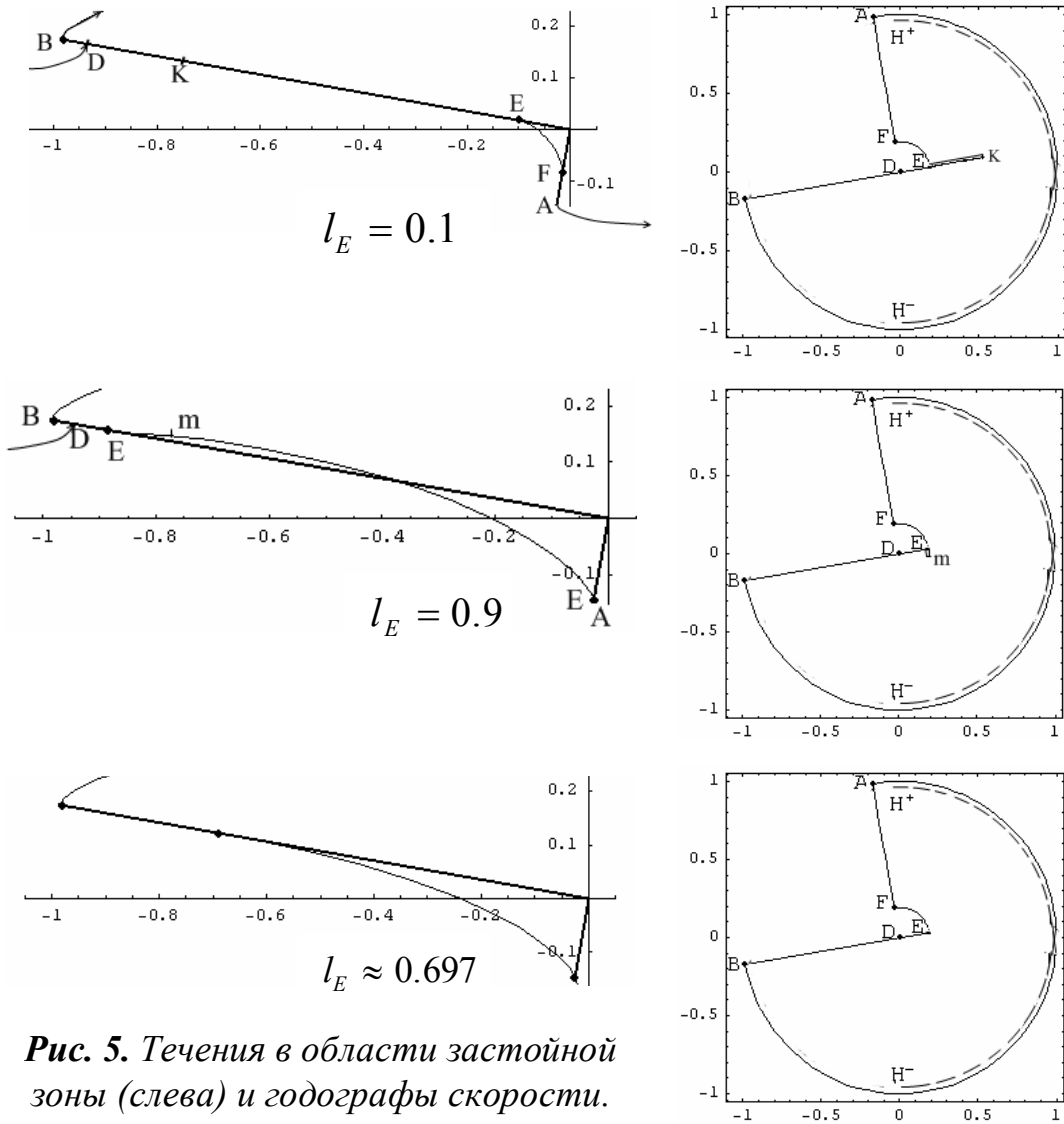


Рис. 5. Течения в области застойной зоны (слева) и годографы скорости.

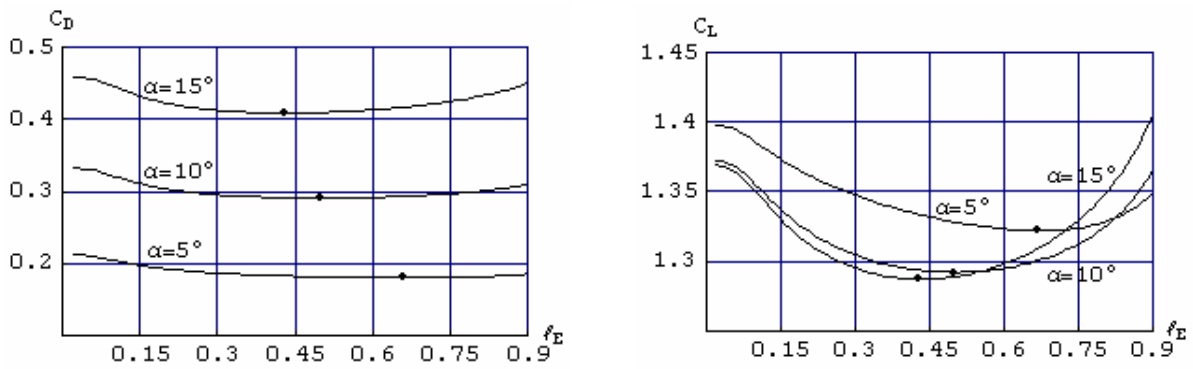


Рис. 6. Значения коэффициентов C_D и C_L в зависимости от положения точки l_E при $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 1$, $\varepsilon/l = 0.05$ для углов атаки $\alpha = 5^\circ$, 10° и 15° (решетка с периодом $4e^{i100^\circ}$)

Рисунок 7 представляет графики для значения коэффициентов сопротивления и подъемной силы C_D и C_L , значения величины l_E и значения качества, то есть отношения C_L/C_D в зависимости от угла атаки α при заданном угле наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$. Каждый график содержит зависимости для чисел кавитации $\sigma = 0.2, 0.5$ и 1 . Рисунки представлены для одиночной пластины и длины интерцептора $\varepsilon/l = 0.05$.

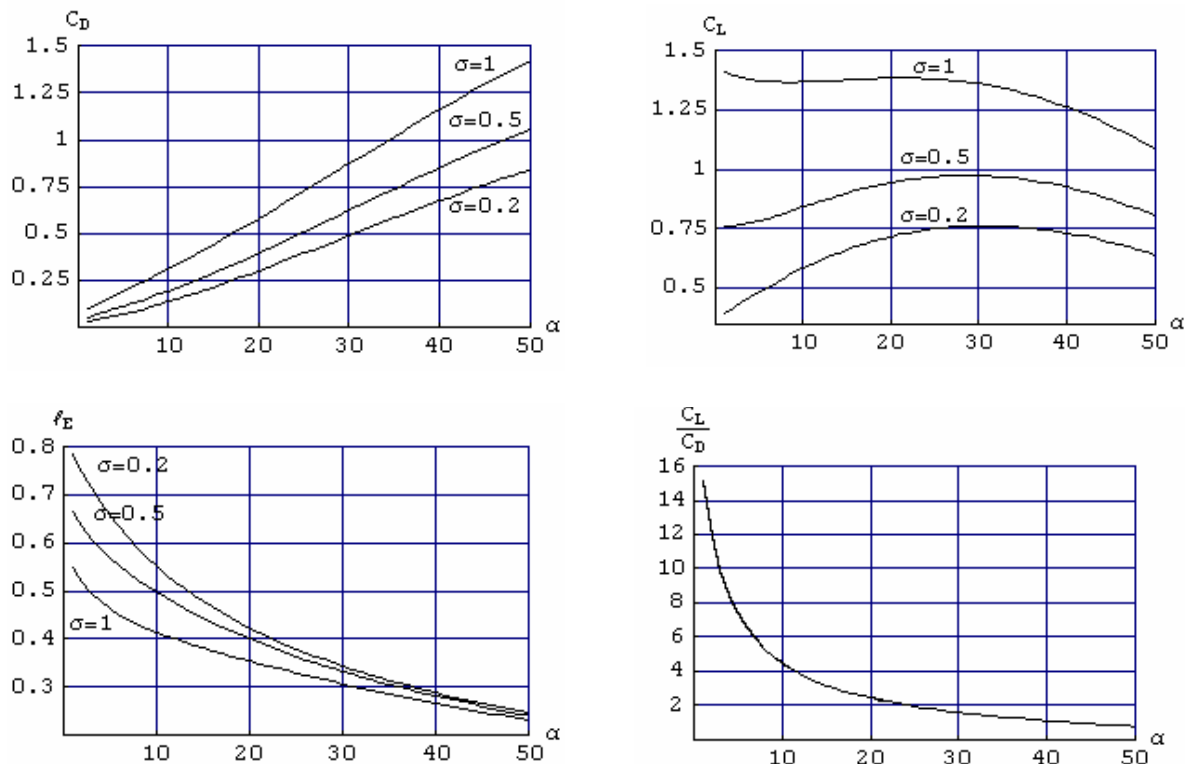


Рис. 7. Значения коэффициентов C_D , C_L , координаты l_E и отношения C_L/C_D в зависимости от угла атаки α при $\beta = 90^\circ$ для чисел кавитации $\sigma = 0.2, 0.5$ и 1 и при длине интерцептора $\varepsilon/l = 0.05$ (одиночная пластина).

Рис. 8 демонстрирует для одиночной пластины графики для тех же величин в зависимости от угла наклона интерцептора β при заданных значениях $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ и 30° , $\sigma = 0.5$ для длины интерцептора $\varepsilon/l = 0.05$.

Рис. 9 для задачи об обтекании решетки показывает зависимость коэффициента сопротивления C_D , коэффициента подъемной силы C_L и значения l_E для положения точки начала застойной зоны в зависимости от шага решетки s при заданных угле атаки $\alpha = 5^\circ$, угле наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, угле выноса решетки $\Sigma = 100^\circ$ для длин интерцептора $\varepsilon/l = 0.05; 0.1; 0.15$ для значения числа кавитации $\sigma = 0.5$. Из рисунков видно, что расчёты произведены для разных значений шага решетки в зависимости от различных исходных данных. Однако при слишком малых значениях s картина течения не может быть построена, так как решетка оказывается слишком «сжатой», и вычисления становятся невозможными. Напротив, при больших значениях шага решетки для каждого случая существует горизонтальная асимптота, обозначенная пунктирной линией и со-

ответствующая значению того или иного параметра для бесконечного значения шага решётки, то есть для случая задачи обтекания одиночной пластины с интерцептором.

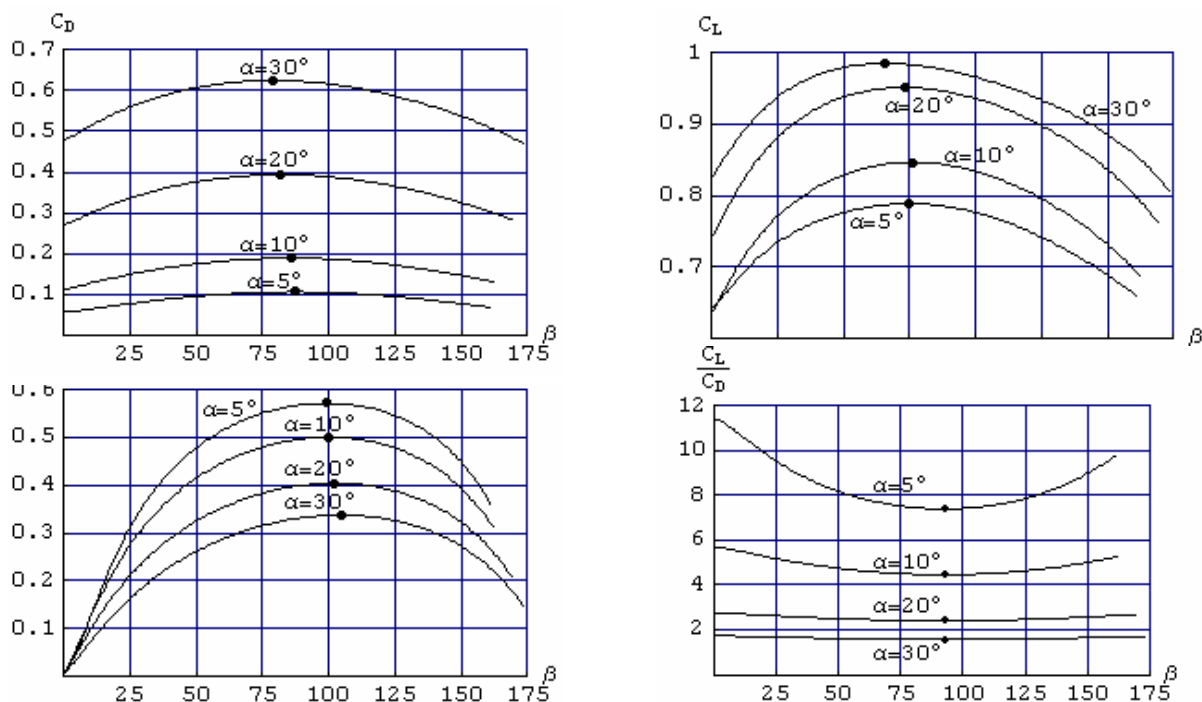


Рис. 8. Значения коэффициентов C_D , C_L , координаты l_E и отношения C_L/C_D в зависимости от угла β при заданных значениях $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ и 30° , $\sigma = 0.5$ для длины интерцептора $\varepsilon/l = 0.05$ (одиночная пластина)

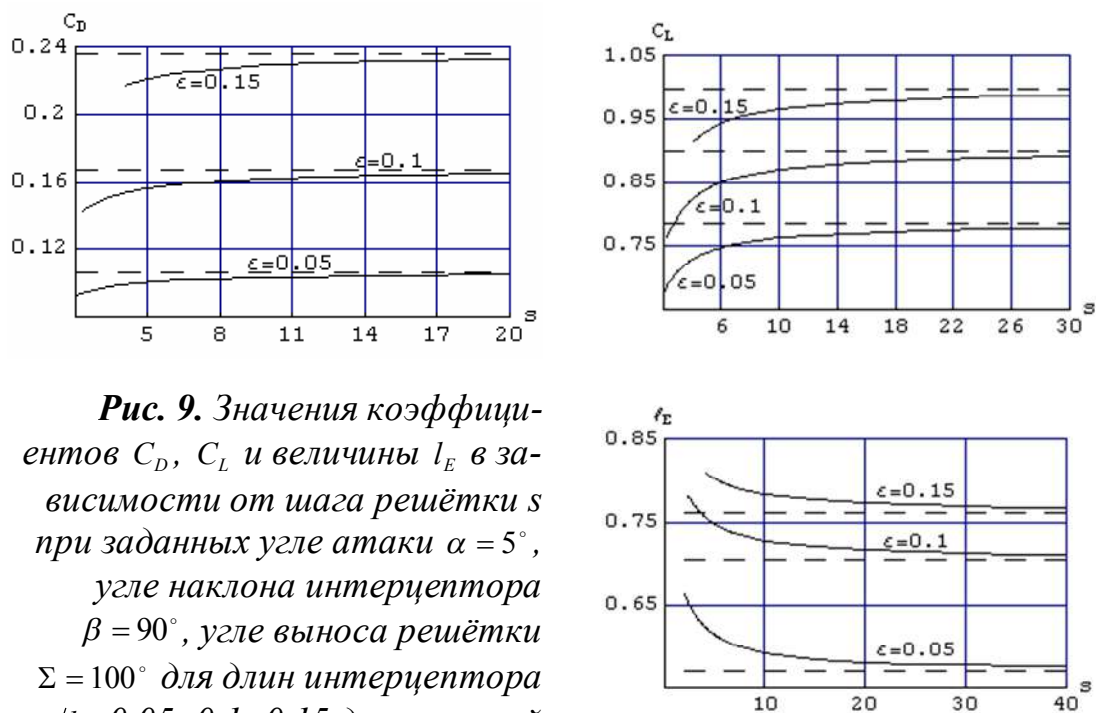


Рис. 9. Значения коэффициентов C_D , C_L и величины l_E в зависимости от шага решётки s при заданных угле атаки $\alpha = 5^\circ$, угле наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, угле выноса решётки $\Sigma = 100^\circ$ для длин интерцептора $\varepsilon/l = 0.05; 0.1; 0.15$ для значений числа кавитации $\sigma = 0.5$.

Связь между задачей кавитационного обтекания решетки пластин с интерцепторами с образованием застойной зоны и замыканием каверны по схеме Гулина-Герентьева и задачей обтекания по схеме Кирхгофа решетки пластин с интерцепторами с образованием застойной зоны можно видеть на рисунке 10. Здесь приведены значения коэффициента сопротивления C_D , коэффициента подъемной силы C_L и величины l_E в зависимости от числа кавитации σ при заданных угле атаки $\alpha = 5^\circ$, угле наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, периоде решетки $3e^{i100^\circ}$ для различных длин интерцептора $\varepsilon/l=0.05, 0.1$ и 0.15 . Как уже было замечено, для задач кавитационного обтекания решеток существует минимально возможное число кавитации, которое соответствует наличию каверны бесконечной длины. Это минимальное значение числа кавитации σ_0 имеется для каждого приводимого на рисунке графика. Расчеты прерываются на значениях, показанных на всех трех графиках пунктирными линиями, которые соответствуют числам кавитации, найденным при решении задачи обтекания решетки пластин с интерцепторами по схеме Кирхгофа для тех же исходных параметров при изменяющихся заданных длинах интерцептора.

Рис. 11 демонстрирует картины течения в зависимости от величины интерцептора. Исходные данные взяты следующие: угол атаки $\alpha = 5^\circ$, угол наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, число кавитации $\sigma = 0.8$, период решетки $7e^{i100^\circ}$. Результат представлен для обтекания решетки пластин без интерцептора, а также при наличии интерцептора с длинами $\varepsilon/l=0.05, 0.1$ и 0.2 .

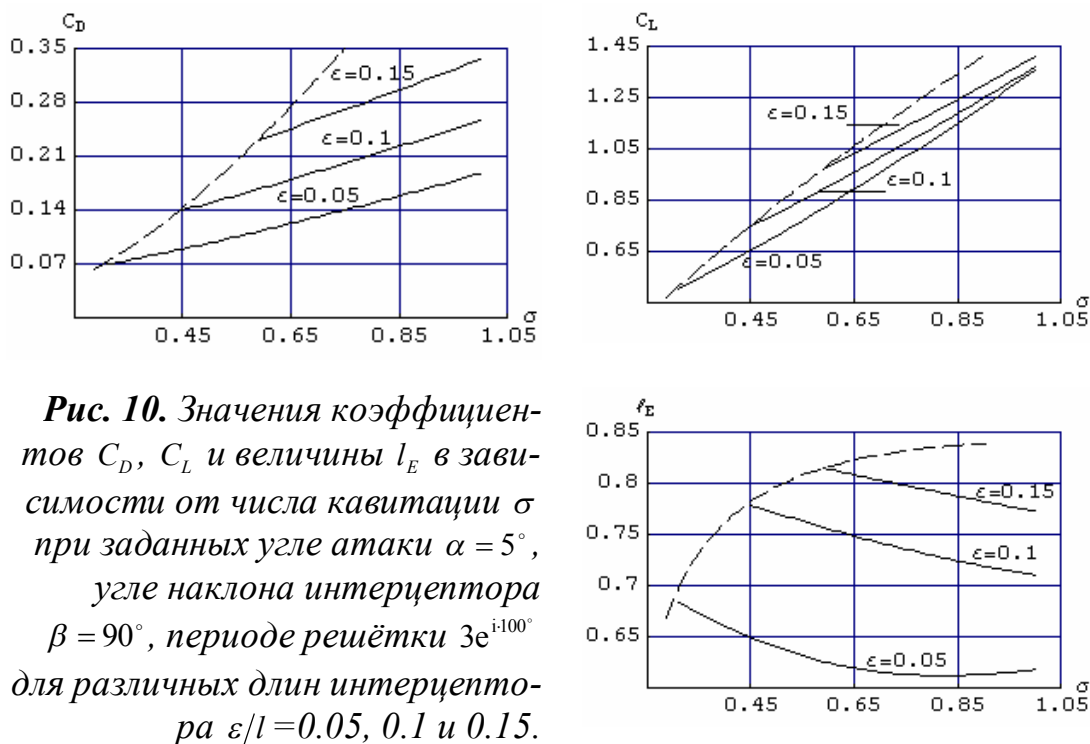


Рис. 10. Значения коэффициентов C_D , C_L и величины l_E в зависимости от числа кавитации σ при заданных угле атаки $\alpha = 5^\circ$, угле наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, периоде решетки $3e^{i100^\circ}$ для различных длин интерцептора $\varepsilon/l=0.05, 0.1$ и 0.15 .

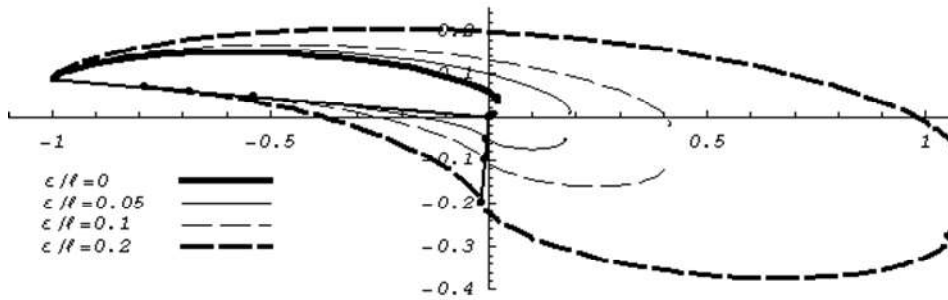


Рис. 11. Картина течения для решетки пластин для исходных параметров $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 0.8$ при периоде решётки $7e^{i100^\circ}$.
Длина интерцептора изменяется от 0 до 0.2.

В заключение вспомним, что исходное значение для итоговой системы нелинейных уравнений для основной рассматриваемой задачи обтекания кавитирующей пластины с интерцептором с образованием застойной зоны и замыканием каверны по схеме Тулина-Терентьева берётся из решения аналогичной задачи без образования застойной зоны. И следующий рисунок демонстрирует, как влияет появление застойной зоны на картину течения. Из рис. 12 видно, что при наличии застойной зоны длина каверны уменьшается примерно на 25% по сравнению со случаем, когда в точке O происходит скачок аргумента скорости. Результаты приведены для случая угла атаки $\alpha = 5^\circ$, угла наклона интерцептора $\beta = 90^\circ$, числа кавитации $\sigma = 1$, длины интерцептора $\varepsilon/l = 0.15$, шага решетки $s=7$ и угла выноса решётки $\Sigma = 100^\circ$.

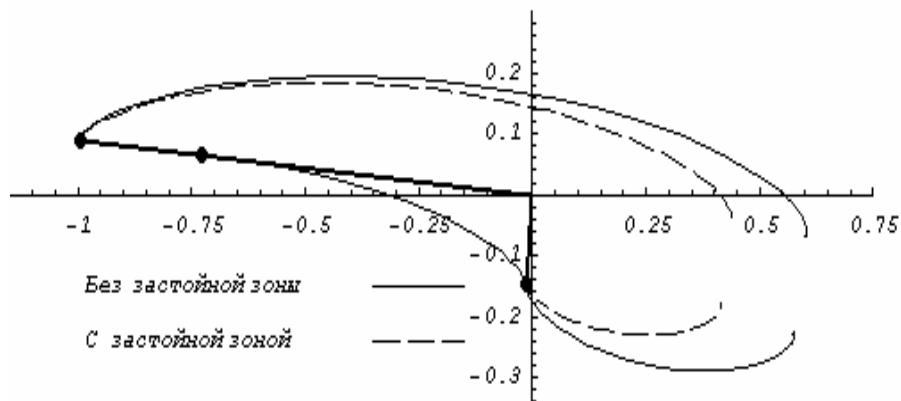


Рис. 12. Картина течения для решетки пластин для исходных параметров $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\sigma = 1$ и $\varepsilon/l = 0.15$ при периоде решётки $7e^{i100^\circ}$. Каверна для случаев без застойной зоны (сплошная линия) и с застойной зоной (пунктирная линия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Банников Ю.М., Лукашевский В.А. Глиссирующее судно. Авт. свидетельство 407783. Бюллетень изобретений и открытий, No. 47, 1973.
2. Банников Ю.М., Лукашевский В.А. Экспериментальное исследование подъемной силы и сопротивления глиссирующих пластин, Ученые записки ЦАГИ, т. 7, No. 1, 1976.
3. Гуревич М. И., Теория струй идеальной жидкости, Москва, Наука, 1979.
4. Изобретение, авторы Соловьев А.П.; Силин В.И.; Усатов А.И.; Ярошевич М.В., Патент Российской Федерации RU2013649.
5. Интерцепторы – средство управления гидродинамическими параметрами быстроходного судна. М.Мавлюдов, Ю.Садовников, В.Титов. Катера и яхты, №170, 2000.
6. Справочник по малотоннажному судостроению. Составитель Б. Г. Мордвинов. Л., Судостроение 1987.
7. Терентьев А. Г. Кавитационное обтекание плоской пластинки. Изв. Вузов, Математика, 1964, №6.
8. Терентьев А. Г., Обтекание решетки пластин с развитой кавитацией, Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, №2.
9. Терентьев А. Г. Математические аспекты кавитации, Чувашский гос. ун-т, Чебоксары, 1981.
10. Чаплыгин С. А., К вопросу о струях в несжимаемой жидкости, Труды отд. физ. наук О-ва любителей естествознания, т. X, вып. 1, Москва, 1899.
11. Fridman G. M. and Maklakov D. V., 2002, Free streamline flow past a non-symmetric wedge with stagnation zone, *Proceedings of The International Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"* (HSH'2002), Cheboksary, Russia, p.p. 399-406.
12. Fridman G. M. and Uryadov A. K., 2004, Cavitating flat plate with stagnation zone in the spoiler vicinity, *Proceedings of The Second International Summer Scientific School High Speed Hydrodynamics*, June 2004, Cheboksary, Russia, p.p. 83-90.
13. Fridman G. M. and Uryadov A. K., 2006, Cavitating hydrofoilin a cascade with stagnation zone in the spoiler vicinity, *Proceedings of The Third International Summer Scientific School High Speed Hydrodynamics*, June 2006, Kemerovo, Russia, p.p. 83-90.
14. Terentev A.G., Dimitrieva N.A. Theoretical investigation of cavitating flows, *Proceedings of the Third International Symposium on Cavitation*, Grenoble, France, 1998, vol. II, pp. 275-280.

ОТЗЫВЫ И ВЫДЕРЖКИ ИЗ ПОЗДРАВЛЕНИЙ ЮБИЛЯРА

AN APPRECIATION: RECOLLECTIONS OF A.G. TERENCEV ON HIS 75th ANNIVERSARY

Marshall P. Tulin
Santa Barbara, California, USA

In 1974 my attention was drawn to the serious ship vibrations caused by heavy, unsteady cavitation on the highly loaded propellers of very large tankers. The further quantitative understanding and mitigation of these problems demanded a detailed understanding of the shape and size of the cavities appearing at the leading edges of the ships propeller and their evolution and variation in time as the blade rotated through the inhomogeneous ships wake, especially strong on large tankers with their blunt sterns. At this time the theory of leading edge (short) cavities in the West was limited to linearized approaches, originating with the work of Alan Acosta (1955) on flat plates. However, the extension of the linearized theory to shaped foils with rounded leading edges and finite incidence in the succeeding years did not give good agreement with experiments. In this situation I therefore began the development of a non-linear theory of short cavities with my colleague, C.C. Hsu. We found a solution based on a perturbation of the fully wetted non-linear flow about the blade section, Tulin and Hsu (1977) and (1980).

During this research we had discovered the Soviet work of A.G. Terentev (and A.V. Kutzentsov) published in (1964) and (1967), complete with calculations showing the non-linear variation in the size of the short cavities in flat plates at incidence due to the incidence and cavitation number. The agreement between their own non-linear theory and calculations and our own was very good in the case of short cavities on flat plates-- a positive finding of great validating importance to us.

It was in this way that the work of Terentev first came to my attention in an impressive way, although his work had in fact been mentioned and referenced in a paper on non-linear cavity theories presented by Kuznetsov and Terentev (in Russian) at a IUTAM Conference on "Non-Steady Flow of Water at High Speeds" which was held in Leningrad in 1971, just 40 years ago. I had helped Leonid Ivanovich Sedov organize the scientific program for this meeting on the US side and had attended. It was in fact a memorable meeting with about 100 international and over 100 Soviet scientists, all interested in one aspect or another of high speed hydrodynamics. The papers were by invitation and very select, and the appearance of Alexei Terentev as an author at that time, he was 35 years old, therefore indicated his reputation and prominence among Soviet theoretical hydrodynamicists. I did not however have a real understanding then of his role or importance in the field of high speed hydrodynamics on the theoretical side, and particularly supercavitation, then of growing importance in the Soviet Union under the guiding influence of Sedov.

I had earlier, in 1963, presented a lengthy review of US work on supercavitating flows, particularly of interest for the design of hydrofoils, at a IUTAM Symposium on "Analytic Methods in Continuum Mechanics" held in Tbilisi, Georgia, under the auspices of the Soviet Academy of Sciences, and in 1965 I had visited with a large

group of foreign engineers, the Kiev Institute of Hydrodynamics, who were already specializing in high speed hydrodynamics under the leadership of G.V. Logvinovich, a former Sedov student. I did not realize the significance of that Kiev Laboratory, nor of Logvinovich, at the time. It was in Tbilisi in 1963 that I presented some new models of "cavity closure", the single and double spiral models. Subsequently, Terentiev has been I believe the earliest scientist in the world to utilize one of these models successfully – in the case of the flow about a flat plate at non-zero cavitation number – and thereby provide a realistic example of a finite cavity flow [Terentev, 1976]. Subsequently he and his students have provided a variety of finite cavity solutions using the spiral models. The early initiative of Terentev demonstrates his fine scholarship, his great seriousness of purpose and scientific aggressiveness, and his mathematical skills and dedication. The same qualities can be seen throughout his body of work, now over 40 years ongoing. And over this period he has constantly broadened the range and physical complexity of the problems on which he made mathematical applications, but almost always within high speed hydrodynamics. This is quite remarkable.

However, it was not until over twenty years after the above events of the 60's and 70's that I was finally to know Alexei Terentev personally and to visit Chebok-sary, his ancestral and longtime home, that I could understand the full dimension of his personality.

A few years after the dissolution of the Soviet Union, in 1995, I was invited to participate in a meeting in Rhode Island on high speed supercavitating bodies which included participation by a few leading scientists from the Hydrodynamics Institute in Kiev, the same Laboratory I had visited in 1965, and I now realized their connection with the newly disclosed Soviet developed supercavitating torpedo, the Squall, a subject of considerable excitement to most scientists interested in supercavitating flows. This was followed in 1997 by an International Workshop in Kiev, organized by NATO, on High Speed Body Motion in Water, including some devoted to the flow about supercavitating bodies, as a paper by Logvinovich, formerly from Kiev and now from TSAGI. I spoke on the shape of Three Dimensional Cavities. Here in Kiev I became acquainted with the enthusiast of supercavitating flow, Vladimir Serebryakov, a scientist from the Kiev Hydrodynamics Institute, and a specialist in the theory of steady and unsteady three dimensional supercavitating flows and body motions.

In 2001, I gave some lectures on Special Course on Supercavitating Flows, which was held in Brussels (Denmark). Most important, Alexei Terentev was in attendance in Brussels and we finally, for the first, were to spend some time together, often with another enthusiast of supercavitating flow, Kirill Rozhdestvensky. In discussions together I learned that in the Soviet era, under the leadership of L.I. Sedov, desiring the development and interest in high speed hydrodynamics, a Summer School on that subject had been taking place for many Summers in Cheboksary, the capital of the Chuvash Republic, 400 miles east of Moscow on the Volga. Both Alexey and Kirill, and earlier Vladimir, had a great enthusiasm, I would say nostalgia, for these Meetings, which had ceased with the disestablishment of the Soviet Union, and I saw that they missed Sedov's role (he was the 90, and died two years later). I saw that their interest arose from a love of Hydrodynamics itself and a wish to maintain

and instill such an interest in young scientists and students. Now, much to my surprise, they asked me if I would become associated with an effort to hold the Summer School again in Cheboksary within the near future. I was carried by their enthusiasm for hydrodynamics, and my own too, and I agreed.

The 7th(and first International) Summer Scientific School on High Speed Hydrodynamics (HSH) was held in Cheboksary, June 16-23, 2002, with an impressive list of both Russian, Chuvash, and US Sponsors. It was dedicated in a very nice way to Leonid Ivanovich Sedov, who had chaired the six preceeding Schools beginning in 1975. Very interesting papers were presented by scientists from many countries, and Russian Republics, and they were good discussion. Many young Russians attended as well as a few American students. The success of this School is testimony both to the devotion, organizational ability, and natural hospitality of Alexei Terentev.

Being among those strongly independent and proud people, the Chuvash, generally longing for their independence, and from the looks of the growing and modernizing Cheboksary, those self-reliant, enterprising, and hard working people, I understood better the wonderful achievements of Alexei Terentev, person, teacher, and scientist.

Alexei, many, many thanks for the experiences you have brought me and for your constant friendship and kindnesses.

(Русский перевод Ф.О. Казаковой)

**В ЗНАК ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ:
РАЗМЫШЛЕНИЯ В СВЯЗИ С 75-ЛЕТИЕМ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

А.Г. ТЕРЕНТЬЕВА

Маршалл П. Тулин

Санта-Барбара, штат Калифорнияб США

В 1974 году мое внимание привлекли проблемы достаточно больших вибраций корабля, вызванных интенсивной неустойчивой кавитацией на слишком загруженных винтах больших танкеров. Дальнейшее детальное осмысление и решение этих проблем требовало рассмотрения формы и размеров каверн, возникающих на передних кромках корабельных винтов, их эволюции и изменения во времени, так как лопасть винта, поворачиваясь, оставляла неравномерные следы, что было особенно заметно на крупных танкерах с прямыми кормами. В это время теория небольших каверн на передней кромке основывалась лишь на линеаризованном подходе, представленном в работе Алана Акоста (1955) о плоских пластинах. Однако распространение в последующие годы линеаризованной теории на крылья с закругленными передними кромками и ограниченным наклоном не давали хорошего совпадения с экспериментальными данными. В связи с такой ситуацией я начал развивать нелинейную теорию коротких каверн вместе с моим коллегой, С.С. Сю. Мы нашли решение, основанное на возмущении потока при безотрывном обтекании сечения лопасти винта [Tulin and Hsu (1977) and (1980)].

В ходе этого исследования мы обнаружили советские работы А.Г. Терентьева и А.В. Кузнецова, опубликованные в (1964) и (1967), которые завершались расчетами, показывающими нелинейное изменение размеров частичных каверн на пластинах в зависимости от угла наклона и числа кавитации. Наблюдалось очень хорошее совпадение результатов нелинейной теории с нашими расчетами в случае коротких каверн на пластинах, что было важным подтверждением наших результатов.

Случилось так, что эти работы Терентьева впервые привлекли мое внимание и впечатлили меня, хотя они были изданы раньше. На них были ссылки в докладе (на русском языке) по нелинейной теории кавитации, представленного Кузнецовым и Терентьевым на симпозиуме «Неустановившиеся течение воды с большими скоростями», которая состоялась в Ленинграде в 1971 году, ровно 40 лет назад. Я помог Леониду Ивановичу Седову в составлении научной программы для симпозиума от США и принял в ней участие. Эта встреча стала действительно запоминающейся, в ней приняли участие около 100 иностранных и более 100 советских ученых, интересующихся той или иной областью гидродинамики больших скоростей. Доклады были тщательно отобраны, и поэтому появление Алексея Терентьева, как автора (в то время, ему было 35 лет), служило признаком его признания и выдающегося положения среди советских ученых гидродинамиков. Я, однако, тогда не имел реального представления о

его роли и значения в области гидродинамики больших скоростей на теоретическом поприще, и, в частности, в области суперкавитации, приобретающей тогда под руководством Седова все большее значение в Советском Союзе.

Ранее, в 1963 году, на симпозиуме «Аналитические методы в механике сплошных сред», состоявшемся в Тбилиси (Грузия) при содействии Академии наук СССР, я представил очень длинный обзор американских работ по суперкавитирующим течениям, представляющих, в частности, интерес для проектирования подводных крыльев. А в 1965 году я посетил Киевский Институт гидродинамики с большой группой иностранных инженеров, которые уже специализировались в области гидродинамики больших скоростей под руководством Г.В. Логвиновича, бывшего студента Седова. В то время я не осознавал значения ни этой Киевской лаборатории, ни Логвиновича.

В Тбилиси в 1963 году я представил некоторые новые модели замыкания каверны, одинарные и двойные спиральные модели. Впоследствии, я считаю, Терентьев был первым ученым в мире, сумевшим успешно использовать одну из этих моделей – в случае обтекания плоской пластины при ненулевом числе кавитации – и тем самым показал реалистичный пример замкнутой каверны в потоке [Терентьев, 1976]. Впоследствии он и его студенты представили множество решений замкнутой каверны с использованием спиральной модели. Ранняя инициатива Терентьева демонстрирует его прекрасную эрудицию, величайшую серьёзность его стремлений и научную предприимчивость, а также его математические способности и преданность делу. Эти же качества можно увидеть на протяжении всей его работы, которая продолжается к настоящему времени более 40 лет. За этот период он постоянно увеличивал область и физическую сложность исследуемых задач, по которым он сделал математические приложения, но почти всегда внутри гидродинамики больших скоростей. Это весьма примечательно.

И всё же, прошли не менее двадцати лет после событий 60-х и 70-х годов прежде, чем я, наконец, лично познакомился с Алексеем Терентьевым, а также посетил Чебоксары, его уютную квартиру и смог оценить всю значимость его личности.

Через несколько лет после распада Советского Союза, в 1995 году, я был приглашен в Род-Айленд для участия в заседании по скоростным суперкавитирующим телам, в котором принимали участие несколько ведущих ученых из Института гидродинамики в Киеве, из той же лаборатории, которую я посетил в 1965 году. Теперь я понял, что они участвовали в разработке новой советской суперкавитирующей торпеды «Шквал», которая была предметом серьезного обсуждения большого количества ученых, интересующихся суперкавитирующими потоками. Вслед за этим в 1997 году я докладывал о форме трехмерных каверн на организованном НАТО международном семинаре в Киеве, посвященном движению тела в воде с высокой скоростью и включающем несколько работ, посвященных обтеканию суперкавитирующих тел, таких как статья Логвиновича, руководившего некогда в Киева, а затем в ЦАГИ. В Киеве мне представилась возможность пообщаться с одним из энтузиастов, увлеченным суперкавитирующими течениями, В. В. Серебряковым, учёным из Института гидро-

динамики в Киеве и специалистом по теории стационарных и нестационарных трехмерных суперкавитирующих потоков и движению тела.

В 2001 году меня пригласили выступить с лекциями на Международной лектории, организованной НАТО в Брюсселе (Бельгия) в 2001г. Наиболее важно, что Алексей Терентьев присутствовал в Брюсселе, и мы, наконец, впервые, могли провести некоторое время вместе, часто с ещё одним энтузиастом, проф. Кириллом Рождественским. В совместной дискуссии я узнал, что в советское время под руководством Л. И. Седова, желающего развить интерес к гидродинамике больших скоростей, Алексей Терентьев организовывал летнюю научную школу «Гидродинамика больших скоростей» которая регулярно проходила в Чебоксарах, столице Чувашской Республики, в 400 милях к востоку от Москвы, на Волге. Оба участника, Алексей и Кирилл, а ранее Владимир, вспоминали с большой восторженностью, я бы сказал, с ностальгией, об этих встречах, которые прекратились после распада Советского Союза, и как я понял, лишились поддержки Седова (ему было 90, и он умер два года спустя). Я видел их интерес, возникший из любви к гидродинамике, и желание сохранить этот интерес и привить его молодым учёным и студентам. Тогда, к моему большому удивлению, они спросили меня, готов ли я попытаться снова провести Летнюю школу в Чебоксарах в ближайшем будущем. Меня поддержал их и мой собственный энтузиазм в гидродинамике, и я согласился.

Седьмая (и первая международная) Летняя научная школа по гидродинамике больших скоростей (HSH) была проведена в Чебоксарах 16-23 июня 2002 года, с впечатляющим списком как русских, чувашских, так и американских спонсоров. Она была проведена в лучших традициях, которые задал Леонид Иванович Седов, возглавлявший шесть предыдущих школ, начиная с 1975 года. Учеными из многих стран и российских республик были представлены очень интересные работы, обсуждение которых было весьма плодотворным. Многие молодые русские, а также несколько американских студентов, приняли участие в научной школе. Успех этой школы является свидетельством преданности делу, организационных способностей и природного гостеприимства Алексея Терентьева.

Находясь среди этих очень независимых и гордых чувашских людей, всегда стремящихся к самостоятельности, что видно из того, как растут и развиваются Чебоксары, среди этих уверенных в себе, предприимчивых и трудолюбивых людей, я лучше понял поразительные достижения Алексея Терентьева, человека, учителя и ученого.

Алексей, огромное спасибо за опыт, который вы мне подарили, и за постоянную дружбу и доброту.

**THE MANY ACCOMPLISHMENTS OF PROFESSOR
ALEXEY G. TERENTIEV**

Dr. Ivan N. Kirschner
Portsmouth, Rhode Island, USA

It is with great pleasure and admiration that I acknowledge the extensive and very impressive contributions that Professor Alexey G. Terentiev has made to our shared field of hydrodynamics. I have known Alexey for just under ten years, yet his professional and academic influence on me and many of our colleagues has been very important. I anticipate that many of our associates share this sentiment, and I can recall many conversations with widely admired scientists, mathematicians, and engineers who have expressed their great respect for Alexey. I also expect that all of these people and many others share my sense of gratitude to Alexey, not only for his capability, but also for his vision, which is international in scope, and spans the full range of fluid mechanics.

I first recall meeting Professor Terentiev in 2002 in Cheboksary, Russia, where I had been invited to participate in the first international version of the Summer School on High-Speed Hydrodynamics (HSH2002). This forum represented a continuation of the famous series of symposia formerly held only for scientists of the USSR by the great Leonid Ivanovitch Sedov. This international initiative by Alexey attracted many of today's leading hydrodynamicists, and was a seminal event in the re-kindling of shared interests among researchers from Russia, America, Ukraine, China, Germany, the Scandinavian countries, and other regions of the world after the end of the Cold War. Alexey and his colleagues in Cheboksary provided a unique opportunity to review the accomplishments of other colleagues across a broad range of investigation in high-speed hydrodynamics. Of course, Alexey's contributions and those of his students were among the most important and interesting of the presentations. The tradition that he initiated in 2002 continued in 2004 (in Cheboksary), in 2006 (in Kemerovo, under the leadership of Professor Konstantin Afanasiev), and again in 2008 (with a return to Cheboksary). We can hope that the tradition will not end there, and that this important international forum will continue, hopefully to be located in other parts of the world in gratitude for the wonderful hospitality and superior academic environment presented by our Russian hosts, as exemplified by Alexey.

Turning to Professor Terentiev's many specific technical and academic accomplishments, I would first note that his body of work – while focusing on cavitation and free-surface hydrodynamics – has embraced other areas, as well. It is the unity of the mathematics that makes Alexey's work both valuable and interesting. Whereas other mathematical physicists have confined their attention to only a few specific techniques, Alexey has made it his business to explore each of the methods that has appeared in the literature, and to improve upon many of them. Of course, he owns the world of classical hydrodynamics as represented by the methods of conformal mapping, having applied the associated techniques to many problems of interest in the field of cavitation. A review of his literature indicates that he has left very few of the fundamental problems untouched, and has contributed new ideas to supplement, enhance, and even correct those of some of the great researchers of the 20th century.

His endeavors do not end there, of course – to this, Alexey has contributed hydrodynamics models employing many other mathematical methods: expansion in series, asymptotic methods, methods of singularities, and other methods of approximation. His focus includes not only some very challenging steady state problems, but also problems involving unsteady flows.

What is perhaps most impressive about Professor Terentiev's work is that it has kept pace with worldwide developments in the field for so many decades. Clearly, he is not content to sit idle while others explore the new worlds that have been opened by affordable access to digital computers. In addition to his own very significant accomplishments in numerical hydrodynamics (which are further enhanced by his concise and accurate presentation of both the methods and the results), he remains intimately familiar with the ongoing work of many, many colleagues around the world. Even in areas that are not in his direct focus, he maintains a thorough understanding of the emerging literature, and can thus discuss with great intelligence such modern topics as smoothed particle hydrodynamics, modern methods for the analysis of real effects (such as surface tension and viscosity) in the hydrodynamics of cavitating hydrofoils, the dynamics of cavitating flow systems, and complicated effects in multi-phase flow systems. To all of this, he brings the added talent of recognizing the potential applications of all of these techniques to real-world systems, such as marine propellers and even underground sprinkler systems. In the area of mathematical physics, he also refuses to limit himself to the world of high-speed hydrodynamics, having explored the application of the underlying mathematics and the associated techniques to impulsive impact problems and low-Reynolds-number flows.

Finally, a broader aspect of Alexey's abilities should be mentioned – one that is not only of human interest, but that I suspect also enables and informs his scientific and mathematical capabilities. Specifically, I would note that, as he approached retirement, Alexey undertook to expand his communications skills by adding English to his portfolio of languages, which already included his native Russian and also German. Not only does this allow him to become continually more knowledgeable about worldwide developments in his chosen field of hydrodynamics, it also indicates an unusual sense of curiosity about the world and the people with whom he interacts. Beyond that, it indicates a human warmth, a sense of hospitality, and the basic instinct to generously share his knowledge and ideas with the rest of us.

Alexey's students are very lucky to have had his guidance and friendship, and I consider myself very lucky to have had the pleasure of working with him over the past years. Congratulations are in order on his anniversary, and may we all enjoy the fruits of his contributions and his friendship for many years to come.

(Русский перевод Казаковой А.О.)

**О ДОСТИЖЕНИЯХ ПРОФЕССОРА
АЛЕКСЕЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ТЕРЕНТЬЕВА**

Докт. Айван Н. Кишнер
Портсмут, Род-Айленд, США

Я с большим удовольствием и восхищением выражаю признательность профессору Алексею Терентьеву за его огромный и впечатляющий вклад в нашу совместную область гидродинамики. Я знаю Алексея меньше десяти лет, но все же его профессиональное и академическое влияние на меня и многих наших коллег очень важно. Я предполагаю, что многие наши товарищи разделяют это чувство, и я могу вспомнить много разговоров с восхищёнными учеными, математиками и инженерами, которые выражали большое почтение Алексею. Я также ожидаю, что все эти люди и многие другие разделяют моё чувство благодарности Алексею не только за его одарённость, но и за его проницательность, которая является международной по размаху и охватывает всю область механики жидкости.

Первой мне вспоминается встреча с профессором Терентьевым в 2002 году в Чебоксарах в России, куда я был приглашен участвовать в первой международной Летней Школе по гидродинамике больших скоростей (HSH2002). Этот форум представлял продолжение известной серии симпозиумов, прежде проводящихся только для ученых СССР великим Леонидом Ивановичем Седовым. Эта международная инициатива Алексея привлекла многих из сегодняшних ведущих гидродинамиков, и возродила общие интересы среди исследователей из России, Америки, Украины, Китая, Германии, скандинавских стран, и других областей мира после конца Холодной войны. Алексей и его коллеги в Чебоксарах обеспечили уникальную возможность увидеть достижения других коллег в исследованиях широкого круга по гидродинамике больших скоростей. Конечно, работы Алексея и его студентов были одними из самых значимых и интересных представлений. Традиция, которую он заложил в 2002, была продолжена в 2004 (в Чебоксарах), в 2006 (в Кемерово, под руководством профессора Константина Афанасьева), и в 2008 (с возвращением в Чебоксары). Мы можем надеяться, что традиция на этом не закончится, и что этот важный международный форум продолжится, надеемся, и в других областях мира в благодарность за замечательное гостеприимство и превосходную академическую среду, обеспеченную нашими российскими хозяевами, такими как Алексей.

Обращаясь ко многим определенным техническим и академическим достижениям профессора Терентьева, я сначала отметил бы, что основная часть его трудов, сосредотачиваясь на кавитации и гидродинамике свободных поверхностей, охватила также и другие области. Математическая строгость – это то, что делает работы Алексея одновременно ценными и интересными. Тогда как другие математические физики сосредоточили свое внимание только на нескольких определенных методиках, Алексей сделал своим постоянным занятием изучение каждого метода, который появляется в литературе, и улучшение многих из них. Конечно, он принадлежит миру классической гидродинамики, представленной методами конформного отображения, применяющей похожие методики ко многим задачам, представляю-

щим интерес в области кавитации. Обзор его работ указывает на то, что он оставил очень немногие из фундаментальных проблем нетронутыми, и внес новые идеи по дополнению, расширению и даже исправлению некоторых работ великих исследователей 20-го столетия.

Его достижения, конечно, на этом не ограничиваются – кроме этого Алексей предложил гидродинамические модели, использующие много других математических методов: разложение в ряды, асимптотические методы, методы особенностей, и другие методы приближения. Он сосредоточен не только на некоторых очень сложных проблемах устойчивого состояния, но и на задачах, вовлекающих неустойчивые потоки.

То, что является, возможно, самым впечатляющим в работе профессора Терентьева, - это то, что он в течение очень многих десятилетий идёт в ногу с мировыми событиями. Ясно, что он не довольствуется достигнутыми результатами, в то время как другие исследуют новые области, которые были открыты возможным доступом к цифровым компьютерам. В дополнение к его собственным очень существенным достижениям в численной гидродинамике (которые далее расширены его кратким и точным описанием и методов, и результатов), он близко знаком с работами, которые ведут многие коллеги по всему миру. Он изучает появляющуюся литературу даже в тех областях, которые не находятся непосредственно в сфере его деятельности, и поэтому может на высоком интеллектуальном уровне обсудить современные проблемы. К ним, в частности, относятся метод сглаживаемых частиц в гидродинамике, современные методы анализа реальных эффектов (таких как поверхностная напряженность и вязкость) в гидродинамике кавитирующих подводных крыльев, динамика систем кавитирующего потока и сложные действия в многофазных системах потока. Ко всему этому добавляется его талант распознавания потенциальных приложений всех этих методик к реальным системам, таким как морские винты и даже подземные оросительные системы. В области математической физики он также не ограничивается миром гидродинамики больших скоростей, исследуя приложения фундаментальной математики и сопутствующих методик к задачам импульсного воздействия и к течениям с малым числом Рейнольдса.

Наконец, должна быть упомянута основная сторона способностей Алексея, которая не только обращает интерес к нему как к человеку, но и, я подозреваю, также подтверждает его научные и математические возможности. В особенности, я отметил бы то, что уже в немолодом возрасте Алексей стремился расширять свои навыки общения, добавляя английский язык к тем языкам, которым он обладал: родным русским, а также немецким языком. Мало того, что это позволяет ему становиться всё более хорошо осведомленным о международных событиях в выбранной им области гидродинамики, это также указывает на его необычайную любознательность по отношению к миру и людям, с которыми он взаимодействует. Кроме того, это указывает на человеческую теплоту, чувство гостеприимства, и природное желание великодушно поделиться своими знаниями и идеями с остальными из нас.

Студентам Алексея очень повезло, что они работают под его руководством и располагают его дружбой, и я считаю себя очень удачливым, так как имею удовольствие общаться с ним и работать над совместными научными проблемами. Мои поздравления с юбилеем, и пожелания, чтобы все мы могли наслаждаться плодами его работы и дружбы ещё много долгих лет.

ПРАВИТЕЛЬСТВЕННАЯ ТЕЛЕГРАММА
от члена Совета Федерации
Федерального Собрания Российской Федерации
Федорова Н.В.

ф. П-17

		ПРАВИТЕЛЬСТВЕННАЯ ТЕЛЕГРАММА	
Принят: 17/11	год: 14	час: 33	мин: 00
Классиф. №	000302		
Принят:			
		Для заметки адресата	
			

ЧЕБОКСАРЫ 158036/2 62 17/01 1426=

ПРАВИТЕЛЬСТВЕННАЯ ЧЕБОКСАРЫ УЛ КАРЛА МАРКСА 54 ЧЕБОКСАРСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ОТКРЫТОГО УНИВЕРСИТЕТА ПРОФЕССОРУ ТЕРЕНТЬЕВУ=

УВАЖАЕМЫЙ АЛЕКСЕЙ ГРИГОРЬЕВИЧ
ПОЗДРАВЛЯЮ ВАС С ЮБИЛЕЕМ. ВАШИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
СУЩЕСТВЕННО ОБОГАЩАЮТ ОТЕЧЕСТВЕННУЮ НАУКУ, СЛУЖАТ ПРОЧНОЙ ОСНОВОЙ
ДЛЯ ПОЯВЛЕНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПРАКТИЧЕСКИ ЗНАЧИМЫХ РАЗРАБОТОК.
ЖЕЛАЮ ВАМ КРЕПКОГО ЗДОРОВЬЯ, БЛАГОПОЛУЧИЯ, ДОЛГИХ ЛЕТ ЖИЗНИ,
ДАЛЬНЕЙШИХ УСПЕХОВ И ВСЕГО САМОГО ДОБРОГО=
ЧЛЕН СОВЕТА ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО СОБРАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ НИКОЛАЙ ФЕДОРОВ-

ННН 1433 17.01 0027

**НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СОВЕТ ПО МАТЕМАТИКЕ
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

...

Многие члены Научно-методического совета по математике, работающие над физическими проблемами, над проблемами гидроаэромеханики знают Ваши научные результаты, знают Ваши глубокие математические исследования сложных физических процессов!

Многие из нас неоднократно принимали участие в научных конференциях и съездах Международного, Союзного и Всероссийского уровней, замечательно организованных Вами и Вашими учениками.

...

Первый заместитель

Председателя Президиума НМС по математике

Министерства образования и науки Российской Федерации,

член-корреспондент РАН

Кудрявцев

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ**

... Ваша научная деятельность охватывает широкий круг проблем гидродинамики, электродинамики и вычислительной математики. Особенно высокой оценки заслуживает Ваш вклад в решение актуальных и сложных проблем гидромеханики струйных течений. Многие годы нас связывают плодотворное взаимодействие в этой области. Благодаря разработанному Вами численному методу прямых итераций совместно с методом граничных элементов стало возможным исследование широкого круга проблем в теории нелинейной гидродинамики, таких как обтекание произвольных профилей и осесимметричных тел с развитой или частичной кавитацией, изучение влияния на кавитационное обтекание присутствия других тел или твердых границ и др.

Наши коллективы с благодарностью отмечают выполненную Вами огромную работу, связанную с регулярным проведением в Чебоксарах летних научных школ по гидродинамике больших скоростей, где обсуждались самые современные достижения ученых, работающих над созданием новых образцов морской техники и совершенствованием технологических процессов. Они являлись прекрасным местом для общения ученых гидродинамиков и воспитания молодых специалистов. Многие годы эти школы возглавлял вместе с Вами выдающийся механик академик Л.И. Седов. Их участниками были ведущие российские и зарубежные ученые.

Результаты Ваших исследований опубликованы в большом количестве печатных работ, докладывались на многих съездах и конференциях. Ваши труды известны не только в России, но и за рубежом. Вы выступали с заказными докладами в Англии, Бельгии, Болгарии, Германии, Италии, Франции, Японии и в других странах. Столь же активна и Ваша плодотворная научно-общественная деятельность в качестве члена Научного Совета РАН по механике жидкости и газа. ...

(23 подписи)

ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ (КИЕВ)

... Ваш выдающийся талант, высочайшая научная эрудиция, неиссякаемая творческая энергия позволили Вам стать основателем и общепризнанным лидером всемирно известной Чувашской школы гидромехаников.

Большой творческий потенциал и огромная трудоспособность позволили Вам в течение многих лет осуществлять плодотворную научную деятельность в различных направлениях теоретической гидромеханики, стать классиком теории течений со свободными поверхностями. Ваши многочисленные научные статьи и монографии вносят весомый вклад в науку, они широко известны и признаны во всем мире. Большую часть своего времени и своей души Вы отдаете своим многочисленным ученикам, являясь для них истинным Учителем. Ваша доступность и доброжелательность, неиссякаемый энтузиазм ученого, активная жизненная позиция вызывают у нас глубочайшее уважение и являются прекрасным примером для всех нас.

Организованные Вами школы стали поистине незабываемыми своими выдающимися научными достижениями, замечательным гостеприимством и душевностью. Мы всегда рады встречаться с Вами в разных странах на крупных научных форумах, где Вы неизменно являетесь одним из самых интересных и активных участников....

Зав. отд. Ю.Н. Савченко, ВНС В.Н.Семененко, И.Г.Нестерук, СНС Ю.А.Семененко

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЧЕБОКСАРСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

... Берлинский университет им. Гумбольдта — «Альма Матер» Ваших успехов и побед на самой почетной работе: «Сеять разумное, доброе, вечное!». В 1968 году чувашская земля снова встретила Вас, и Вы стали для нее одним из ее гвардейцев, неустанно, изо дня в день работающего на ниве созидания высшего образования республики.

Только для непосвященного человека ничего не говорят сухие цифры: опубликовано 150 работ, в том числе 5 учебных пособий, более 20 трудов - за рубежом, 4 изобретения. А ведь за ними - сотни исследований и тысячи измерений.

И сегодня, говоря об основных Ваших итогах как педагога и видного ученого, следует отметить эффективность и особую практичную результативность Вашей деятельности. Вы, Алексей Григорьевич, по праву считаетесь основателем научной школы гидродинамики в Чувашии: под Вашим руководством организована серия всероссийских летних научных школ в г.Чебоксары. А за свои научные разработки удостоены не только звания Заслуженного деятеля науки Российской Федерации и Чувашской Республики, но любви и признательности Ваших студентов.

Любовь к молодежи, опыт и жизненная мудрость стали магическим кристаллом, притягивающим к Вам преподавателей-коллег и студентов. И можно не сомневаться, что тысяча Ваших выпускников — это армия созидания и развития сильной и независимой России. ...

Директор ЧПИ МГОУ, д.т.н., профессор А.П. Акимов

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

...

Мы, Ваши ученики и коллеги из СПбГМТУ, любим и уважаем Вас за Ваши превосходные человеческие качества, за огромный вклад в гидродинамику больших скоростей. Мы знаем Вас как выдающегося учёного, педагога, и специалиста мирового уровня в области кавитации. Вы всегда были близки к кораблестроению и его научным проблемам. Вы достигли уникальной полноты анализа математических моделей кавитации и вместе со своими многочисленными учениками создали известную в мире научную школу. Вы - выдающийся организатор науки. Проводимые по Вашей инициативе и благодаря Вашему огромному научному авторитету "Школы гидродинамики больших скоростей" привлекли крупнейших учёных России и мира, дали импульс развитию новых, молодых талантов. ...

Ректор Спб МТУ, профессор К.П. Борисенко

ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

...

Для А.Г. Терентьева характерны целеустремленность, инициативность, высокая работоспособность и ответственность за порученное дело. Он обладает общительным характером. Благодаря хорошим организаторским и творческим способностям, высокому профессиональному мастерству и таланту Алексей Григорьевич заслужил большой авторитет среди ученых, сотрудников и студентов.

...

Ректор, профессор В.Г. Агаков

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Г.ЧЕБОТАРЕВА**

...

Не будем сегодня называть свершения и имена и, так сказать, пароли и явки. Просто подумаем о том, как всем нам (по крайней мере, казанцам) повезло, что такой человек, как Вы, оказался рядом, а для некоторых - еще и в нужную минуту. Будем это расценивать как маленькое чудо и надеяться на то, чтобы таких чудес в нашей с Вами истории становилось все больше и больше.

...

(17 подписей)

КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Были также многочисленные поздравления от других подразделений, коллег и друзей, за что юбиляр искренне признателен и благодарит всех за теплые слова в свой адрес.

СОДЕРЖАНИЕ

К ЮБИЛЕЮ АЛЕКСЕЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ТЕРЕНТЬЕВА Аквильянова И.Н., Димитриева Н.А.....	5
СПИСОК ТРУДОВ А.Г. ТЕРЕНТЬЕВА.....	9
К 85-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА М.П. ТУЛИНА.....	19
М.В. КЕЛДЫШ И Л.И. СЕДОВ В ЦАГИ (1931-1946 гг.) Кишкина Н.Ю.	24
ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК МЕТОДОМ ISPH В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЖИМОВ ОБРУШЕНИЯ Афанасьев К.Е., Макарчук Р.С.	34
О ПРОБЛЕМАХ ОБОСНОВАНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ Житников В.П., Шерыхалина Н.М.	46
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ Казакова А.О.....	51
О ВОЗНИКНОВЕНИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОЙ СТРУИ В ПЛОСКИЙ ВЕНТИЛИРУЕМЫЙ КАНАЛ Козлов И.И., Очеретяный С.А., Прокофьев В.В.....	57
ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ГАЗЕ ЧАПЛЫГИНА Котляр Е.М., Маклаков Д.В.	66
О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО ПРИ ОБТЕКАНИИ С ОТРЫВОМ СТРУЙ Маклаков Д.В.....	75
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОД ИНСТРУМЕНТОМ С ОГРАНИЧЕННОЙ НЕРОВНОСТЬЮ Муксимова Р.Р.....	81
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С НАДКРЫЛКОМ Павлова Н.А.....	98
МЕТОД РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТОК ДОЗВУКОВЫМ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ Петров А.Г.....	102
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СУПЕРКАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЗА ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ТЕЛАМИ Серебряков В.В.	115
О ПЛОСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ СУПЕРКАВИТАЦИИ ДЛЯ ПЛАСТИН С ИНТЕРЦЕПТОРОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ И ЗАМЫКАНИЕМ КАВЕРНЫ ПО СХЕМЕ ТУЛИНА-ТЕРЕНТЬЕВА Урядов А.К., Фридман Г.М.	143

ОТЗЫВЫ И ВЫДЕРЖКИ ИЗ ПОЗДРАВЛЕНИЙ ЮБИЛЯРА.....	158
AN APPRECIATION: RECOLLECTIONS OF A.G. TEREENTIEV ON HIS 75th ANNIVERSARY	
Marshall P. Tulin	158
В ЗНАК ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ: РАЗМЫШЛЕНИЯ В СВЯЗИ С 75-ЛЕТИЕМ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.Г. ТЕРЕНТЬЕВА	
Маршалл П. Тулин.....	161
THE MANY ACCOMPLISHMENTS OF PROFESSOR ALEXEY G.TERENTIEV	
Dr. Ivan N. Kirschner	164
О ДОСТИЖЕНИЯХ ПРОФЕССОРА АЛЕКСЕЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ТЕРЕНТЬЕВА	
Докт. Айван Н. Киршнер	166
ПРАВИТЕЛЬСТВЕННАЯ ТЕЛЕГРАММА от члена Совета Федерации Федерального Собрания Российской Федерации Федорова Н.В.....	168
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ СОВЕТ ПО МАТЕМАТИКЕ МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ	169
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ	170
ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ (КИЕВ).....	171
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЧЕБОКСАРСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)	172
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ	173
ЧУВАШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ	174
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.Г.ЧЕБОТАРЕВА	175
КЕМЕРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ	176

Научное издание

**ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ГИДРОДИНАМИКИ
БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ**

Сборник трудов научно-практической конференции

К 75-летию
Алексея Григорьевича ТЕРЕНТЬЕВА

Снимок на обложке заимствован с обложки трудов
Симпозиума по кавитации, 1998, Гренобль, Франция;
нижний рисунок рассчитан А.Г. Терентьевым

Подготовка к печати В.В. Чегулов
Компьютерная верстка И.О. Сорокина
Оформление: К.В. Шуюпов

Изготовлено в Редакционно-издательском отделе ЧПИ МГОУ
428022, г. Чебоксары, ул. П. Лумумбы, 8
Тел.: (8352) 63-60-85

Подписано в печать 24.08.11. Формат 60x84/16
Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная. Печать оперативная
Усл. печ. л. 15,89. Тираж 500 экз. Заказ № **365**

Отпечатано в типографии ИП Сорокина А.В. Издательство «Новое время»
428034, г. Чебоксары, ул. Мичмана Павлова, 50/1
Тел.: (8352) 41-27-98, 46-43-46