

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями
ФГОС ВО по направлению подготовки
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Авторы:

Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры

Методические указания одобрены на заседании кафедры
информационных технологий, электроэнергетики и систем управления
наименование кафедры

протокол № 10 от 14.05.2022 года.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы	4
2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы	4
3. Требования к оформлению расчетно-графической работы	6
4. Теоретический материал и примеры решения задач	6
5. Задания расчётно-графической работы №1	18
6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении	28
7. Рекомендуемая литература	28
8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР	29
9. Приложения	32

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» обучающиеся в процессе изучения дисциплины «Математика» выполняют расчетно-графическую работу №1.

Цель расчетно-графической работы - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).

2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.

3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.

4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t .

Пример. Найти матрицу $C = 2A + B^t$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Решение. } C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы : а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение.

а)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

1 способ. Находим определитель матрицы
матрица имеет обратную.

Значит

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ -1 \quad 1 \ 0 \ 0 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} i & 0 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 15 & \\ 0 & -1 & 15 & \end{array} \right) \begin{array}{l} -5 \ 2 \ 0 \\ -7 \ 0 \ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & i \end{array} \end{array}$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\begin{array}{c} 2 \ 1 \ -1 \quad 1 \ 0 \ 0 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} i & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \right) \begin{array}{l} -5 \ 2 \ 0 \\ -2 \ -2 \ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & i \end{array} \end{array}$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\begin{array}{c} 4 \ 2 \ 0 \quad 0 \ -2 \ 2 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} i & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \right) \begin{array}{l} 16 \ 30 \ -26 \\ -2 \ -2 \ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & i \end{array} \end{array}$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\begin{array}{c} 4 \ 0 \ 0 \quad 16 \ 28 \ -24 \\ \left(\begin{array}{c|ccc} i & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 2 & \end{array} \right) \begin{array}{l} 16 \ 30 \ -26 \\ -2 \ -2 \ 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} i & i \end{array} \end{array}$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} i$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij})^t.$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{cases}$$

где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. а) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- столбец неизвестных, - столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Следовательно, $x_1=1, x_2=1, x_3=1$.

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -3 & -1 & | & -4 \\ 0 & 0 & 7 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 - x_3 = -4 \\ 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения $x_2 = \frac{4 - x_3}{-3} = \frac{4 - 1}{-3} = 1$, и из первого $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$.

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы \vec{a}, \vec{b} называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2) умножение на число $\lambda \vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона \vec{a} к осям координат называются *направляющими*

косинусами.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Проекцией вектора \vec{a} на ось l называется число

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \phi,$$

где ϕ - угол наклона вектора \vec{a} к оси l .

Скалярным произведением \vec{a}, \vec{b} называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Угол между векторами \vec{a}, \vec{b} определяется по формуле

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по \vec{a}, \vec{b} , если

$$\vec{a}=(3,-1), \vec{b}=(1,-2), \vec{c}=(-1,1).$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(3,-1)+(1,-2)+(-1,1)=(3,-2)$.

Длина вектора $\vec{d}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Разложить по \vec{a}, \vec{b} значит, представить в виде $\vec{d}=\alpha \cdot \vec{a}+\beta \cdot \vec{b}$. Для определения α, β , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3,-1)+\beta \cdot (1,-2)=(3,-2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta=3, \\ -\alpha-2\beta=-2 \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha=\frac{4}{5}, \beta=\frac{3}{5}$, то есть $\vec{d}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, \phi=\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение.} \quad \cos \phi &= \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}| \cdot |\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} = \\ &= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением \vec{a}, \vec{b} называется число

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \phi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор \vec{d} , ортогональный $\vec{a}=(1, 2, 3), \vec{b}=(-7, 0, 2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c}=(1, 1, 1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a} \times \vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Тогда $\vec{d} = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{12}{5}, \frac{69}{5}, -\frac{42}{5}\right)$$

5. Задания расчётно-графической работы №1.

Задание 1. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу C .

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ & i & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i & i \end{pmatrix}$.

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

Задание 2. Найдите произведение матриц $A \cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B \cdot A$?

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$6. \quad f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$7. \quad f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ i \\ i \end{matrix}$$

$$8. f(x) = x^3 - 7x^2 + 3,$$

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$9. f(x) = 12x^2 + 5x + 3,$$

$$A = \begin{vmatrix} -6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$10. A = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

Задание 3. Вычислить определитель.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_6}$$

$$7. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_7}$$

$$8. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_6}$$

$$9. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_6}$$

$$10. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_9}$$

Задание 4. Найдите обратную матрицу для матрицы A . Сделайте проверку.

$$1. A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_6}$$

$$2. A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 2 \end{array} \right)_{\mathbb{Z}_6}$$

$$3. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$4. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$5. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$6. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & -6 & 2 & -1 & 0 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$7. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$8. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$9. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 3 & -8 & 20 & -1 & 0 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

$$10. \quad A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 3 & -1 & 2 & -12 & 8 \\ \hline & & & & & \end{array} \right)$$

Задание 5. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

1. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=4, \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y+4z=3, \\ 2x-y-z=1, \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+3z=12, \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-y+z=17, \\ x-3y+2z=-11, \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x-y-z=3, \\ x+3y+3z=-4, \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-y+z=16, \\ 2x-3y+2z=-11, \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-y-z=-3, \\ x+2y+3z=-4, \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 6x-y+2z=4, \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+4z=1, \\ 2x+y-z=1, \end{cases}$

Задание 6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

2. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(1, 2, 0)$, $\vec{b}=(2, 1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 1, -2)$.

3. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+3(\vec{b}, \vec{c})\vec{a}$, где $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

4. $4\vec{a}+19\{\vec{b}-\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(2, -4, 3)$, $\vec{b}=(10, -5, -2)$, $\vec{c}=(187, 8, 1)$.

5. $18\{\vec{a}+3\vec{b}+7\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(-6, 2, 0)$, $\vec{b}=(54, 1, 1)$, $\vec{c}=(-90, 1, -2)$.

6. $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+13(\vec{b}, \vec{c})\vec{a}$, где $\vec{a}=(45, -9, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$, $\vec{c}=(131, 9, 1)$.

7. $13\{\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}\}$, где $\vec{a}=(-10, 1, 9)$, $\vec{b}=(1, 7, -2)$, $\vec{c}=(10, 5, 1)$.

8. $-5\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(-7, 2, 0)$, $\vec{b}=(-5, 1, 1)$, $\vec{c}=(-1, 1, -2)$.

9. $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c}+7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4, -8, 3)$, $\vec{b}=(90, 2, -2)$, $\vec{c}=(10, 8, 1)$.

10. $14\{\vec{a}+19\{\vec{b}\vec{c}-\vec{c}\vec{b}\}$, где $\vec{a}=(-4, -4, 3)$, $\vec{b}=(113, -5, -2)$, $\vec{c}=(17, 3, 1)$.

Задание 7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a}=(0, 4, -3)$, $\vec{b}=(-1, 2, 2)$.

2. $\vec{a}=(2, 1, -2)$, $\vec{b}=(0, -2, -3)$.

3. $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$.

4. $\vec{a}=(1, 2, 0)$, $\vec{b}=(2, 1, 1)$.

5. $\vec{a}=(4, 1, 3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$.

6. $\vec{a}=(1, 4, -7)$, $\vec{b}=(-1, 2, 2)$.

7. $\vec{a}=(10, 1, -5)$, $\vec{b}=(3, -2, -3)$.

8. $\vec{a}=(-14, 11, 3)$, $\vec{b}=(3, 2, -2)$.

9. $\vec{a}=(13, 2, 0)$, $\vec{b}=(24, 1, 1)$.

10. $\vec{a}=(51, 1, -3)$, $\vec{b}=(1, 2, -2)$.

Задание 8.

1. Даны точки $A(2, -1, 4)$, $B(4, 0, 2)$. Найти модуль и направление вектора AB

2. Найти $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, если $\vec{a}=(1.5, 0, -4)$, $\vec{b}=(0, 0, 4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a}=(3, -2, 1)$ и $\vec{b}=(n, 4, 0.5)$ ортогональны?

4. Найти (\vec{c}, \vec{d}) , если $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 120° .

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 60° .

6. Вычислить $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 135° .

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC , если $A(2, -1, 4)$, $B(4, 0, 2)$, $C(2, -3, 1)$.

8. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 6$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 60° .

9. Найти $\vec{c} = 2\vec{a}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$, \vec{d}^2 , (\vec{c}, \vec{d}) , угол между векторами \vec{c} , \vec{d} , если $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA = (1, 1, 0)$, $OB = (0, -3, 1)$. Определить диагонали и их длины.

Задание 9.

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}, \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (-1, 0, 3), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

2. Найти $\|[\vec{c}, \vec{d}]\|$, если $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 30° .

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если $A(2, -2, 3)$, $B(-3, -6, 0)$, $C(4, -3, -1)$.

4. Лежат ли точки $A(2, -1, -3), B(-4, 1, -2), C(0, -6, 3), D(-12, -2, 5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1, -2, 3), B(0, 1, 0), C(1, 2, -1), D(4, -1, 7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=(2, -2, 6), \vec{b}=(-6, 6, 3), \vec{c}=(3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , площади граней тетраэдра, если $A(1, -3, -5), B(-1, 2, -4), C(0, 0, -2), D(-6, -1, -2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP , медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2, -1, 2), B(5, 5, 5), C(3, 2, 0), D(4, 1, 4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между \vec{a} и \vec{p} , и проекцию \vec{a} на \vec{b} .

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c}=6\vec{a}+10\vec{b}, \vec{d}=3\vec{a}-6\vec{b}, \vec{f}=3\vec{a}-6\vec{b}, |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$, а угол между векторами \vec{a} и \vec{b} 135° .

Задание 10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A , и медианы, проведенной из вершины B , треугольника ABC , если $A(-1, -5), B(3, -1), C(1, -2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1, -1), B(-3, 3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8, 6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5, 4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1, -2), C(0, 3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1, 4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x + 5y - 2 = 0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1, 5)$ и точку пересечения прямых $5x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 5y + 7 = 0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 2)$, перпендикулярно вектору AB , если $B(-1, 2, 3)$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1, 2, -3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x + y - 2z + 2 = 0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -1, 3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

7. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 401 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07001-9. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/468633>
2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учебное пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 192 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-7568-0. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/489755> .
3. Лунгу К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Т. 1 [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 3-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 2016 с. - Режим доступа : <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=854317>
4. Шипачев В. С. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - Режим доступа : <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720>
5. Лунгу К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2 [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 2-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2015. - Режим доступа : <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=854393>

Дополнительная литература

1. Математика : учебное пособие / Ю. М. Данилов, Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонова [и др.] ; под ред. Л. Н. Журбенко, Г. А. Никоновой. – Москва : ИНФРА-М, 2019. – 496 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-010118-7. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/989799>. – Текст : электронный.
2. Клово, А. Г. Курс лекций по математике : учебное пособие / А. Г. Клово, И. А. Ляпунова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2020. – 199 с. : ил. – ISBN 978-5-9275-3503. –URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=612217>. – Текст : электронный.

Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред.Кревчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/314991>. — Текст : электронный

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР

9. Профессиональная база данных и информационно-справочные системы	Информация о праве собственности (реквизиты договора)
<p>Ассоциация инженерного образования России http://www.ac-raee.ru/</p>	<p>Совершенствование образования и инженерной деятельности во всех их проявлениях, относящихся к учебному, научному и технологическому направлениям, включая процессы преподавания, консультирования, исследования, разработки инженерных решений, включая нефтегазовую отрасль, трансфера технологий, оказания широкого спектра образовательных услуг, обеспечения связей с общественностью, производством, наукой и интеграции в международное научно-образовательное пространство. свободный доступ</p>
<p>научная электронная библиотека Elibrary http://elibrary.ru/</p>	<p>Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - это крупнейший российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 26 млн научных статей и публикаций, в том числе электронные версии более 5600 российских научно-технических журналов, из которых более 4800 журналов в открытом доступе свободный доступ</p>
<p>Федеральный портал «Российское образование» [Электронный ресурс] – http://www.edu.ru</p>	<p>Федеральный портал «Российское образование» – уникальный интернет-ресурс в сфере образования и науки. Ежедневно публикует самые актуальные новости, анонсы событий, информационные материалы для широкого круга читателей. Еженедельно на портале размещаются эксклюзивные материалы, интервью с ведущими специалистами – педагогами, психологами, учеными, репортажи и аналитические статьи. Читатели получают доступ к нормативно-правовой базе сферы образования, они могут пользоваться самыми различными полезными сервисами – такими, как онлайн-тестирование, опросы по актуальным темам и т.д.</p>

Название организации	Сокращённое название	Организационно-правовая форма	Отрасль (область деятельности)	Официальный сайт
РОССИЙСКИЙ СОЮЗ научных и инженерных общественных объединений	РосСНИО	неправительственное, независимое общественное объединение	творческий Союз общественных научных, научно-технических, инженерных, экономических объединений, являющихся юридическими лицами, созданный на основе общности творческих профессиональных интересов ученых, инженеров и специалистов для реализации общих целей и задач.	http://rusea.info
Российский союз инженеров	РСИ	Общероссийская общественная организация «Российский союз инженеров» (далее именуемая «Союз») является основанным на членстве общественным объединением, созданным в форме общественной организации	Защита общих интересов и достижения уставных целей объединившихся граждан, осуществляющих свою деятельность на территории более половины субъектов Российской Федерации	http://российский-союз-инженеров.рф/

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем
управления

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Наименование темы

Выполнил: студент __ курса
заочного отделения по направлению
**09.03.02 «Информационные системы
и технологии»**

Ф.И.О.

Научный руководитель:

должность, звание

Ф.И.О.

Оценка _____

Дата «__» _____ 2021г.

Чебоксары 2021

ЛИСТ ДОПОЛНЕНИЙ И ИЗМЕНЕНИЙ

рабочей программы дисциплины

Рабочая программа дисциплины рассмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2023-2024 учебном году на заседании кафедры, протокол № 6 от «04» марта 2023г.

Внесены дополнения и изменения в части актуализации лицензионного программного обеспечение, используемое при осуществлении образовательного процесса по данной дисциплины, а также современных профессиональных баз данных и информационных справочных системах, актуализации электронно-библиотечных систем.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2024-2025 учебном году на заседании кафедры, протокол № 8 от «16» марта 2024г.

Внесены дополнения и изменения в части актуализации лицензионного программного обеспечение, используемое при осуществлении образовательного процесса по данной дисциплины, а также современных профессиональных баз данных и информационных справочных системах, актуализации электронно-библиотечных систем.

Рабочая программа дисциплины рассмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 202__-202__ учебном году на заседании кафедры, протокол № ___ от « » 202 г.

Внесены дополнения и изменения _____

Рабочая программа дисциплины рассмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 202__-202__ учебном году на заседании кафедры, протокол № ___ от « » 202 г.

Внесены дополнения и изменения _____