

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Агафонов Александр Викторович

Должность: директор филиала

Дата подписания: 21.05.2022 00:00:02

Уникальный программный ключ:

2539477a8ecf706dc9cff164bc411eb6d3c4ab06

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**  
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
**ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра**  
**Информационных технологий, электроэнергетики и систем**  
**управления**

**УТВЕРЖДАЮ**  
 Директор филиала  
 А.В. Агафонов  
 «28» мая 2021г.



## **Математика**

(наименование дисциплины)

### **Методические указания по выполнению расчетно-графических работ № 1**

Направление  
подготовки

**23.03.03 Эксплуатация транспортно-  
технологических машин и комплексов**  
 (код и наименование направления подготовки)

Направленность  
(профиль)  
образовательной  
программы

**Автомобильное хозяйство и сервис**

(наименование профиля подготовки)

Квалификация  
выпускника

**бакалавр**

Форма обучения

**очная, заочная**

Методические указания разработаны  
в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки:  
**23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и  
комплексов»**

---

Авторы:

Кульпина Т.А.,

доцент, к.т.н. кафедры информационных технологий, электроэнергетики  
и систем управления

---

*Ф.И.О., ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры*

Методические указания одобрены на заседании кафедры  
информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

---

*наименование кафедры*

протокол № 10 от 15.05.2021 года.

**1. Цель расчетно-графической работы** - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы. Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

**Выполнение расчетно-графической работы** включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

**2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы**

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

**Титульный лист** является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

**Во введении** содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

**В расчетной части** обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

**В заключении** расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

### **3. Требования к оформлению расчетно-графической работы**

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).

2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.

3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.

4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисовочные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

#### 4. Теоретический материал и примеры решения задач

##### Матрицы и операции над ними

*Сложение (вычитание) матриц* одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

*Умножение матрицы на число* – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

*Умножение матрицы на матрицу* определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  на  $B_{n \times p}$  называется матрица  $C_{m \times p}$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, p}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием*. Транспонированная по отношению к матрице  $A$  матрица обозначается  $A^t$ .

*Пример.* Найти матрицу  $C = 2A + B^t$ , где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 12 \end{pmatrix}$$

*Решение.*  $C = 2A + B^t = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix}$$

*Пример.* Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix}$$

*Решение.*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

## Определители

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, называемое *определителем*.

*Определитель* матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

*Определитель* матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Определитель матрицы второго порядка вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

*Теорема Лапласа.* Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

*Пример.* Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ : а) по правилу

треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

*Решение.*

а)

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-3) \cdot 4 = \\ = 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-3)) = -12, \\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) = 0.$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33} = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-12) + 4 \cdot 0 = 16.$$

**Ранг матрицы**

**Обратная матрица**

Квадратная матрица называется *невыврожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

*Обратной матрицей*  $A^{-1}$  для матрицы  $A$  называется матрица, для которой справедливо равенство  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  - единичная матрица.

Обратная матрица  $A^{-1}$  определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij}^*).$$

*Теорема о ранге матрицы.* Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

*Пример.* Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Решение.*

*1 способ.* Находим определитель матрицы  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ . Значит

матрица имеет обратную.

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$



Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ij}).$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Системы линейных алгебраических уравнений

Система  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными имеет

вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где  $a_{ij}$  - коэффициенты при неизвестных,  $b_m$  - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где  $\Delta$  - определитель системы,  $\Delta_j$  - определители, полученные из определителя системы заменой  $j$ -го столбца на столбец свободных членов.

*Пример.* Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* а) Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  - столбец неизвестных,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  - столбец свободных членов.

Определитель системы  $\Delta = -7 \neq 0$ . Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ .

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й

строки элементы 1-й строки, умноженные на  $-2$ , а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на  $3$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_2 - x_3 = -4, \\ 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем  $x_3 = \frac{7}{7} = 1$ , из второго уравнения

$$x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4 - 1}{3} = 1, \text{ и из первого } x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1.$$

## Векторная алгебра

### Операции над векторами

#### Скалярное произведение векторов

*Вектором* называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы  $\vec{a}, b$  называются *линейно-независимыми*, если  $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 b = 0$

1 2

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . В противном случае, они линейно-зависимы.

*Длиной (модулем) вектора* называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина  $\vec{a}(x, y)$  определяется по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Векторы называются *коллинеарными*, если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

$$1) \text{ сложение: } \vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$2) \text{ умножение на число } \lambda a = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Углы наклона  $a$  к осям координат называются *направляющими косинусами*.

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

*Проекцией вектора  $a$  на ось  $l$*  называется число

$$\text{пр } \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол наклона вектора  $a$  к оси  $l$ .

*Скалярным произведением  $\vec{a}, b$*  называется число

$$(\vec{a}, b) = \vec{a} \cdot b = |\vec{a}| \cdot |b| \cdot \cos \varphi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, b) = \vec{a} \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Угол между векторами  $\vec{a}, b$  определяется по формуле



$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

*Пример.* Найти длину  $d = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  и разложить его по  $\vec{a}, b$ , если

$$\vec{a} = (3, -1), b = (1, -2), \vec{c} = (-1, 1).$$

*Решение.* Найдем координаты  $d = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3, -1) + (1, -2) + (-1, 1) = (3, -2)$ .

$$\text{Длина вектора } \vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Разложить по  $\vec{a}, b$  - значит, представить в виде  $d = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot b$ . Для определения  $\alpha, \beta$ , запишем в виде

$$\alpha \cdot (3, -1) + \beta \cdot (1, -2) = (3, -2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим  $\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{3}{5}$ , то есть  $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ .

*Пример.* Найти угол между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \cos\varphi &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} = \\ &= \frac{4^2 - 3^2}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{13}}. \end{aligned}$$

## **Векторное и смешанное произведения векторов**

Векторным произведением  $\vec{a}, b$  называется число

$$[\vec{a}, b] = \vec{a} \times b = |\vec{a}| \cdot |b| \cdot \sin \varphi.$$

В координатной форме

$$[\vec{a}, b] = \vec{a} \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $a$  и  $b$  равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах  $a$  и  $b$  равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением  $\vec{a}, b, \vec{c}$  называется число

$$\vec{a} b \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на  $\vec{a}, b, \vec{c}$ , равен модулю их смешанного произведения.

*Пример.* Найти вектор  $d$ , ортогональный  $\vec{a} = (1, 2, 3), b = (-7, 0, 2)$ , для которого скалярное произведение с  $c = (1, 1, 1)$  равно 3.

*Решение.* Искомый вектор коллинеарен  $\vec{a} \times b$ . Следовательно, он равен  $\lambda(\vec{a} \times b)$ .

$$[\vec{a}, b] = \vec{a} \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, -23, 14).$$

Тогда  $d = (4\lambda, -23\lambda, 14\lambda)$ .

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 69 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$d \cdot c = 4\lambda \cdot 1 - 23\lambda \cdot 1 + 14\lambda \cdot 1 = -5\lambda = 3, \lambda = -\frac{3}{5} \Rightarrow d = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

### 5. Задания расчётно-графической работы №1.

**Задание 1.** Даны матрицы  $A$  и  $B$ . Найдите матрицу  $C$ .

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = 2A + 3B.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3B - 2A.$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, C$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, C = 3A - B.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = A + 2B.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, C = 2B - A^t.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (2A)^t + B.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = A + 2B^t.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = 2A^t - B^t.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 17 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = (12A)^t - B.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 6 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}, C = A + 15B$$

**Задание 2.** Найдите произведение матриц  $A \cdot B$  или значение матричного

многочлена. Существует ли произведение  $B \cdot A$ ?

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -4 & 34 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. f(x) = 2x^2 - 5x + 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(1 \ 1) \quad (1 \ 4)$$

$$7. f(x) = 3x^2 + 2x - 5,$$



$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8.  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3$ ,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

9.  $f(x) = 12x^2 + 5x + 3$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 37 & -11 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

10.  $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & - & \end{pmatrix}$   
 $\begin{pmatrix} \quad \quad \quad 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$

**Задание 3.** Вычислить определитель.

1.  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2.  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3.  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

4.  $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

0 3 5

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задание 4.** Найдите обратную матрицу для матрицы  $A$ . Сделайте проверку.

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 19 \end{pmatrix}.$$

**Задание5.** Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 3y + 4z = 3, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = 12, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x - y + z = -17, \\ x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 4x - y - z = -3, \\ x + 3y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x - y + z = -16, \\ 2x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - y - z = -3, \\ x + 2y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 1. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x + y + z = -1, \\ 6x - y + 2z = -4, \\ 2x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + y + 4z = 1, \\ 2x + y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

**Задание6.** Найти линейную комбинацию векторов.

1.  $3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (4,1,3)$ ,  $\vec{b} = (1,2,-2)$ ,  $\vec{c} = (10,8,1)$ .

2.  $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (1,2,0)$ ,  $\vec{b} = (2,1,1)$ ,  $\vec{c} = (-1,1,-2)$ .

3.  $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 3(\vec{b}, \vec{c})\vec{a}$ , где  $\vec{a} = (4,1,3)$ ,  $\vec{b} = (1,2,-2)$ ,  $\vec{c} = (10,8,1)$ .

4.  $4\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (2, -4, 3)$ ,  $\vec{b} = (10, -5, -2)$ ,  $\vec{c} = (187, 8, 1)$ .

5.  $18\vec{a} + 3\vec{b} + 7\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-6, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (54, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-90, 1, -2)$ .

6.  $(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 13(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$ , где  $\vec{a} = (45, -9, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (131, 9, 1)$ .

7.  $13\vec{a} + 6\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-10, 1, 9)$ ,  $\vec{b} = (1, 7, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 5, 1)$ .

8.  $-5\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-7, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (-5, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ .

9.  $2(\vec{a}, \vec{b})\vec{c} + 7(\vec{b}, \vec{c})\vec{b}$ , где  $\vec{a} = (4, -8, 3)$ ,  $\vec{b} = (90, 2, -2)$ ,  $\vec{c} = (10, 8, 1)$ .

10.  $14\vec{a} + 19\vec{b} - \vec{c}$ , где  $\vec{a} = (-4, -4, 3)$ ,  $\vec{b} = (113, -5, -2)$ ,  $\vec{c} = (17, 3, 1)$ .

**Задание7.** Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1.  $\vec{a} = (0, 4, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 2)$ .

2.  $\vec{a} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (0, -2, -3)$ .

3.  $\vec{a} = (4, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ .

4.  $\vec{a} = (1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, 1)$ .

5.  $\vec{a} = (4, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ .

6.  $\vec{a} = (1, 4, -7)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 2)$ .

7.  $\vec{a} = (10, 1, -5)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, -3)$ .

8.  $\vec{a} = (-14, 11, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, 2, -2)$ .

9.  $\vec{a} = (13, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (24, 1, 1)$ .

10.  $\vec{a} = (51, 1, -3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -2)$ .

**Задание8.**

1. Даны точки  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(4, 0, 2)$ . Найти модуль и направление вектора  $AB$

2. Найти  $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = (1.5, 0, -4)$ ,  $\vec{b} = (0, 0, 4)$ .

3. При каком значении  $n$  векторы  $\vec{a} = (3, -2, 1)$  и  $\vec{b} = (n, 4, 0.5)$  ортогональны?

4. Найти  $(\vec{c}, \vec{d})$ , если  $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $120^\circ$ .

5. Вычислить  $|\vec{c}|$ , если  $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $60^\circ$ .

6. Вычислить  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 4$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $135^\circ$ .

7. Найти внешний угол  $B$  в треугольнике  $ABC$ , если  $A(2, -1, 4)$ ,  $B(4, 0, 2)$ ,  $C(2, -3, 1)$ .

8. Найти угол между векторами  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 6$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $60^\circ$ .

9. Найти  $|\vec{c}|$ ,  $|\vec{d}|$ ,  $d^2$ ,  $(\vec{c}, \vec{d})$ , угол между векторами  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ , если  $\vec{c} = 2\vec{a}$ ,  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\vec{a} = (2, -1, -2)$ ,  $\vec{b} = (8, -4, 0)$ .

10. Построить параллелограмм на векторах  $\vec{OA} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{OB} = (0, -3, 1)$ . Определить диагонали и их длины.

### Задание 9.

1. Вычислить  $[\vec{c}, \vec{d}]$ , если



$$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}, d = -2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = (-1, 0, 3), \vec{b} = (1, 1, 2).$$

2. Найти  $\left[ \vec{c}, d \right]$ , если  $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}, d = -\vec{a} + 3\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ , а угол между векторами  $a$  и  $b$   $30^\circ$ .

3. Вычислить площадь треугольника  $ABC$ , если  $A(2, -2, 3)$ ,  $B(-3, -6, 0)$ ,  $C(4, -3, -1)$ .

4. Лежат ли точки  $A(2, -1, -3)$ ,  $B(-4, 1, -2)$ ,  $C(0, -6, 3)$ ,  $D(-12, -2, 5)$  в одной плоскости?

5. Лежат ли точки  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(1, 2, -1)$ ,  $D(4, -1, 7)$  в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a} = (2, -2, 6)$ ,  $\vec{b} = (-6, 6, 3)$ ,  
 $\vec{c} = (3, -2, 5)$ .

7. Найти объем тетраэдра  $ABCD$ , высоту  $BP$ , площади граней тетраэдра, если  $A(1, -3, -5)$ ,  $B(-1, 2, -4)$ ,  $C(0, 0, -2)$ ,  $D(-6, -1, -2)$ .

8. Найти объем тетраэдра  $ABCD$ , высоту  $BP$ , медианы граней, площади граней тетраэдра, если  $A(2, -1, 2)$ ,  $B(5, 5, 5)$ ,  $C(3, 2, 0)$ ,  $D(4, 1, 4)$ .

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ ,  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , длины диагоналей параллелограмма, угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{p}$ , и проекцию  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{c} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$ ,  $\vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ ,  $\vec{f} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$ ,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $135^\circ$ .

### **Задание 10.**

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины  $A$ , и медианы, проведенной из вершины  $B$ , треугольника  $ABC$ , если  $A(-1, -5)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(1, -2)$ .

2. Написать уравнение стороны квадрата  $ABCD$ , если заданы координаты двух его смежных вершин  $A(1, -1)$ ,  $B(-3, 3)$ .

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку  $A(8,6)$  и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки  $A(5,4)$  до прямой, проходящей через точки  $B(1,-2)$ ,  $C(0,3)$ .

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку  $A(1,4)$ , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой  $-2x + 5y - 2 = 0$ .

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку  $A(-1,5)$  и точку пересечения прямых  $5x + 3y - 1 = 0$  и  $4x + 5y + 7 = 0$ .

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1,1,2)$ , перпендикулярно вектору  $AB$ , если  $B(-1,2,3)$ .

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(-1,2,-3)$  параллельно плоскости, заданной уравнением  $4x + y - 2z + 2 = 0$ .

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1,-1,3)$  и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями  $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$  и  $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ .

## **6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.**

Критерии оценки расчетно-графической работы:

оценка «зачтено» выставляется обучающемуся в том случае, если все задачи решены, к задачам приведены пояснения;

оценка «не зачтено» ставится в том случае, если какая-либо задача отсутствует или приведены недостаточные пояснения к решению задачи.

Типовые ошибки при выполнении расчетно-графической работы

При выполнении расчетно-графической работы по математике часто встречаются следующие ошибки:

1. Не соблюдены правила оформления расчетно-графической работы.
2. Не выдержана структура расчетно-графической работы (отсутствует библиографический список, теоретическая часть к задаче и т. д.).
3. Не указаны единицы измерения полученных результатов.
4. В задаче отсутствуют выводы или содержимое выводов к задаче неконструктивны.
5. Отсутствие готовности обучающегося отвечать на теоретические вопросы, являющиеся основой для решения задачи.
6. Не соблюдаются правила математического округления полученного результата.
7. Задание на расчетно-графическую работу выполнено не по своему варианту.

## 7. Рекомендуемая литература

### *а) основная литература*

1. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. - М. : Айрис-пресс, 2010. – 592 с.
2. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. - М. : Айрис-пресс, 2006. – 576 с.
3. Баврин И. И. Высшая математика : учебник / И. И. Баврин . - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ВЛАДОС, 2004. – 560 с.
4. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. - 6-е изд., стереотип. - М. : Высш. шк., 2006. – 304 с.
5. Шипачев В. С. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - Режим доступа : <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720>
6. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2-х ч. Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. - 6-е изд. - М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2006.

### *б) дополнительная литература*

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: тридцать шесть лекций. В 2-х частях. Ч. 1 / Д. Т. Письменный . - 6-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2006. – 288 с.
2. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М. : Астрель; АСТ, 2005. – 991 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учеб. пособие. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - Изд. стереотип. - М. : Интегралл-Пресс, 2004. - 416 с.

4. Данилов Ю. М. Математика: Учеб. пособие / Ю.М. Данилов, Л.Н. Журбенко, Г.А. Никонова и др.; Под ред. Л.Н. Журбенко, Г.А. Никоновой; КГТУ. - М.: ИНФРА-М, 2006. - 496 с.
5. Березина Н. А. Математика: Учебное пособие / Н.А. Березина, Е.Л. Максина. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 175 с.

#### **8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР**

1. eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : электронная библиотека. – Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
2. Znaniium.com [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа: <http://znaniium.com>
3. «КнигаФонд» [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : <http://www.knigafund.ru>
4. Электронный каталог Национальной библиотеки ЧР [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.nbchr.ru>.
5. Издательство ЛАНЬ [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : <https://e.lanbook.com/>