МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
________________ А.В. Агафонов
« 28» __мая__ 2021г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

«Математические основы ТОЭ»

(наименование дисциплины)

Направление подготовки	**13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»**
	(код и наименование направления подготовки)
Направленность подготовки	**«Электроснабжение»**
	(наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	**Бакалавр**
Форма обучения	**очная и заочная**

Чебоксары, 2021

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями ФГОС ВО

по направлению подготовки

13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»

Автор Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления
(указать ФИО, ученую степень, ученое звание или должность)

Методические рекомендации одобрены на заседании кафедры Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления (протокол № 10 от 10.04.2021 г.).

1. **Цель расчетно-графической работы** - выявить знания студентов методологических основ ТОЭ, умение применять эти знания в анализе явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов ТОЭ.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математические основы ТОЭ», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к зачету не допускаются.

2. **Выбор варианта и структура расчетно-графической работы**

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы ТОЭ расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты – до 0,001, а проценты – до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы – 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта – 14 пунктов, интервал – 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.
5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C=A+B,\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A=\lambda B,\ a_{ij}=\lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием.* Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t .

Пример. Найти матрицу $C=2A+B^t$, где

$$A=¿\left|-2\ \ 3¿\right|\left|1\ \ 0¿\right|¿¿¿$$
¿

Решение. $C=2A+B^t=2\cdot ¿¿ \left(-2\ 3¿\middle|1\ 0¿\right)¿¿¿ + \left(1\ 6¿\middle|-3\ 1¿\right)¿¿¿ \left(-4\ 6¿\middle|2\ 0¿\right)¿¿¿ \left(1\ 6¿\middle|-3\ 1¿\right)¿¿¿$

$\left(-3\ 12¿\middle|-1\ 1¿\right)¿¿¿$

Пример. Найти произведение матриц

$$A=¿\left(-2\ \ 3¿\right)¿\left(1\ \ 0¿\right)¿¿¿$$

Решение.

$$A\cdot B=¿\left(-2\ \ 3¿\right)¿\left(1\ \ 0¿\right)¿¿¿$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставит в соответствие число, называемое *определителем.*

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A|=\Delta_2=\det A=¿\left|a_{11}\ \ a_{12}¿\right|¿¿¿$$

Определитель матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A|=\Delta_3=\det A=¿\,|a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}¿||a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23}¿|¿\,¿¿\,¿\ ¿\ ¿$$

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A|=\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=¿\,|3\ -1\ -1¿||-3\ 1\ 5¿|¿¿¿\ ¿$: а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение. А)

$$\Delta=3\cdot1\cdot4+(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)+(-1)\cdot5\cdot2-(-1)\cdot1\cdot2-3\cdot5\cdot(-2)-(-1)\cdot(-3)\cdot4=$$
$$=12-6-10+2+30-12=16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31}=(-1)^{3+1}¿\,|-1\ \ -1¿|¿\ ¿\ ¿$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}¿\,|\ 3\ \ -1¿|¿\ ¿\ ¿$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}¿\,|\ 3\ \ -1¿|¿\ ¿\ ¿$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2\cdot(-4) + (-2)\cdot(-12) + 4\cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^{t}.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

A=¿|2 1−1¿||5 2 4¿|¿¿ ¿ .

Решение.

1 способ. Находим определитель матрицы |A|=¿|2 1−1¿||5 2 4¿|¿¿ ¿ Значит матрица имеет обратную.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -7 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 16 & 28 & -24 \\ 0 & -2 & 0 & 16 & 30 & -26 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E \quad .$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}¿|2\ 4¿|¿¿ \quad A_{12}=(-1)^{1+2}¿|5\ 4¿|¿¿ \quad A_{13}=(-1)^{1+3}¿|5\ 2¿|¿¿$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}¿|1-1¿|¿¿ \quad A_{22}=(-1)^{2+2}¿|2-1¿|¿¿ \quad A_{23}=(-1)^{2+3}¿|2\ 1¿|¿¿$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}¿|1-1¿|¿¿ \quad A_{32}=(-1)^{3+2}¿|2-1¿|¿¿ \quad A_{33}=(-1)^{3+3}¿|2\ 1¿|¿¿$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^{t}.$$

Получим

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \ldots$$

где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B \quad .$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$$

Решение. А) Матрица системы имеет вид

$$A = ¿ \left(1\ 1\ 1 ¿ \right| \left(2 - 1\ 1 ¿ \right| ¿ ¿¿ ¿$$.

$X = ¿ \left(x_1 ¿ \right| \left(x_2 ¿ \right| ¿ ¿¿ ¿$ - столбец неизвестных, $B = ¿ \left| 3 ¿ \right| \left| 2 ¿ \right| ¿ ¿¿ ¿$ - столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta = -7 \neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{7} ¿ \left(3 - 1 - 2 ¿ \right| \left(5 - 4 - 1 ¿ \right| ¿ ¿ ¿$$.

По формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7} ¿ \left(3 - 1 - 2 ¿ \right| \left(5 - 4 - 1 ¿ \right| ¿ ¿ ¿ \quad ¿¿ \left| 3 ¿ \right| \left| 2 ¿ \right| ¿ ¿ ¿ \quad \left| 1 ¿ \right| \left| 1 ¿ ¿ \right| ¿¿ ¿$$.

Следовательно, $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

Б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1 = ¿ \left| 3\ 1\ 1 ¿ \right\| 2 - 1\ 1 ¿ \left| ¿ ¿¿ ¿ \right., \quad \Delta_2 = ¿ \left| 1\ 3\ 1 ¿ \right\| 2\ 2\ 1 ¿ \left| ¿ ¿¿ ¿ \right., \quad \Delta_2 = ¿ \left| 1\ 1\ 3 ¿ \right\| 2 - 1\ 2 ¿ \left| ¿ ¿¿ ¿ \right.$$.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$.

В) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\begin{matrix} (1\ \ 1\ \ 1 & |3 \\ (2 - 1\ \ 1 (& |2 Ī) \\ (-3\ \ 2\ \ 1 & |0 \end{matrix}$$.

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\left| x_1+x_2+x_3=3, \right| -3x_2-x_3=-4,$$

Из последнего уравнения найдем $x_3=\frac{7}{7}=1$, из второго уравнения $x_2=\frac{4-x_3}{3}=\frac{4-1}{3}=1$, и из первого $x_1=3-x_2-x_3=3-1-1=1$.

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными,* если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
2) умножение на число $\lambda \vec{a} = \lambda (x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами.*

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ .$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos\phi \ ,$$

где ϕ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l .

Скалярным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi \ .$$

В координатной форме

$$(\vec{a},\,\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,.$$

Угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\phi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\,.$$

Пример. Найти длину $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ и разложить его по $\vec{a},\vec{b}$, если

$$\vec{a}=(3,-1),\,\vec{b}=(1,-2),\,\vec{c}=(-1,1)\,.$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ $=(3,-1)+(1,-2)+(-1,1)=(3,-2)$.

Длина вектора $\vec{d}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Разложить по $\vec{a},\vec{b}$ - значит, представить в виде $\vec{d}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}$. Для определения α,β, запишем в виде

$$\alpha\cdot(3,-1)+\beta\cdot(1,-2)=(3,-2)$$

или

$$\{3\alpha+\beta=3,¿¿¿¿$$

Решив систему, получим $\alpha=\frac{4}{5}\beta=\frac{3}{5}$, то есть $\vec{d}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4,\,|\vec{b}|=3,\,\phi=\frac{\pi}{3}$.

Решение. $$\cos\phi=\frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2+2(\vec{a},\vec{b})+|\vec{b}|^2}\cdot\sqrt{|\vec{a}|^2-2(\vec{a},\vec{b})+|\vec{b}|^2}}=$$

$$=\frac{4^2-3^2}{\sqrt{4^2+2\cdot4\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}+3^2}\cdot\sqrt{4^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\phi.$$

В координатной форме

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(-7,0,2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c}=(1,1,1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a}\times\vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=¿\left|\, i \;\; j \;\; k¿\right|\left|\, 1 \;\; 2 \;\; 3¿\right|¿_{¿¿} \; ¿$$

.

Тогда $\vec{d}=(4\lambda,-23\lambda,\,14\lambda)$.

$$\vec{d}\cdot\vec{c}=4\lambda\cdot1-23\lambda\cdot1+14\lambda\cdot1=-5\lambda=3,\ \lambda=-\frac{3}{5}\Rightarrow\vec{d}=\left(-\frac{12}{5},\,\frac{69}{5},\,-\frac{42}{5}\right).$$

5. Задания расчётно-графической работы.

<u>Задание1.</u> Даны матрицы *A* и *B*. Найдите матрицу *C*.

1. $A=¿\left(2 \quad 3 \;¿\; 5¿\right)¿¿¿$.

2. $A=¿\left|7 \quad 4¿\right|\left|0-3¿\right|¿¿¿ \; ¿$.

3. $A=¿\left|4 \;\; 1 \; -3¿\right|\left|2 \;\; 0-4¿\right|¿¿¿ \; ¿$.

4. $A=¿\left|9 \; -11¿\right|\left|7 \; -3¿\right|¿¿¿ \; ¿$.

5. $A=¿\left|-2 \quad 1 \; ¿ -5¿\right|¿¿¿$.

6. $A = ¿ \left(-4\ \ 2\ -1 ¿ \right) ¿ \left(-1\ \ 0\ -2 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

7. $A = ¿ \left(3\ -1\ ¿ \right) ¿ \left(6\ \ 8 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

8. $A = ¿ \left(-2\ \ 1 ¿ \right) ¿ \left(5\ -7\ ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

9. $A = ¿ \left(-3\ \ 2\ -11 ¿ \right) ¿ \left(-1\ \ 2\ -2 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

10. $A = ¿ \left(2\ -16 ¿ \right) ¿ \left(6\ -3\ ¿ \right) ¿ ¿ ¿$

<u>Задание2.</u> Найдите произведение матриц $A \cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B \cdot A$?

1. $A = \left(1\ -1\ 2 \right),\ B = ¿ \left(1\ -2 ¿ \right) ¿ \left(4\ \ 3 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

2. $A = \left(1\ 2\ 3 \right),\ B = ¿ \left(-2 ¿ \right) ¿ \left(1 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$.

3. $A = ¿ \left(1\ \ \ 2 ¿ \right) ¿ ¿ ¿ ¿$.

4. $A = ¿ \left(3\ \ 1\ \ 1 ¿ \right) ¿ \left(2\ \ 1\ \ 2 ¿ \right) ¿ ¿ ¿$

5. $A=\left(-4\ \ 34\ \ 3\right),\ B=¿\left(-2¿\right)\left(14¿\right)¿¿¿$.

6. $f(x)=2x^2-5x+3$,

$A=¿\left(1\ \ 2¿\right)¿¿¿$.

7. $f(x)=3x^2+2x-5$,

$A=¿\left(3\ \ 1\ \ 1¿\right)\left(2\ \ 1\ \ 2¿\right)¿¿¿$

8. $f(x)=x^3-7x^2+3$,

$A=¿\left(4\ \ 1\ -3¿\right)\left(2\ \ 0\ -4¿\right)¿¿¿$.

9. $f(x)=12x^2+5x+3$,

$A=¿\left(-6\ \ 3¿\right)¿¿¿$.

10. $A=¿\left(9\ \ 0\ \ 1¿\right)\left(4\ \ 1\ -7¿\right)¿¿¿$

Задание3. Вычислить определитель.

1. $\left|2\ 2\ -1¿\right|\left|2\ -1\ 2¿\right|¿¿¿$.

2. |3 1 1¿||2 1 2¿|¿¿¿
¿ .

3. |1 1 -1¿||2 -1 1¿|¿¿¿
¿ .

4. |4 1 -3¿||2 0 -4¿|¿¿¿¿
¿
¿ .

5. |6 1 3¿||0 3 0¿|¿¿¿
¿ .

6. |1 1 1 1¿||1 2 1 2¿||3 1 3 1¿|¿¿¿
¿ .

7. |3 1 1 4¿||0 4 10 1¿||1 7 7 3¿|¿¿¿
¿ .

8. |1 0 4 1¿||3 2 1 1¿||3 1 0 1¿|¿¿¿
¿ .

9. |1 5 1 1¿||1 2 1 0¿||0 1 3 2¿|¿¿¿
¿ .

10. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Задание4.</u> Найдите обратную матрицу для матрицы *A*. Сделайте проверку.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Задание5.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

1. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+3y+4z=3, \\ 2x-y-z=1, \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+3z=12, \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x-y+z=-17, \\ x-3y+2z=-11, \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x-y-z=-3, \\ x+3y+3z=-4, \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-y+z=-16, \\ 2x-3y+2z=-11, \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-y-z=-3, \\ x+2y+3z=-4, \end{cases}$

9. $x+y+z=-1,$¿ $6x-y+2z=-4,$¿¿¿¿ 10. $x+y+4z=1,$¿ $2x+y-z=1,$¿¿¿¿

<u>Задание6.</u> Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(4,\,1,\,3),\,\vec{b}=(1,\,2,\,-2),\,\vec{c}=(10,\,8,\,1).$

2. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(1,\,2,\,0),\,\vec{b}=(2,\,1,\,1),\,\vec{c}=(-1,\,1,-2).$

3. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+3(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,\,1,\,3),\,\vec{b}=(1,\,2,\,-2),\,\vec{c}=(10,\,8,\,1).$

4. $4\vec{a}+19\{\vec{b}-\vec{c}$¿ , где $\vec{a}=(2,\,-4,\,3),\,\vec{b}=(10,\,-5,\,-2),\,\vec{c}=(187,\,8,\,1).$

5. $18\{\vec{a}+3\vec{b}+7\vec{c}$¿ , где $\vec{a}=(-6,\,2,\,0),\,\vec{b}=(54,\,1,\,1),\,\vec{c}=(-90,\,1,-2).$

6. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+13(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(45,\,-9,\,3),\,\vec{b}=(1,\,2,\,-2),\,\vec{c}=(131,\,9,\,1).$

7. $13\{\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}$¿ , где $\vec{a}=(-10,\,1,\,9),\,\vec{b}=(1,\,7,\,-2),\,\vec{c}=(10,\,5,\,1).$

8. $-5\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(-7,\,2,\,0),\,\vec{b}=(-5,\,1,\,1),\,\vec{c}=(-1,\,1,-2).$

9. $2(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+7(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,\,-8,\,3),\,\vec{b}=(90,\,2,\,-2),\,\vec{c}=(10,\,8,\,1).$

10. $14\{\vec{a}+19\{\vec{b}$¿$-\vec{c}$¿ , где $\vec{a}=(-4,\,-4,\,3),\,\vec{b}=(113,\,-5,\,-2),\,\vec{c}=(17,\,3,\,1).$

<u>Задание7.</u> Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a}=(0,\,4,\,-3),\,\vec{b}=(-1,\,2,\,2).$

2. $\vec{a}=(2,\,1,\,-2),\,\vec{b}=(0,\,-2,-3).$

3. $\vec{a}=(4,\,1,\,3),\,\vec{b}=(1,\,2,\,-2)$.

4. $\vec{a}=(1,\,2,\,0),\,\vec{b}=(2,\,1,\,1)$.

5. $\vec{a}=(4,\,1,\,3),\,\vec{b}=(1,\,2,\,-2)$.

6. $\vec{a}=(1,4,-7), \vec{b}=(-1,2,2)$.

7. $\vec{a}=(10,1,-5), \vec{b}=(3,-2,-3)$.

8. $\vec{a}=(-14,11,3), \vec{b}=(3,2,-2)$.

9. $\vec{a}=(13,2,0), \vec{b}=(24,1,1)$.

10. $\vec{a}=(51,1,-3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

Задание8.

1. Даны точки $A(2,-1,4), B(4,0,2)$. Найти модуль и направление вектора AB

2. Найти $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, если $\vec{a}=(1.5,0,-4), \vec{b}=(0,0,4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a}=(3,-2,1)$ и $\vec{b}=(n,4,0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c},\vec{d})$, если $\vec{c}=5\vec{a}+\vec{b}, \vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}, |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120^o .

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}, |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o .

6. Вычислить $(\vec{a}-\vec{b})^2$, если $|\vec{a}|=2\sqrt{2}, |\vec{b}|=4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o .

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC , если $A(2,-1,4), B(4,0,2), C(2,-3,1)$.

8. Найти угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=6,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o.

9. Найти $\vec{c}=2\vec{a}, \vec{d}=\vec{b}-\vec{a}, |\vec{c}|, |\vec{d}|, \vec{d}^2, (\vec{c}, \vec{d})$, угол между векторами $\vec{c}, \vec{d}$, если $\vec{a}=(2, -1, -2), \vec{b}=(8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA=(1, 1, 0), OB=(0, -3, 1)$. Определить диагонали и их длины.

<u>Задание9.</u>

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$\vec{c}=\vec{a}-3\vec{b}, \vec{d}=-2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}=(-1, 0, 3), \vec{b}=(1, 1, 2).$

2. Найти $|[\vec{c}, \vec{d}]|$, если $\vec{c}=4\vec{a}-2\vec{b}, \vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}, |\vec{a}|=|\vec{b}|=2,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30^o.

3. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2, -2, 3), B(-3, -6, 0), C(4, -3, -1).$

4.Лежат ли точки $A(2, -1, -3), B(-4, 1, -2), C(0, -6, 3), D(-12, -2, 5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1, -2, 3), B(0, 1, 0), C(1, 2, -1), D(4, -1, 7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}=(2, -2, 6)$, $\vec{b}=(-6, 6, 3)$,

$\vec{c}=(3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, площади граней тетраэдра, если $A(1,-3,-5), B(-1,2,-4), C(0,0,-2), D(-6,-1,-2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2,-1,2), B(5,5,5), C(3,2,0), D(4,1,4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}, \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c}=6\vec{a}+10\{\vec{b}, \vec{d}=3\vec{a}-6\vec{b}, \vec{f}=3\vec{a}-6\vec{b}, |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2,$¿ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o.

<u>Задание10.</u>

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A, и медианы, проведенной из вершины B, треугольника ABC, если $A(-1,-5), B(3,-1), C(1,-2)$.

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1,-1), B(-3,3)$.

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8,6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5,4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1,-2), C(0,3)$.

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1,4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x+5y-2=0$.

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1,5)$ и точку пересечения прямых $5x+3y-1=0$ и $4x+5y+7=0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,2)$, перпендикулярно вектору AB, если $B(-1,2,3)$.

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,2,-3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ и $x+\sqrt{2}y-z+3=0$.

6. Шкала оценивания

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Малинин, Л. И. Теория электрических цепей : учебное пособие для вузов / Л. И. Малинин, В. Ю. Нейман. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 345 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04319-8. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/489941
2. Теоретические основы электротехники : учебник / И. Я. Лизан, К. Н. Маренич, И. В. Ковалева [и др.]. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 627 с. : ил. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=618546. – ISBN 978-5-9729-0663-5. – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие для вузов / Л. А. Бессонов [и др.] ; ответственный редактор Л. А. Бессонов. – 5-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2020. – 528 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-3486-1. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/467025 .
2. *Миленина, С. А.* Электротехника : учебник и практикум для вузов / С. А. Миленина, Н. К. Миленин ; под редакцией Н. К. Миленина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 263 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-05077-6. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/492090.

Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред.Кревчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/314991. — Текст : электронный

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТОЭ»

Выполнил: студент __ курса
заочного отделения
по направлению 13.03.02
Электроэнергетика и
электротехника

____
Ф.И.О.

Научный руководитель:

____
должность, звание

____
Ф.И.О.

Оценка ___________________________

Дата «__» _______________ 2021г.

Чебоксары 2021