Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Агафонов Александр Викторович
Должность: директор филиала
Дата подписания: 06.11.2023 07:22:34
Уникальный программный ключ:
2539477a8ecf706dc9cff164bc411eb6d3c4ab06

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра электрических систем, физики и математики

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
А.В. Агафонов
«31» мая 2018г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Физические основы технических измерений»

Специальность	**23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства»** (код и наименование направления подготовки)
Специализация	**«Автомобили и тракторы»** (специализация)
Квалификация выпускника	**инженер**
Форма обучения	**очная и заочная**

Чебоксары, 2018

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями ФГОС ВО
по специальности
23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства

Авторы:
Лепаев Александр Николаевич, к.т.н., доцент кафедры электрических систем, физики и математики

ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры

Методические указания одобрены на заседании кафедры
электрических систем, физики и математики

наименование кафедры

протокол (протокол № 10 от 19.05.2018 г)

1. Цель расчетно-графической работы - освоение методов получения достоверной измерительной информации и правильного ее использования, а также приобретение практических навыков обработки данных при выполнении различных видов измерений.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Физические основы технических измерений», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов физических основ технических измерений по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов.

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к зачету и экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист (приложении А);
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 5-10 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.
5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные надписи.
6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Задания и методические указания для выполнения расчетно-графической работы студентами очной и заочной форм обучения

4.1 Задание 1. Однократное измерение

4.1.1 Условие задания

При однократном измерении физической величины получено показание средства измерения X = 10. Определить, чему равно значение измеряемой величины, если экспериментатор обладает априорной информацией о средстве измерений и условиях выполнения измерений согласно данным таблицы 1.

4.1.2 Указания по выполнению

1. Исходные данные студент выбирает из таблицы 1 по предпоследней и последней цифрам шифра; например шифру 96836 соответствует априорная информация, определяемая на пересечении строки 3 и столбца 6.

2. Априорная информация в таблице 1 представлена в двух вариантах. В первом варианте даются сведения о классе точности средства измерений: пределы измерений, класс точности, значение аддитивной ($\theta_а$) или мультипликативной ($\theta_м$) поправки. Например, данные: -50...50; 1,5; $\theta_а$ = 0,5 – означают, что средство измерения имеет диапазон измерений от -50 до 50, класс точности 1,5, а значение аддитивной поправки равняется 0,5.

Во втором варианте в качестве априорной информации даются сведения о видах и характеристиках распределения вероятности ре-

Таблица 1 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0…100 1,0 $Q_а$ = 1	-50…+50 0,02/0,01 $Q_а$ = -2	0…50 1,0 $Q_м$ = 1.1	0…50 4,0 $Q_м$ = 0.9	-30…+30 1,5 $Q_м$ = 1.2	0…50 0,2/0,1 $Q_а$ = -0.5	0…100 4,0 $Q_а$ = 0	-50…+50 2,5 $Q_а$ = 0	0…30 6,0 $Q_а$ = 1	-10…+10 1,0 $Q_м$ = 1,1
2	норм. S_x = 0,1 P = 0,9 $Q_а$ = 1	норм. S_x = 0,5 P = 0,95 $Q_а$ = 1,3	норм. S_x = 1 P = 0,9 $Q_а$ = -1	норм. S_x = 0,6 P = 0,98 $Q_а$ = 0,5	норм. S_x = 0,3 P = 0,9 $Q_а$ = 0	норм. S_x = 0,1 $Q_а$ = -1,0	норм. S_x = 0,3 $Q_а$ = 1,1	норм. S_x = 0,5 P = 0,8 $Q_а$ = 0	норм. S_x = 0,6 $Q_а$ = 1,0	норм. S_x = 0,2 P = 0,8 $Q_а$ = -0,8
3	-30…+50 2,5 $Q_а$ = 1	-50…+30 2,5 $Q_а$ = 1	0…150 1,0 $Q_м$ = 1,1	-20…+20 1,5 $Q_м$ = 0,9	0…50 2,5 $Q_а$ = 0	-10…+20 4,0 $Q_а$ = 0,1	0…30 4,0 $Q_м$ = 1,2	0…50 0,03/0,01 $Q_а$ = 0	0…10 0,02/0,01 $Q_а$ = 1,0	0…30 1,0 $Q_а$ = 1,1
4	норм. S_x = 0,2 P = 0,99 $Q_а$ = 0	норм. S_x = 0,3 P = 0,8 $Q_м$ = 1,0	норм. S_x = 0,4 P = 0,95 $Q_а$ = 0,8	равн. S_x = 0,4 $Q_а$ = 1,0	равн. S_x = 0,8 $Q_м$ = 0,9	равн. S_x = 0,6 $Q_а$ = 1,0	норм. S_x = 0,6 P = 0,8 $Q_а$ = 0,5	норм. S_x = 0,7 P = 0,9 $Q_а$ = -0,5	равн. S_x = 0,5 $Q_а$ = 0,6	равн. S_x = 0,6 $Q_м$ = 1,2
5	0…100 6,0 $Q_а$ = 1,0	-50…+50 1,5 $Q_м$ = 0,9	0…30 4,0 $Q_а$ = -1,0	-20…+20 1,0 $Q_а$ = 0	-30…+30 0,04/0,02 $Q_а$ = 1,0	0…50 4,0 $Q_а$ = 0,5	-100…100 0,1 $Q_а$ = 0,2	1…100 0,2 $Q_а$ = 0	0…30 0,5 $Q_а$ = 0,9	0…50 0,25 $Q_а$ = 0,1
6	0…100 4,0 $Q_а$ = -0,5	0…50 0,4 $Q_а$ = -0,2	-10…+10 0,5 $Q_а$ = -1,0	-30…+50 0,25 $Q_м$ = 0,9	-100…100 0,1 $Q_а$ = 0,5	0…10 1,0 $Q_а$ = 0,2	0…50 0,1/0,2 $Q_м$ = 1,1	0…100 0,2/0,1 $Q_м$ = 1,1	0…50 6,0 $Q_а$ = 0,5	-20…+20 0,3/0,2 Q = 0
7	норм. S_x = 0,5 P = 0,9 $Q_а$ = 0,3	норм. S_x = 0,2 P = 0,95 $Q_м$ = 1,1	норм. S_x = 0,4 P = 0,9 $Q_м$ = 1,1	норм. S_x = 0,6 P = 0,8 $Q_а$ = -1,0	равн. S_x = 0,1 $Q_а$ = 0,3	равн. S_x = 0,2 $Q_а$ = -0,1	равн. S_x = 0,4 $Q_м$ = 0,8	равн. S_x = 0,3 $Q_а$ = -0,5	норм. S_x = 0,1 P = 0,9 $Q_м$ = 0,95	норм. S_x = 0,4 P = 0,95 $Q_а$ = -0,1
8	0…15 0,02/0,01 $Q_а$ = 1,1	0…20 0,1 $Q_м$= 1,01	-20…+30 0,25 $Q_а$ = -0,1	-30…+20 0,25 $Q_а$ = -0,1	0…80 0,05 $Q_а$ = -0,1	0…100 0,1 $Q_м$= 0,9	0…50 6,0 $Q_м$= 1,2	-10…20 4,0 $Q_м$= 0,9	-20…+20 1,0 $Q_м$= 1,0	-25…+25 1,5 $Q_а$ = -0,5
9	0…50 0,02/0,01 $Q_м$ = 1,1	0…10 0,1 $Q_а$ = 0,1	-10…20 0,25 $Q_м$ = 0,9	-50…+50 1,5 $Q_а$ = 0,1	0…50 1,6 $Q_м$ = 0,01	0…20 1,5 $Q_м$ = 1	0…50 2,0 $Q_а$ = 1	-10…+10 0,01/0,02 $Q_м$ = 1,1	0…15 0,5 $Q_а$ = 0,1	0…10 0,1 $Q_а$ = 0,2
0	норм. S_x = 0,5 P = 0,9 $Q_а$ = 0,1	норм. S_x = 0,9 P = 0,9 $Q_а$ = 0,9	норм. S_x = 1,5 P = 0,8 $Q_м$ = 1,1	норм. S_x = 0,9 P = 0,8 $Q_а$ = 0	равн. S_x = 0,5 $Q_а$ = 1,0	равн. S_x = 0,8 $Q_а$ = 0,8	норм. S_x = 0,85 P = 0,95 $Q_а$ = 0,1	норм. S_x = 0,9 P = 0,99 $Q_а$ = 0	норм. S_x = 0,1 P = 0,95 $Q_м$ = 1,1	норм. S_x = 0,2 P = 0,9 $Q_а$ = 0,2

зультата измерения: вид закона распределения, значение оценки среднего квадратического отклонения (S_x), доверительная вероятность P (для нормального закона распределения) и значение аддитивной ($\theta_а$) или мультипликативной ($\theta_м$) поправки. Например, данные: норм.; S_x =0,5; P = 0,95; $\theta_м$ = 1,1 – означают, что закон распределения вероятности результата измерения нормальный, со значением оценки среднеквадратического отклонения 0,5. При этом имеет место мультипликативная поправка (поправочный множитель) 1,1, а доверительный интервал следует рассчитывать с доверительной вероятностью 0,95.

4.1.3 Порядок расчета

Результат измерения при однократном измерении определяется по алгоритму, представленному на рисунке 34 [1].

Обработка экспериментальных данных зависит от вида используемой априорной информации. Если это информация о классе точности, то пределы, в которых находится значение измеряемой величины без учета поправки, определяются следующим образом:

$$Q_1 = X - \Delta X; \qquad Q_2 = X + \Delta X,$$

где ΔX - предел допускаемой абсолютной погрешности средства измерения при его показании X. Значение ΔX определяется в зависимости от класса точности и способа его задания по ГОСТ 8.401-80.

Если в качестве априорной используется информация о законе распределения вероятности, то пределы определяются через доверительный интервал:

$$Q_1 = X - E; \qquad Q_2 = X + E.$$

Значение E определяется в зависимости от вида закона распределения вероятности результата измерения. Для нормального закона

$$E = t \cdot S_x,$$

где t для заданной доверительной вероятности P выбирается из таблиц интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (например, табл. 1.1.2.6.2 [2], при этом следует учитывать, что $P = 2\Phi(t)$). Таблица распределения также приведена в приложении Б.

Для равномерного закона распределения вероятности результата измерения значение E (аналог доверительного интервала) можно определить из выражения

$$E = a \cdot S_x,$$

где $a = \sqrt{3}$.

При представлении результата измерения необходимо внести поправки и уточнить пределы, в которых находится значение измеряемой величины.

При вычислении следует руководствоваться правилами округления, согласно которым значения среднеквадратических отклонений указываются в окончательном ответе двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной, если первая равна 3 или более. Все предварительные расчеты выполняются не менее чем с одним или двумя лишними знаками.

В качестве справочных данных могут использоваться аналогичные таблицы из других литературных источников.

4.2 Задание 2. Многократное измерение

4.2.1 Условие задания

При многократном измерении одной и той же физической величины получена серия из 24 результатов измерений Q_i; $i \in [1...24]$. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 2. Определить результат измерения.

Таблица 2 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	**Последняя цифра шифра**										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
1	482	483	483	484	483	483	484	484	484	481	482 495
2	483	485	482	484	483	485	482	482	481	482	492 484
3	483	482	482	486	483	484	484	481	480	481	483 494
4	482	485	486	486	483	483	483	483	481	480	492 486
5	483	484	485	482	484	483	485	485	484	483	481 494
6	486	486	485	483	484	485	486	480	485	485	495 484
7	485	484	486	482	483	484	484	481	485	485	485 492
8	484	485	487	483	482	484	482	483	484	484	492 483
9	484	486	484	484	481	485	484	482	483	485	482 493
0	483	480	487	482	481	483	486	483	483	484	493 480
	484 493	492 484	487 495	492 484	483 495	493 484	487 495	493 484	485 492	492 484	

4.2.2 Указания по выполнению

1. Серию экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 2 по предпоследней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответствует серия, включающая все результаты измерений, которые приведены в строке 3 и столбце 6.

2. Результат измерения следует получить с доверительной вероятностью 0,95.

4.2.3 Порядок расчета

Результат многократного измерения находится по алгоритму, представленному на рисунке 40 [1]. При этом необходимо учитывать, что n = 24, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10\ldots15 < n < 40\ldots50$.

1. Определить точечные оценки результата измерения: среднего арифметического $\overline{Q}$ и среднего квадратического отклонения S_Q результата измерения.

2. Обнаружить и исключить ошибки. Для этого необходимо:

– вычислить наибольшее по абсолютному значению нормированное отклонение

$$v = \frac{max\left|Q_i - \overline{Q}\right|}{S_Q};$$

– задаться доверительной вероятностью P и из соответствующих таблиц (таблица П.6 [3] или таблица В.1) с учетом $q = 1 - P$ найти соответствующее ей теоретическое (табличное) значение v_q;

– сравнить v с v_q.

Если $v > v_q$, то данный результат измерения Q_i является ошибочным, он должен быть отброшен. После этого необходимо повторить вычисления по пунктам 1 и 2 для сокращенной серии результатов измерений. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполняться условие $v < v_q$.

3. Проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

Проверка выполняется по составному критерию [3].

Применив критерий 1, следует:

– вычислить отношение

$$d = \frac{\sum_{1}^{n}\left|Q_i - \overline{Q}\right|}{\sqrt{n\sum_{1}^{n}(Q_i - \overline{Q})^2}};$$

– задаться доверительной вероятностью P_1 (рекомендуется принять P_1 = 0,98) и для уровня значимости $q_1 = 1 - P_1$ по соответствующим таблицам (таблица П.7 [3] или таблица Г.1) определить квантили распределения $d_{1-0,5ql}$ и $d_{0,5q1}$;

– сравнить d с $d_{1-0,5ql}$ и $d_{0,5q1}$.

Если $d_{1-0,5q1} < d < d_{0,5q1}$, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными.

Применив критерий 2, следует:

– задаться доверительной вероятностью P_2 (рекомендуется принять $P_2 = 0{,}98$) и для уровня значимости $q_2 = 1 - P_2$ с учетом n определить по соответствующим таблицам (таблица П.8 [3] или таблица Г.2) значения m и P^*;

– для вероятности P^* из таблиц для интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (таблица 1.1.2.6.2 [2] или таблица Б.1) определить значение t и рассчитать $E = t \cdot S_Q$.

Если не более m разностей $|Q_i - \overline{Q}|$ превосходит E, то гипотеза о нормальном законе распределения вероятности результата измерения согласуется с экспериментальными данными, закон можно признать нормальным с вероятностью $P_0 \geq (P_1 + P_2 - 1)$.

Если хотя бы один из критериев не соблюдается, то гипотезу о нормальности распределения отвергают.

4. Определить стандартное отклонение среднего арифметического.

Если закон распределения вероятности результата измерений признан нормальным, то стандартное отклонение определяют как $S = S_Q / \sqrt{n}$.

Если гипотеза о нормальности распределения отвергается, то

$$S = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{1}^{n} Q_i^2 - n\overline{Q}^2}\ .$$

5. Определить доверительный интервал.

Если закон распределения вероятности результата измерений признан нормальным, то доверительный интервал для заданной доверительной вероятности P определяется из распределения Стьюдента $E = t \cdot S$, где t выбирается из соответствующих таблиц (таблица 1.1.2.8 [2] или таблица Д.1, при этом $m = n - 1$, а $\alpha = P$).

Если гипотеза о нормальности распределения отвергается, то t определяется из неравенства П.Л. Чебышева:

$$P \geq 1 - 1/t^2.$$

4.3 Задание 3. Обработка результатов нескольких серий измерений

4.3.1 Условие задания

При многократных измерениях одной и той же величины получены две серии по 12 (n_j) результатов измерений в каждой. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 2. Вычислить результат многократных измерений.

4.3.2 Указания по выполнению

1. Серии в таблице 2 студент выбирает по предпоследней и последней цифрам шифра: например, шифру 96836 соответствуют все результаты измерений, которые приведены в строке 3 (серия 1) и столбце 6 (серия 2).

2. Результат измерения следует получить с достоверностью 0,95.

4.3.3 Порядок расчета

Обработку результатов двух серий измерений целесообразно осуществлять по алгоритмам [1, с. 122-129] (последовательность расчетов и их содержание определяются условием 10...15 < n < 40...50).

1. Обработать экспериментальные данные в каждой j-й серии отдельно по алгоритму, изложенному в задании 2 (алгоритм обработки многократных измерений), при этом:

– определить оценки результата измерения Q_j и среднего квадратического отклонения S_{Qj};

– обнаружить и исключить ошибки;

– проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

2. Проверить значимость различия средних арифметических серий по алгоритму, представленному на рисунке 48 [1]. Для этого следует:

– вычислить моменты закона распределения разности:

$$G = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_2,$$

$$S_G = \sqrt{\frac{S_{Q1}{}^2}{n_1} + \frac{S_{Q1}{}^2}{n_2}};$$

– задавшись доверительной вероятностью P, определить из соответствующих таблиц интегральной функции нормированного нормального распределения $\Phi(t)$ (таблица 1.1.2.6.2 [2] или таблица Б.1) значение t;

– сравнить $|G|$ с $t \cdot S_G$.

Если $|G| \le t \cdot S_G$, то различие между средними арифметическими в сериях с доверительной вероятностью P можно признать незначимым.

3. Проверить равнорассеянность результатов измерений в сериях по алгоритму, изложенному на рисунке 50 [1]. Для этого необходимо:

– определить значение $\psi = S_{Q1}^2 / S_{Q2}^2 \ge 1$;

– задавшись доверительной вероятностью P, определить из соответствующих таблиц (таблица 16 [1] или таблица Е.1) значение аргумента интегральной функции распределения вероятности Фишера ψ_0;

– сравнить ψ с ψ_0.

Если $\psi < \psi_0$, то серии с доверительной вероятностью P считают рассеянными.

4. Обработать совместно результаты измерения обеих серий с учетом того, однородны серии или нет.

Если серии однородны (равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических), то все результаты измерения следует объединить в единый массив и выполнить обработку по алгоритму на рисунке 40 [1]. Для этого необходимо:

– определить оценку результата измерения $\overline{Q}$ и среднего квадратического отклонения S:

$$\overline{Q} = \left(n_1\overline{Q}_1 + n_2\overline{Q}_2\right) / \left(n_1 + n_2\right);$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)}\left[(n_1 - 1)S_{Q1}^2 + (n_2 - 1)S_{Q2}^2 + n_1\left(\overline{Q}_1 - \overline{Q}\right)^2 + n_2\left(\overline{Q}_2 - \overline{Q}\right)^2\right]};$$

– задавшись доверительной вероятностью Р, определить из таблиц распределения Стьюдента (таблица 1.1.2.8 [2] или таблица Д.1) значение t для числа степеней свободы $m = 2^2 / \left[(n_1 - 1)^{-1} + (n_2 - 1)^{-1}\right]$;

– определить доверительный интервал $E = t{\cdot}S$.

Если серии не равнорассеянны с незначимым различием средних арифметических, то совместную обработку результатов измерений следует выполнять с учетом весовых коэффициентов по алгоритму, представленному на рисунке 51 [1].

Для этого необходимо:

– определить оценки результата измерения – $\overline{Q}$ и среднего квадратического отклонения S:

$$S = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{1}^{2}\left(1/S_j\right)^2}} = \frac{S_{Q1} \cdot S_{Q2}}{\sqrt{n_1 \cdot S_{Q2}^2 + n_2 \cdot S_{Q1}^2}};$$

$$\overline{Q} = \sum_{1}^{2}\frac{S^2}{S_j^2} \cdot \overline{Q}_j = \sum_{1}^{2}\frac{S^2 \cdot n_j}{S_{Qj}^2}\overline{Q}_j;$$

– аналогично предыдущему случаю, задавшись доверительной вероятностью P, определить t и доверительный интервал.

Если различие средних арифметических в сериях признано значимым, то результаты измерений в каждой серии следует обработать раздельно по алгоритму многократных измерений:

– в зависимости от закона распределения вероятности результата измерения в каждой серии определить S_j;

– задавшись доверительной вероятностью P, определить по соответствующим таблицам значение t_j;

– рассчитать доверительный интервал $E_j = S_j \cdot t_j$.

4.4 Задание 4. Функциональные преобразования результатов измерений (косвенные измерения)

4.4.1 Условие задания

При многократных измерениях независимых величин *X* и *Y* получено по 12 (*n*) результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 2. Определить результат вычисления *Z = f (X, Y),* (вид функции *Z* и характер величин *X, Y, Z* представлены в таблице 3).

4.4.2 Указания по выполнению

1. Значения *X* и *Y* студент выбирает соответственно по предпоследней и последней цифрам шифра: например, шифру 96836 соответствуют значения *X,* представленные в строке 3, и значения *Y,* представленные в столбце 6 таблицы 2.

2. Вид функции *Z* студент выбирает по последней цифре шифра, например, шифру 96836 соответствует функция *Z*, представленная в строке 6 таблицы 3.

3. При определении *Z* следует предварительно выразить значения величин *X* и *Y* в единицах системы СИ.

4.4.3 Порядок расчета

Обработку экспериментальных данных при функциональном преобразовании результатов измерений целесообразно осуществлять по алгоритму [1, с. 144 – 166]. При этом необходимо учитывать, что $n = 12$, следовательно, порядок расчетов и их содержание определяются условием $10...15 < n < 40...50$.

1. Обработать результаты измерений величин *X* и *Y* отдельно по алгоритму, изложенному в пп. 1-3 задания 2, при этом:

– определить оценки результатов измерений *X, У* и средних квадратических отклонений S_x, S_y;

– обнаружить и исключить ошибки;

– проверить гипотезу о нормальности распределения оставшихся результатов измерений.

2. Определить оценку среднего значения функции:

$$\overline{Z} = f\left(\overline{X}, \overline{Y}\right).$$

Определить поправку:

$$\theta = -0{,}5\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot S_X^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \cdot S_Y^2\right].$$

Таблица 3 – Исходные данные

Последняя цифра шифра	Z=f (X,Y)	Характер и единицы величин		
		X	Y	Z
1	Z=X/Y	напряжение, мВ	сила тока, мкА	сопротивление
2	$Z=X^2Y$	сила тока, мкА	сопротивление, Ом	мощность
3	$Z=2X/Y^2$	перемещение, м	время, мс	ускорение
4	Z=2m/X·Y	индуктивность, мкГн	емкость, мкФ	период колебаний
5	$Z=3X/4\pi\cdot Y^3$	масса, мкг	радиус сферы, мкм	плотность

				материала
6	$Z=X\cdot Y^2/2$	индуктивность, мкГн	сила тока, мА	энергия магнитного поля
7	$\boldsymbol{Z=0{,}5X^2/Y}$	заряд, пКл	емкость, пФ	энергия конденсатора
8	$Z=X\cdot Y/(X+Y)$	сопротивление, Ом	сопротивление, Ом	сопротивление
9	$Z=X/(Y+10)$	ЭДС, мВ	сопротивление, Ом	сила тока
0	$Z=2\pi\sqrt{X/Y}$	масса, г	жесткость, Н/м	период колебаний

4. Определить оценку стандартного отклонения функции

$$S=\sqrt{\frac{1}{n_x}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial X}\cdot S_X\right]^2+\frac{1}{n_Y}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial Y}\cdot S_Y\right]^2},$$

где $n_{x,}\, n_y$ – числа оставшихся результатов измерений соответственно X и Y после исключения ошибок.

5. Определить доверительный интервал для функции

$$E_Z = t{\cdot}S.$$

Если законы распределения вероятности результатов измерения X и Y признаны нормальными, то t можно определить для принятой доверительной вероятности P из таблиц для распределения Стьюдента (таблица 1.1.2.8 [2] или таблица Д.1). При этом число степеней свободы m определяется из выражения

$$m=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2\cdot\frac{S_X^2}{n_x}+\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2\cdot\frac{S_Y^2}{n_y}\right]^2:\left[\frac{1}{n_x-1}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^4\cdot\left(\frac{S_X^2}{n_x}\right)^2+\frac{1}{n_y-1}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^4\cdot\left(\frac{S_Y^2}{n_y}\right)^2\right].$$

Если гипотеза о нормальности распределения результатов измерения X или (и) Y отвергается, то t целесообразно определить из неравенства Чебышева:

$$P\geq 1-1/t^2\ .$$

4.5 Задание 5. Обработка экспериментальных данных при изучении зависимостей

4.5.1 Условие задания

При многократных совместных измерениях величин X и Y получено по 20 *(n)* пар результатов измерений. Эти результаты после внесения поправок представлены в таблице 4. Определить уравнение регрессии Y по X: $Y = f(X)$.

4.5.2 Указания по выполнению

1. Серии экспериментальных данных студент выбирает из таблицы 4 по предпоследней и последней цифрам шифра. Например, шифру 96836 соответствуют серии, включающие все результаты измерений X (числитель) и Y (знаменатель), которые представлены в строке 3 и столбце 6.

2. Считать, что результаты измерений не содержат ошибок.

4.5.3 Порядок расчета

Обработку экспериментальных данных при изучении зависимостей целесообразно осуществлять по алгоритмам [4, с. 99-109].

1. В осях координат X и Y построить n экспериментальных точек с координатами X_i, Y_i, $i \in (1…20)$ и по характеру расположения точек принять гипотезу о виде уравнения регрессии Y на X.

Таблица 4 – Исходные данные

Предпоследняя цифра шифра	Последняя цифра шифра									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10	21	32	42	49	58	69	77	87	96
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	110	120	131	143	149	158	170	180	188	195
3	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	205	215	226	237	245	258	265	275	286	293
4	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	312	321	330	342	355	364	372	379	386	395
5	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	405	418	431	442	449	456	468	475	485	492
6	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	505	518	525	530	541	550	561	569	575	583
7	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	602	613	620	631	639	648	656	662	667	682
8	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	696	710	715	722	732	742	752	762	770	779
9	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	795	802	812	822	832	840	850	858	868	870
0	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	880	891	901	912	922	935	943	957	966	975

В качестве уравнения регрессии целесообразно использовать полином степени m:

$$Y = A + B \cdot X + C \cdot X^2 + ... + K \cdot X^m.$$

В первом приближении для решения данной задачи рекомендуется принять m = 1, т.е.

$Y = A + B{\cdot}X.$

2. Определить параметры уравнения регрессии по методу наименьших квадратов. Для этого необходимо:

– составить систему уравнений по числу рассчитываемых параметров:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A} = 0\,;\quad \frac{\partial\Delta}{\partial B} = 0\,;\quad \frac{\partial\Delta}{\partial C} = 0\,;\ \ldots\ ;\quad \frac{\partial\Delta}{\partial K} = 0\,,$$

где $\Delta = \sum_{1}^{n}\left(Y_i - A - B\cdot X - C\cdot X^2 - \ldots - K\cdot X^m\right)^2$.

Например, для линейного уравнения регрессии система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &B\sum_{1}^{n} X_i^{\,2} + A\sum_{1}^{n} X_i = \sum_{1}^{n} X_i Y_i \\ &B\sum_{1}^{n} X_i + nA = \sum_{1}^{n} Y_i \end{aligned}\right\}$$

– решить систему уравнений и определить неизвестные параметры. Например, для линейного уравнения регрессии решение имеет вид:

$$B = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2};\quad A = \frac{\sum X_i^{\,2}\sum Y_i - \sum X_i \sum X_i Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}.$$

3. Проверить правильность выбора вида уравнения регрессии. Для этого следует применить непараметрические критерии серий и инверсий:

– рассчитать отклонения экспериментальных значений Y_i от соответствующих значений Y_{pi}, рассчитанных для того же аргумента X_i по полученному уравнению регрессии: $\Delta Y_i = Y_i - Y_{pi}$;

– построить в осях координат X, ΔY полученные значения ΔY_i для соответствующих X_i;

– записать последовательность значений ΔY_j по мере возрастания X_j, $X_j \in [l,n]$;

– рассчитать число серий N в полученной последовательности ΔY_j (под серией в данном случае понимают последовательность отклонений одного знака, перед и после которой следуют отклонения противоположного знака или нет вообще никаких отклонений);

– задавшись доверительной вероятностью P (уровень значимости $\alpha = 1 - \mathrm{P}$) для n = 20 определить по соответствующей таблице (таблица А.6 [4] или таблица Ж.1) допустимые границы $N_{1-0,5\alpha}$ и $N_{0,5\alpha}$;

– рассчитать число инверсий A в полученной последовательности ΔY_j (под инверсией понимается событие, заключающееся в том, что $\Delta Y_j > \Delta Y_{jk}$ при $k > j$):

$$A = \sum_{1}^{n-1} A_j ,$$

где A_J – это число инверсий j-го члена последовательности, т.е. число членов последовательности, которые, будучи расположенными в последовательности после j-го члена, имеют значение меньшее, чем ΔY_j;

– задавшись доверительной вероятностью P (уровень значимости $\alpha = 1 - P$) для $n = 20$ определить по соответствующей таблице (таблица А.7 [4] или таблица И.1) допустимые границы $A_{1\text{-}0,5\alpha}$ и $A_{0,5\alpha}$;

– сравнить A с $A_{1\text{-}0,5\alpha}$ и $A_{0,5\alpha}$.

Если выполняются неравенства

$$N_{1\text{-}0,5\alpha} < N \le N_{0,5\alpha};$$
$$A_{1\text{-}0,5\alpha} < A \le A_{0,5\alpha},$$

то с выбранной доверительной вероятностью P можно считать, что отклонения экспериментальных значений Y_i, от соответствующих значений Y_{pi} найденного уравнения регрессии являются случайными, не содержат аддитивного, мультипликативного или колебательного трендов, т.е. рассчитанное уравнение регрессии достоверно описывает экспериментально исследуемую зависимость между величинами X и Y.

Если хотя бы одно из указанных выше неравенств не выполняется, то следует пересмотреть выбор вида уравнения регрессии. В частности, можно увеличить степень полинома m на единицу и повторить вычисления по описанному выше алгоритму. Например, для полинома второй степени:

$$Y = A + B \cdot X + C \cdot X^2.$$

С целью определения параметров уравнения регрессии в данном случае необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C\sum_{1}^{n} X_i^4 + B\sum_{1}^{n} X_i^3 + A\sum_{1}^{n} X_i^2 &= \sum_{1}^{n} X_i^2 Y_i; \\ C\sum_{1}^{n} X_i^3 + B\sum_{1}^{n} X_i^2 + A\sum_{1}^{n} X_i &= \sum_{1}^{n} X_i Y_i; \\ C\sum_{1}^{n} X_i^2 + B\sum_{1}^{n} X_i + nA &= \sum_{1}^{n} Y_i \end{aligned}\right\}$$

5. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Критерии оценки расчетно-графической работы:

- оценка «зачтено» выставляется обучающемуся в том случае, если все задачи решены, к задачам приведены пояснения;
- оценка «не зачтено» ставится в том случае, если какая-либо задача отсутствует или приведены недостаточные пояснения к решению задачи.

При выполнении расчетно-графической работы по физическим основам технических измерений часто встречаются следующие ошибки:

1. Не соблюдены правила оформления расчетно-графической работы.
2. Не выдержана структура расчетно-графической работы (отсутствует библиографический список, теоретическая часть к задаче и т. д.).
3. Не указаны единицы измерения полученных результатов.
4. В задаче отсутствуют выводы или содержимое выводов к задаче неконструктивны.
5. Отсутствие готовности обучающегося отвечать на теоретические вопросы, являющиеся основой для решения задачи.
6. Задание на расчетно-графическую работу выполнено не по своему варианту.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(справочное)
Форма титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ
по дисциплине
«Физические основы технических измерений»

Выполнил: студент __ курса
____
(Ф. И. О.)очной / заочной формы обучения
специальность_______________
уч. шифр ___________________
конт. телефон________________

Проверил:___________________________

Чебоксары 20__

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

(справочное)

Интегральная функция нормированного нормального распределения *Φ(t)*

Таблица Б.1 – Распределение $2\hat{O}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

2Φ(t)	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***
0,6827	1	0,7699	1,2	0,8385	1,4	0,8904	1,6	0,9281	1,8
0,6875	1,01	0,7737	1,21	0,8415	1,41	0,8926	1,61	0,9297	1,81
0,6923	1,02	0,7775	1,22	0,8444	1,42	0,8948	1,62	0,9312	1,82
0,697	1,03	0,7813	1,23	0,8473	1,43	0,8969	1,63	0,9328	1,83
0,7017	1,04	0,785	1,24	0,8501	1,44	0,899	1,64	0,9342	1,84
0,7063	1,05	0,7887	1,25	0,8529	1,45	0,9011	1,65	0,9357	1,85
0,7109	1,06	0,7923	1,26	0,8557	1,46	0,9031	1,66	0,9371	1,86
0,7154	1,07	0,7959	1,27	0,8584	1,47	0,9051	1,67	0,9385	1,87
0,7199	1,08	0,7995	1,28	0,8611	1,48	0,907	1,68	0,9399	1,88
0,7243	1,09	0,8029	1,29	0,8638	1,49	0,909	1,69	0,9412	1,89
0,7287	1,1	0,8064	1,3	0,8664	1,5	0,9109	1,7	0,9426	1,9
0,733	1,11	0,8098	1,31	0,869	1,51	0,9127	1,71	0,9439	1,91
0,7373	1,12	0,8132	1,32	0,8715	1,52	0,9146	1,72	0,9451	1,92
0,7415	1,13	0,8165	1,33	0,874	1,53	0,9164	1,73	0,9464	1,93
0,7457	1,14	0,8198	1,34	0,8764	1,54	0,9181	1,74	0,9476	1,94
0,7499	1,15	0,823	1,35	0,8789	1,55	0,9199	1,75	0,9488	1,95
0,754	1,16	0,8262	1,36	0,8812	1,56	0,9216	1,76	0,95	1,96
0,758	1,17	0,8293	1,37	0,8836	1,57	0,9233	1,77	0,9512	1,97
0,762	1,18	0,8324	1,38	0,8859	1,58	0,9249	1,78	0,9523	1,98
0,766	1,19	0,8355	1,39	0,8882	1,59	0,9265	1,79	0,9534	1,99
2Φ(t)	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***	***2Φ(t)***	***t***
0,9545	2	0,9722	2,2	0,9836	2,4	0,9907	2,6	0,9949	2,8
0,9556	2,01	0,9729	2,21	0,984	2,41	0,9909	2,61	0,995	2,81
0,9566	2,02	0,9736	2,22	0,9845	2,42	0,9912	2,62	0,9952	2,82
0,9576	2,03	0,9743	2,23	0,9849	2,43	0,9915	2,63	0,9953	2,83
0,9586	2,04	0,9749	2,24	0,9853	2,44	0,9917	2,64	0,9955	2,84
0,9596	2,05	0,9756	2,25	0,9857	2,45	0,992	2,65	0,9956	2,85
0,9606	2,06	0,9762	2,26	0,9861	2,46	0,9922	2,66	0,9958	2,86
0,9615	2,07	0,9768	2,27	0,9865	2,47	0,9924	2,67	0,9959	2,87
0,9625	2,08	0,9774	2,28	0,9869	2,48	0,9926	2,68	0,996	2,88
0,9634	2,09	0,978	2,29	0,9872	2,49	0,9929	2,69	0,9961	2,89
0,9643	2,1	0,9786	2,3	0,9876	2,5	0,9931	2,7	0,9963	2,9
0,9651	2,11	0,9791	2,31	0,9879	2,51	0,9933	2,71	0,9964	2,91
0,966	2,12	0,9797	2,32	0,9883	2,52	0,9935	2,72	0,9965	2,92
0,9668	2,13	0,9802	2,33	0,9886	2,53	0,9937	2,73	0,9966	2,93
0,9676	2,14	0,9807	2,34	0,9889	2,54	0,9939	2,74	0,9967	2,94
0,9684	2,15	0,9812	2,35	0,9892	2,55	0,994	2,75	0,9968	2,95
0,9692	2,16	0,9817	2,36	0,9895	2,56	0,9942	2,76	0,9969	2,96
0,97	2,17	0,9822	2,37	0,9898	2,57	0,9944	2,77	0,997	2,97
0,9707	2,18	0,9827	2,38	0,9901	2,58	0,9946	2,78	0,9971	2,98
0,9715	2,19	0,9832	2,39	0,9904	2,59	0,9947	2,79	0,9972	2,99

ПРИЛОЖЕНИЕ В

(справочное)

ν-критерий

Таблица В.1 – Значения ν_q при различных n, q

n	q		n	q	
	0,10	0,05		0,10	0,05
3	1,406	1,412	15	2,326	2,493
4	1,645	1,689	16	2,354	2,523
5	1,731	1,869	17	2,380	2,551
6	1,894	1,996	18	2,404	2,557
7	1,974	2,093	19	2,426	2,600
8	2,041	2,172	20	2,447	2,623
9	2,097	2,237	21	2,467	2,644
10	2,146	2,294	22	2,486	2,664
11	2,190	2,383	23	2,564	2,688
12	2,229	2,387	24	2,520	2,701
13	2,264	2,426	25	2,537	2,717
14	2,297	2,461			

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

(справочное)

Составной критерий

Таблица Г.1 – Статистика *d*

n	$d_{0,5q1}$		$d_{1-0,5ql}$	
	0,01	0,05	0,05	0,01
11	0,9359	0,9073	0,7153	0,6675
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8961	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Таблица Г.2 – Значения *m* и *P**

n	m	P*		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,99
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

(справочное)

Распределение Стьюдента

Таблица Д.1 – Коэффициент Стьюдента

n-1	P=0,95	P=0,99	n-1	P=0,95	P=0,99
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
10	2,228	3,169	28	2,048	2,763
12	2,179	3,055	30	2,043	2,750
14	2,145	2,977	∞	1,960	2,576

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

(справочное)

Распределение Фишера

Таблица Е.1 – Значения ψ_0 для различных значений n_1, n_2 и доверительной вероятности P

n_2	P	n_1				
		8	9	10	11	12
8	0,75	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	0,75	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

(справочное)

Критерий серий

Таблица Ж.1 – Процентные точки распределения серий (вероятность $P[r_n > r_{n;\alpha}] = \alpha$, $n = N_1 = N_2 = N$)

$n=N/2$	α					
	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01

5	2	2	3	8	9	9
6	2	3	3	10	10	11
7	3	3	4	11	12	12
8	4	4	5	12	13	13
9	4	5	6	13	14	15
10	5	6	6	15	15	16
11	6	7	7	16	16	17
12	7	7	8	17	18	18
13	7	8	9	18	19	20
14	8	9	10	19	20	21
15	9	10	11	20	21	22
16	10	11	11	22	22	23
18	11	12	13	24	25	26
20	13	14	15	26	27	28
25	17	18	19	32	33	34
30	21	22	24	37	39	40
35	25	27	28	43	44	46
40	30	31	33	48	50	51
45	34	36	37	54	55	57
50	38	40	42	59	61	63
55	43	45	46	65	66	68
60	47	49	51	70	72	74
65	52	54	56	75	77	79
70	56	58	60	81	83	85
75	61	63	65	86	88	90
80	65	68	70	91	93	96
85	70	72	74	97	99	101
90	74	77	79	102	104	107
95	79	82	84	107	109	112
100	84	86	88	113	115	117

ПРИЛОЖЕНИЕ И

(справочное)

Критерий инверсий

Таблица И.1 – Процентные точки распределения числа инверсий (вероятность $P[A_N > A_{N;\alpha}] = \alpha$, где N – общее число значений)

	α					
N	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01
10	9	11	13	31	33	35
12	16	18	21	44	47	49
14	24	27	30	60	63	66
16	34	38	41	78	81	85
18	45	50	54	98	102	107
20	59	64	69	120	125	130
30	152	162	171	263	272	282
40	290	305	319	460	474	489
50	473	495	514	710	729	751
60	702	731	756	1013	1038	1067
70	977	1014	1045	1369	1400	1437
80	1299	1344	1382	1777	1815	1860
90	1668	1721	1766	2238	2283	2336

100	2083	2145	2198	2751	2804	2866